

# 전달행렬법에 의한 경사 격자교의 해석에 관한 연구

Study on Analysis of Skew Grillage Girder Bridges by Transfer Matrix Method

김 용 희\*                      이 윤 영\*\*                      김 광 호\*\*\*  
Kim, Yong-Hee              Lee, Yoon-Young              Kim, Kwang-Ho

## Abstract

The grid structure is parallel main girders intersected with crossgirder. It distribute the loads to adjoining main girder through the crossgirder when a girder is subjected to a load. grillage girder bridge has high load-carrying capacity, it can save materials and become more economical type of bridge. In this paper, the grillage girder bridge analysis program developed by using the transfer matrix method deals with following problems: the comparison with Leonhardt, Szabo, FEM yang and jung in the analysis of grillage girder bridges, quality of straight and curved bridges with skew angle, forces of straight and curved bridges according to skew angle and bending stiffness/torsional stiffness ratio.

## 요 지

격자구조는 병렬하는 주거더에 횡거더로 접합된 구조를 말하며 집중하중이 재하될 때 하중이 주거더만 부담하지 않고 횡거더를 통하여 다른 주거더로 하중이 일부를 부담하게 된다. 격자형의 교량은 과도한 집중하중을 분산시켜 내하력이 높은 특성을 갖고 있으며 사용재료를 절약할 수 있어 경제적이다. 본 연구에서는 해석절차가 간단하고 이해가 쉬운 전달행렬법을 이용하여 격자교의 프로그램을 작성하여 Leonhardt, Szabo, FEM, 양창현 및 정진환의 해석결과와 비교하였다. 또한, 경사각을 갖는 직선격자교와 곡선격자교의 특성을 분석하였고, 경사각과 휨강도/비틀림강도의 비에 따른 직선격자교와 곡선격자교의 단면력을 분석하였다.

**Keywords** : Transfer Matrix Method, Grillage Girder Bridges, Straight and Curved Bridges, Skew Angle, Bending Stiffness/Torsional Stiffness Ratio

**핵심 용어** : 전달행렬법, 격자교, 직선교와 곡선교, 경사각, 휨강도/비틀림강도의 비

\* 정회원, 경남대학교 토목환경학부 교수

\*\* 정회원, 경남대학교 강사, 공학박사

\*\*\* 정회원, (주)해송 엔지니어링, 대표이사

E-mail : kyhee@kyungnam.ac.kr 055-249-2667

• 본 논문에 대한 토의를 2005년 3월 31일까지 학회로 보내 주시면 2005년 7월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

최근 들어 교통량의 증가로 인하여 도로, 철도 등을 횡단하는 교량이 급격히 증가하고 있으며, 이러한 경우에는 시공성이나 경제성 등을 감안하여 상자형 교량이 빈번히 설계, 시공되고 있다. 또한, 건설되는 교량의 대부분은 사각, 대칭경사, 곡선을 가지고 있으며, 도로 설계 속도의 증가, 지형적 조건, 도로선형 유지 등의 이유로 해석상의 어려움에도 불구하고 사교의 건설이 늘어나고 있는 실정이다. 그러나, 경사교는 횡강도, 비틀림강도, 경사각 등에 따라 역학적인 거동이 직선교와는 매우 다른 경향을 보인다.

현재 실무에서 상자형 교량을 설계할 때 교량전체를 모델링 하므로 해석이 복잡하고 많은 시간이 소요되기 때문에 실무에서는 주로 한 개의 범요소로 고려하여 주거더 사이는 가로보만으로 연결한 격자해석 모델을 사용하여 간이계산법이 사용되고 있다.

격자거더는 다차 부정정 구조물이지만 예전부터 Timoshenko<sup>(1)</sup>, Hetenyi<sup>(2)</sup>, Melan<sup>(3)</sup>, Kloppel<sup>(4)</sup> 등 연구가 진행 되었고, 격자교가 가설되어지고 나서 부터 격자거더의 해석 이론은 급속하게 발달하게 되었다. 격자거더의 정적 해석법은 주로 직교이방성판이론에 의한 풀이법, 격자거더이론 등이 있는데, Guyon-Massonnet<sup>(5)</sup>, Woinowsky-Krieger<sup>(6)</sup> 등이 연구를 진행 하였다.

한편, 격자거더이론은 격자를 골조 입체 구조물로 취급하는 것으로 미지량의 선택에 따라 응력법, 변형법, 혼합법으로 분류할 수 있다. 격자이론에 관한 연구는 많이 있지만 대표적으로 成岡昌夫<sup>(7)</sup>, 平井一男<sup>(7)</sup>, Szabo<sup>(8)</sup>, Hendry-Jaeger<sup>(9)</sup>, Hiba<sup>(10)</sup>, Goldstein<sup>(11)</sup>, Basole<sup>(12)</sup>, Clarkson<sup>(13)</sup>, Lee<sup>(14)</sup>, Markino<sup>(14)</sup>, van Langendonck<sup>(15)</sup> 등의 연구가 있다.

따라서, 본 연구에서는 격자 거더 내의 주거더 및 횡거더 모두를 개별 거더로 분해하고, 각각의 거더에 대하여 이론체계가 알기 쉽고, 계산순서가 명확하며, 응용분야가 넓은 전달행렬법(Transfer matrix method)을 적용하였다. 이때 주거더와 횡거더의 결합점에 작용하는 격점력을 미지량으로 계산에 도입하고 각 격점력에 대한 주거더와 횡거더와의 변위 적합조건을

이용한 격자해석 프로그램을 작성하여 직선격자교는 Leonhardt<sup>(16)</sup>, Szabo<sup>(8)</sup>, FEM과 비교 하였고, 곡선 격자교는 양창현<sup>(17)</sup>, 정진환<sup>(18)</sup>과 비교 한후 프로그램의 타당성을 검증하였다.

이러한 프로그램의 타당성을 바탕으로 직선격자교와 곡선격자교의 경사각에 대한 특성을 비교,분석 하였고, 경사각과 횡강도와 비틀림 강도의 비의 상관관계를 파악하였다. 또한, 교량설계 실무 시 경사각 직선 격자교와 경사각 곡선격자교의 특성을 이해하고, 합리적이며, 경제적인 경사각 격자교의 설계에 참고 자료를 마련하고자 한다.

## 2. 전달행렬법에 의한 격자거더이론

몇 개의 주거더를 병렬시켜 연속적으로 횡거더로 결합된 구조물을 격자교(Grillage girder bridge)라고 한다. 이와 같은 격자교는 주거더에 집중하중이 재하할 때 횡거더가 존재하므로 인접한 주거더에도 하중을 부담시킬수 있어 하중분배가 일어난다. 격자거더는 I형 거더를 사용한 것과 박스형 거더를 사용한 경우가 있는데, 주거더가 I형 거더일 경우 비틀림 강성도가 없는 격자거더로 취급하며 박스형 거더의 경우는 비틀림강도가 있는 격자 거더로 취급한다.

격자 거더를 주거더가 횡거더에 의해 탄성 지지되는 것으로 간주하여 격자 거더 내의 주거더와 횡거더를 개별 거더로 분해하고 각각의 거더에 대해 전달행렬법을 적용하여 해석하였다.

### 2.1 격간행렬

임의로 거더를 분할한 격간  $k$ 의 격간 길이  $l_k$ , 횡강도  $EI_k$ , 비틀림강도  $GK_k$ 로 하였다. 직선거더의 힘의 평형방정식은 식(1)과 같고, 곡선거더의 힘의 평형방정식은 식(2)와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\beta_k}{dl_k^2} &= -\frac{m_k}{GK_k} \\ \frac{d^4w_k}{dl_k^4} &= -\frac{q_k}{EI_k} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기서,  $\beta_k$  : 단면의 회전각,  $w_k$  : 처짐

$a_k$  : 등분포하중

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_k}{d\phi_k} + T_k &= Q_k R_{Dk} \\ \frac{dT_k}{d\phi_k} &= M_k \\ \frac{dQ_k}{d\phi_k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서,  $M_k$  : 휨모멘트,  $T_k$  : 비틀림모멘트

$Q_k$  : 전단력,  $\phi_k$  : 중심각,

$R_{Dk}$  : 곡률반경

식(1)과 변위와 단면력의 관계<sup>(19)</sup>를 라플라스 변환하여 미분방정식을 풀어 정리하여 격간  $k$ 의 무차원화된 직선거더의 격간행렬을 구하면 식(3)과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{1,3}^* & a_{1,4}^* & 0 & a_{1,6}^* & a_{1,7}^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{2,5}^* & 0 & a_{2,7}^* \\ 0 & 0 & 1 & a_{3,4}^* & 0 & a_{3,6}^* & a_{3,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{4,6}^* & a_{4,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{5,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{6,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$a_{1,3}^* = -I/I_c = -a_{4,6}^*$$

$$a_{1,4}^* = -(1/2) \cdot (I/I_c)^2 \cdot (I_c/D)$$

$$a_{1,6}^* = -(1/6) \cdot (I/I_c)^3 \cdot (I_c/D)$$

$$a_{2,5}^* = (I/I_c) \cdot (EI_c/GK)$$

$$a_{3,4}^* = (I/I_c) \cdot (I_c/D)$$

$$a_{3,6}^* = (1/2) \cdot (I/I_c^2) \cdot (I_c/D)$$

식(2)와 변위와 단면력의 관계<sup>(2)</sup>를 라플라스 변환하여 미분방정식을 풀어 정리하여 격간  $k$ 의 무차원화

된 곡선거더의 격간행렬을 구하면 식(4)과 같이 된다.

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}^* & a_{1,3}^* & a_{1,4}^* & a_{1,5}^* & a_{1,6}^* & a_{1,7}^* \\ 0 & \cos\phi_k & \sin\phi_k & a_{2,4}^* & a_{2,5}^* & a_{2,6}^* & a_{2,7}^* \\ 0 & -\sin\phi_k & \cos\phi_k & a_{3,4}^* & a_{3,5}^* & a_{3,6}^* & a_{3,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi_k & -\sin\phi_k & a_{4,6}^* & a_{4,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi_k & \cos\phi_k & a_{5,6}^* & a_{5,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{6,7}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$a_{1,2}^* = \frac{R_{Dk}}{R_c} (1 - \cos\phi_k) = a_{5,6}^*$$

$$a_{1,3}^* = -\frac{R_{Dk}}{R_c} \sin\phi_k = -a_{4,6}^*$$

$$a_{1,4}^* = \frac{g_k}{2\alpha_c} \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right)^2 \{ (1 + \alpha_k)\phi_k \sin\phi_k + 2\cos\phi_k - 2 \} = -a_{3,6}^*$$

$$a_{1,5}^* = \frac{1 + \alpha_c}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right)^2 \cdot (\phi_k \cos\phi_k - \sin\phi_k) = a_{2,6}^*$$

$$a_{1,6}^* = \frac{g_k}{2\alpha_c} \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right)^3 \{ (\alpha_k - 1)\sin\phi_k - (\alpha_k + 1)\phi_k \cos\phi_k \}$$

$$a_{2,4}^* = -\frac{1 + \alpha_c}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right) \phi_k \sin\phi_k = -a_{3,5}^*$$

$$a_{2,5}^* = \frac{1}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right) \{ (\alpha_k - 1)\sin\phi_k - (\alpha_k + 1)\phi_k \cos\phi_k \}$$

$$a_{3,4}^* = \frac{1}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right) \{ (1 - \alpha_k)\sin\phi_k - (\alpha_k + 1)\phi_k \cos\phi_k \}$$

여기서, 식(3)과 식(4)에서 제7렬째  $f_{i,7}^*$  ( $i=1\sim6$ )는 하중항<sup>(19)</sup>이다. 직선거더와 곡선거더의 임의의  $k$ 격간의 좌단의 상태 벡터량을  $y_{0k}^*$ , 우단의 상태 벡터량을  $y_{lk}^*$ 로 하면 식(5)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} y_{0k}^* &= \{ \omega_{0k}^*, \beta_{0k}^* \rho_{0k}^*, M_{0k}^*, T_{0k}^*, Q_{0k}^* 1 \} \\ y_{lk}^* &= \{ \omega_{lk}^*, \beta_{lk}^* \rho_{lk}^*, M_{lk}^*, T_{lk}^*, Q_{lk}^* 1 \} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 정리하면 식 (6)과 같이 된다.

$$y_{lk} = F_k^* y_{0k}^* \quad (6)$$

여기서,  $F_k^*$  : 격간행렬

직선거더와 곡선거더의 격점  $k$ 의 우단과  $k+1$  격점의 좌단의 상태 벡터량은 각각 식 (3)와 식 (4)로부터 격간행렬  $F_k^*$ 와  $P_k^*$ 를 식 (7)와 같이 순차적으로 곱하여 구할 수 있다.

$$y_{lk+1} = P_k F_k P_{k-1} F_{k-1} P_{k-2} \cdots F_2 P_1 F_1 y_{L,1} \quad (7)$$

여기서,  $P_k^*$  : 격점에 작용하는 하중의행렬

## 2.2 격자교의 해석

격자교의 대표적인 사항은 Fig. 3과 같은 2박스거더교이며, 이와 같은 구조물은 2상자 거더의 단면전체(전단중심  $D$ )에 대한 비틀림 정수비가 30이하 일경우 휨 비틀림이론에 의한 엄밀한 해석이 필요하지만, Fig. 1과 같이 격자교로 치환하여 해석하였다. 각 주거더  $G_1$  및  $G_2$ 의 전단중심은  $D_1, D_2$ 이고, 주거더는 휨강성도  $EI_1, EI_2$  및 비틀림강성도  $GK_1, GK_2$ 를 갖게 되고, 횡거더의 휨강성도  $EI_Q (= EI_Q^* (a^*/a)^3, I_Q^*$  : 횡거더의 단면2차모멘트,  $a^*$  : 주거더 간격,  $a$  : 횡거더 간격)의 횡거더로 연결되어 있는 휨과 비틀림이 작용하는 격자교로 간주할 수 있다.

또한, 2상자 거더 단면에 작용하는 하중은 각 주거더  $G_1$  및  $G_2$ 에 휨모멘트  $M_1, M_2$  및 비틀림 모멘트  $T_1, T_2$ 와 전단력  $S_1, S_2$ 로 분배되어 산정하게 된다. 이와 같이 해석하여 얻어진 각 주거더의 부재력 중에는 구조물 전체에 생기는 휨 모멘트, 비틀림의 영향이

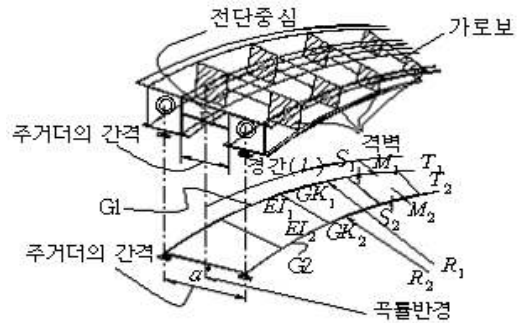


Fig. 1 격자교의 모델

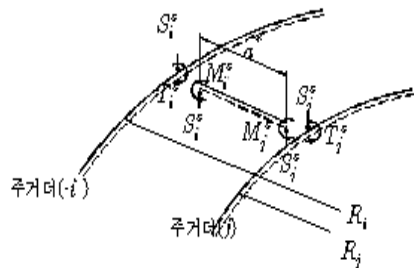


Fig. 2 격자교의 단면력

분담되어 구해져 있으므로 구조물전체를 하나의 보요소로 해석한 결과와 격자교로 해석한 결과는 결국 같게 된다.

격자교의 해석순서는 각각의 주거더  $G_1, G_2$ 를 2.1에서 언급한 전달행렬법으로 해석을 하였고, 주거더와 횡거더의 결합점  $i$  또는  $j$ 에는 Fig. 2와 같이 격점력  $T_i^s, S_i^s$  또는  $T_j^s, S_j^s$ 가 생긴다. 여기서 주거더의 격점  $k$ 가 점  $i$ 에서 횡거더와 결합하게 되어  $P_{Rk}$ 는 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$P_{Rk} = \begin{matrix} T_i^s & S_i^s \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 1 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 1 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \end{matrix} \quad (8)$$

횡거더는 직선 휨부재가 되고, 주거더와의 결합점에서 각각  $M_i^s, S_i^s$  또는  $M_j^s, S_j^s$ 의 부정정력이 생기며, 횡거더의 격점  $k$ 가 점  $i$ 에서 주거더와 결합한다면 식 (9)와 같이  $P_{Rk}$ 는 나타내게 된다.

$$P_{Rk} = \begin{matrix} M_i^s & S_i^s \\ \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \dots -1 & 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & -1 \dots\dots \\ \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \end{array} \right\} \end{matrix} \quad (9)$$

2개 주거더와 횡거더와의 결합점에서 생기는 8개의 미지 부정정력에 대해 우선 격점  $i$  및  $j$ 에서 주거더와 횡거더와의 부정정력의 관계를 구하면 식 (10)과 같이 된다.

$$\left. \begin{array}{l} T_i^s = M_i^s \\ S_i^s = S_i^s \\ T_j^s = M_j^s \\ S_j^s = S_j^s \end{array} \right\} \quad (10)$$

또한, 각각 격점에 대한 변위의 적합 조건식에서 식 (11)과 같은 관계식이 된다.

$$\left. \begin{array}{l} w_{li} = w_{li'} \\ \beta_{li} = -\phi_{li'} \\ w_{lj} = w_{lj'} \\ \beta_{lj} = \beta_{lj'} \end{array} \right\} \quad (11)$$

주거더와 횡거더의 결합점에서 제각기 식 (10) 및 식(11)을 만족할 수 있게 하면 격자교의 전체를 해석하는 것이 된다.

### 3. 프로그램의 검증

#### 3.1 직선거더 격자교

Fig. 3과 같이 직선거더 격자교의 스패ん길이 24m, 주

형 6개, 횡거더 5개로 이루어진 단순지지 격자 거더에 대해서 전달행렬법으로 영향선을 계산하여 Leonhardt, Szabo, FEM등과 비교, 분석 하였다.

· 횡거더의 제원

$$m = 5, \quad I_x = 0.000781395m^4, \quad a_x = 4m, \\ E = 2.1 \times 10^7 t/m^2$$

· 주거더의 제원

$$m = 6, \quad I_x = 0.00195348m^4, \quad a_x = 1.8m, \\ E = 2.1 \times 10^7 t/m^2$$

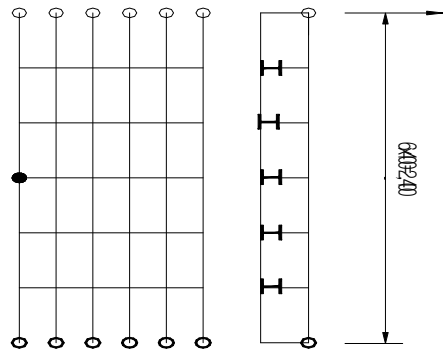
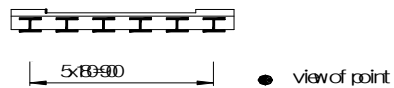


Fig. 3 직선거더 격자교의 해석모델

Table 1 휨모멘트의 영향선(Szabo)<sup>(8)</sup>

주거더 횡거더	1	2	3	4	5	6
1	0.947	0.788	0.548	0.234	-0.103	-0.434
2	2.049	1.584	0.973	0.356	-0.211	-0.751
3	3.579	2.094	1.086	0.367	-0.260	-0.865
4	2.049	1.584	0.973	0.356	-0.211	-0.751
5	0.969	0.788	0.548	0.234	-0.103	-0.434

Table 2 휨모멘트의 영향선(FEM)

주거더 횡거더	1	2	3	4	5	6
1	1.034	0.767	0.485	0.201	-0.925	-0.392
2	2.032	1.54	1.005	0.418	-1.915	-0.808
3	3.277	2.248	1.315	0.483	-0.289	-1.035
4	2.033	1.544	1.005	0.418	-1.915	-0.808
5	1.040	0.761	0.484	0.200	-0.925	-0.392

Table 3 휨모멘트의 영향선(TMM)

주거더	휨거리					
휨거리	1	2	3	4	5	6
1	1.034	0.767	0.485	0.201	-0.925	-0.392
2	2.033	1.544	1.005	0.4183	-1.915	-0.808
3	3.277	2.248	1.315	0.483	-0.289	-1.035
4	2.033	1.544	1.005	0.418	-1.915	-0.808
5	1.040	0.761	0.484	0.201	-0.925	-0.392

Leonhardt의 이론으로 계산된 휨거리 3의 휨모멘트의 종거를 계산에서 중앙 휨거리의 등가 단면2차 모멘트  $I'$ , 가상 격자 거더의 휨 격자 강도  $Z'$ 는 각각 식 (12), 식 (13)로 구해진다.

$$I' = 2.0 I_Q = 2.0 \times 0.000195348 m^4 = 0.000390696 m^4 \quad (12)$$

$$Z' = \frac{I'}{I} \left( \frac{I}{2a} \right)^3 = iZ = \frac{0.000390696}{0.000781395} \times \left( \frac{24}{2 \times 1.8} \right)^3 = 148.148 \quad (13)$$

휨분포 계수는  $q_{kr}$ 를 Leonhardt<sup>(16)</sup>표에 따라 계산하여 휨 모멘트의 종거를 구하여 정리하면 Table 4와 같이 된다.

Table 4 휨모멘트의 영향선(Leonhardt)

주거더	휨거리					
휨거리	1	2	3	4	5	6
3	3.330	2.250	1.292	0.453	-0.296	-1.002

휨거리 3의 휨모멘트의 종거를 전달행렬법에 의한 방법과 3가지 방법에 의하여 결과의 차이를 Table 5에 나타내었다.

Table 5 휨거리 3지점의 결과비교(%)

	1	2	3	4	5	6
Szabo	9.20	6.80	17.44	24.55	10.00	16.45
FEM	0.003	0.003	-	-	0.003	0.003
Leonhardt	1.62	0.11	1.73	6.18	2.28	3.18

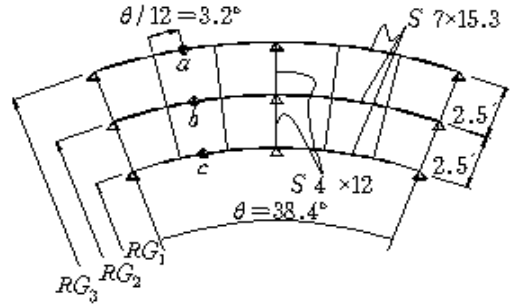


Fig. 4 경간 격자교의 해석모델

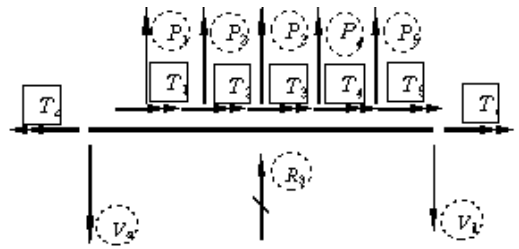


Fig. 5 주거더의 반력 및 여항력

전달행렬법에 의한 결과와 다른 방법에 의한 휨거리 3의 휨모멘트 종거와 비교한 결과 Szabo에 의한 방법이 9.20~24.55% 차이가 발생하였고, 다른 방법에 비해 가장 많은 차이가 발생하였다. 전달행렬법과 FEM의 방법은 거의 일치하였고, 0.003%의 차이가 발생하는데 이러한 차이는 전달행렬법의 순차적인 곱에 의한 차이로 판단된다. 또한, Leonhardt 의한 방법은 1.63~6.18%의 차이를 보였고 특히, 4주형에서 차이가 크게 발생하였다. 따라서, Szabo의 방법을 제외한 다른 방법과 비교하여 좋은 결과를 얻었으며, 전달행렬법에 대한 프로그램의 신뢰성이 검증된 것으로 판단된다.

### 3.2 곡선거더 격자교

Fig. 4와 같이 양창현<sup>(17)</sup>과 정진환<sup>(18)</sup>이 해석한 2경간 연속 곡선 격자교를 선택하여 해석을 하였다. 주거더 사이의 간격은 2.5 (0.762m)이고, 곡률반경은 각각  $R_1 = 32.6'$ ,  $R_2 = 30.1'$ ,  $R_3 = 27.6'$ 이다.

전체의 중심각은  $\theta = 38.4^\circ$  이고, 횡거더는  $\theta = 6.4^\circ$  의 간격으로 배치되어 있으며, 주거더( $S7 \times 15.3$ )과 횡거더( $S4 \times 7.7$ )의 단면계수들은 Table 6과 같다. 하중상태는  $a, b, c$  지점에 각각 10 kips을 작용하였다.

Table 6 단면의제원

	$K_x(\text{in}4)$	$I_x(\text{in}4)$	$I_w(\text{in}6)$	Remarks
주거더	0.241	36.7	28.8	$E = 29000 \text{ ksi}$
횡거더	0.073	6.08	2.62	$G = 11200 \text{ ksi}$

Table 7 주거더(G1)의 반력 및 여항력의 결과

	하중재하		
	Yang	Jung	T.M.M (Difference(%))
$T_a$	-1.1906	-1.1818	-1.1869 (0.3117/0.4297)
$V_a$	1.2983	1.2988	1.3625 (4.7119/4.6752)
$R_3$	6.9183	6.9178	6.9158 (0.0406/0.0289)
$P_1$	0.1945	0.1942	0.1951 (0.3075/0.4613)
$P_2$	0.4270	0.4272	0.4299 (0.6746/0.6280)
$P_3$	0.4478	0.4481	0.4702 (4.76391/4.7001)
$P_4$	-0.5845	-0.5844	-0.5945 (1.6820/1.6989)
$P_5$	-0.8174	-0.8172	-0.8291 (1.4111/1.4353)

Table 8 주거더(G2)의 반력 및 여항력의 결과

	하중재하		
	Yang	Jung	T.M.M (Difference(%))
$T_a$	-0.8776	-0.8751	-0.8557 (2.5593/2.2671)
$V_a$	0.9603	1.0128	0.9856 (2.5670/2.7500)
$R_3$	7.1492	7.1507	7.1656 (0.2288/0.2078)
$P_1$	0.0460	0.0463	0.0464 (0.8621/0.2155)
$P_2$	0.0122	0.0124	0.0112 (2.5210/4.2016)
$P_3$	-0.1181	-0.1181	-0.1246 (3.0541/3.0541)
$P_4$	-0.1111	-0.1115	-0.1112 (0.0899/0.2697)
$P_5$	-0.0773	-0.0789	-0.0791 (2.2756/2.2528)

곡선교 격자구성은 54개의 미지수를 가지고 있으며, 그 중 15개는 세 개의 주거더 곡선교에 대한 적분 상수의 값이며, 나머지는 Table 7~Table 8에 나타내었다. Table 7에서 주거더(G1)의 반력( $V_a$ )은 양창현과 정진환의 결과와 비교하면 각각 4.7119%, 4.6752% 차이가 있었다. 주거더(G1)에서 여항력( $P_3$ )은 양창현과 정진환의 결과와 비교하면 4.76391%, 4.7001% 차이가 있었다.

또한, Table 8에서 주거더(G2)의 반력( $T_a$ )은 양창현과 정진환의 결과와 비교하면 각각 2.5593%, 2.2671% 차이가 있었다. 주거더(G2)에서 여항력( $P_3$ )은 양창현과 정진환의 결과와 비교하면 각각 3.0541%, 3.0541% 차이가 있었다.

Table 9에서 주거더(G3)의 반력( $V_a$ )은 양창현과 정진환의 결과와 비교하면 각각 4.2621%, 4.2266% 차이가 있었다. 주거더(G3)에서 여항력( $P_3$ )은 양창현과 정진환의 결과와 비교해 본 결과 각각 4.6007%, 4.4850% 차이가 있었다.

대체적으로 전달행렬법과 양창현의 변위법과 정진환의 응력법은 2%이내의 차이를 보였고, 지점부의 차이는 다른 절점부에 비해서 차이가 크게 나타났다. 전달행렬법으로 곡선격자교 내의 주거더 및 횡거더 모두를 개별형으로 분해하고, 주거더와 횡거더의 결합점에 작용하는 격점력을 미지량으로 계산에 도입하여 각 격점

Table 9 주거더(G3)의 반력 및 여항력의 결과

	하중재하		
	Yang	Jung	T.M.M (Difference(%))
$T_a$	-0.5276	-0.5250	0.5122 (3.0066/2.4990)
$V_a$	0.5871	0.5869	0.5631 (4.2621/4.2266)
$R_3$	6.7275	6.7287	6.7409 (0.1988/0.1810)
$P_1$	-0.2400	-0.2405	-0.2415 (0.6211/0.4140)
$P_2$	-0.4392	-0.4396	-0.4411 (0.4307/0.3401)
$P_3$	-0.3297	-0.3301	-0.3456 (4.6007/4.4850)
$P_4$	0.6955	0.6959	0.7057 (1.4454/1.3887)
$P_5$	0.8947	0.8962	0.9082 (1.4865/1.3213)

력에 대한 주거터과 횡거터의 변위 적합조건을 만족하게 해석을 할 수 있었다.

#### 4. 수치해석 및 결과분석

##### 4.1 경사각 격자교의 해석

최근 곡선 도로교는 도로의 선형이나 입지조건상 경사각을 갖는 교량으로 설계되는 경우가 많지만, 이 경우 하중이 편심 재하를 받지 않을 경우 각 교좌장치에 발생하는 지점반력이 각각 다르므로, 부재는 항상 비틀림 작용을 받는다. Fig. 6에서 직선 격자교와 곡선 격자교에 각각 사면의 45°가 되는 교량을 서로 비교하였다. 하중은 전 부재에 등분포하중  $1\text{ tf}/m$ 를 작용 시켰고, 단위하중은 지간의 중앙부에  $1\text{ tf}$ 을 작용 시켰다.

Table 10~Table 11에서 반력은 내측보(G1)보다 크게 발생하는 경향을 보였다. 또한, 곡선교의 외측보(G2)에서 크게 나타나는 경향을 보였다.

곡선교의 Fig. 6(b-1)와 Fig. 6(b-3)를 비교하면 G1은 35~41%정도 부반력이 증가하였고, G2는 18~21%로 증가하는 경향을 보였다. Fig. 6(b-1)와 Fig. 6(b-3)에서 직선교는 G1에서 40~81%정도 변화하였고, G2에서 41~53%정도가 되어 증가하는 경향을 보였다.

곡선교의 반력은 직선교에 비해 G2는 크게되고 G1에 작아지는 경향이 나타났기 때문에 G1에 부의 반력이 생긴 것으로 판단되며, 특히, 곡률반경이 작아질 경우일 때 부의 반력이 더욱 생기기 쉬운 것으로 판단된다. 휨모멘트는 대체로 G1보다 G2에서 크게 발생하는 경향을 보였다.

곡선교의 Fig. 6(b-1)와 Fig. 6(b-3)를 비교하면 G1은 30~33%정도 감소하였고, G2는 30~47%로 증가하는 경향을 보였다. 직선교의 Fig. 6.(b-4)와 Fig. 6.(b-6)를 비교하면 G1은 15~21%정도 감소하는 경향을 보였고, G2에서 15~25%정도 감소하는 경향을 보였다.

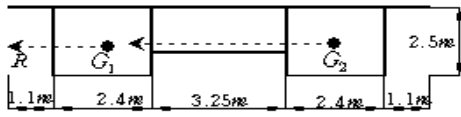
Table 10 단위등분포하중 재하의 단면력

Type		Reaction (tf)		Bending moment ( $\text{tf} \cdot m$ )		St. Ven. torsion ( $\text{tf} \cdot m$ )	
		G1	G2	G1	G2	G1	G2
Curved bridges	Fig(b-1)	-20.42	73.22	369.94	408.61	127.20	117.94
	Fig(b-2)	-2.03	55.46	279.85	321.87	74.99	80.89
	Fig(b-3)	-34.56	89.63	278.31	278.06	213.17	193.86
Linear bridges	Fig(b-4)	25.00	25.00	312.5	312.5	0.00	0.00
	Fig(b-5)	27.82	22.17	316.00	316.99	10.95	14.82
	Fig(b-6)	-7.03	42.98	258.72	250.22	63.51	63.39

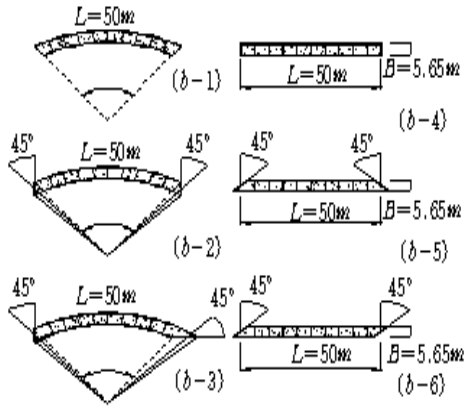
Table 11 단위하중 재하의 단면력

Type		Reaction (tf)		Bending moment ( $\text{tf} \cdot m$ )		St. Ven. torsion ( $\text{tf} \cdot m$ )	
		G1	G2	G1	G2	G1	G2
Curved bridges	Fig(b-1)	-0.80	1.80	13.71	15.11	3.67	3.40
	Fig(b-2)	-0.35	1.35	10.95	12.43	2.38	2.43
	Fig(b-3)	-1.23	2.28	10.51	11.69	6.12	5.54
Linear bridges	Fig(b-4)	0.50	0.50	12.50	12.50	0.00	0.00
	Fig(b-5)	0.50	0.50	12.49	12.51	0.22	0.30
	Fig(b-6)	-0.07	1.07	10.88	10.88	1.79	1.78





(a) 2경간 상자거더교의 단면



(b) 2경간 상자거더교의 평면

Fig. 6 2경간 상자거더의 해석모델

비틀림은 대체로 외측보(G2)보다 내측보(G1)에 Fig. 6(b-1)와 Fig. 6(b-3)에서 비교하면 G1은 40% 정도 증가하였고, G2는 38~39%로 증가하는 경향을 보였다. 직선교에서는 G1은 1.79~63.51%정도 증가하는 경향을 보였고, G2에서 1.78~63.39%정도 증가하는 경향을 보였다. 특히, 직선교에서 Fig. 6(b-4)와 같이 사면의 경사각이 없을 경우에는 비틀림이 발생을 하지 않았다.

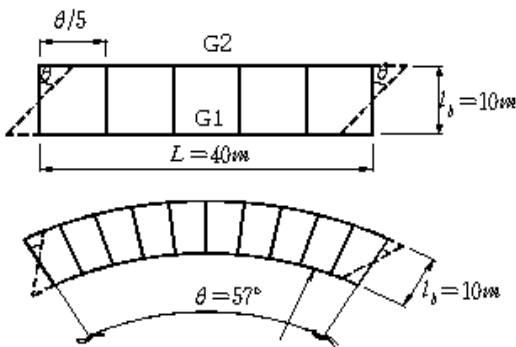


Fig. 7 경사각과 휨 비틀림강도의비에 따른 직선 및 곡선 격자교

곡선 격자교는 응력이 직선교와는 달리 G2에 가중되고, 큰 응력이 작용하므로 G2의 강성도를 크게 하면 더욱 응력도 커져 주거터 단면은 조화를 잃을 수도 있다. 이때는 내부의 강성도를 늘려서 G2의 응력이 경감되도록 설계 하는 것이 전체의 자중을 적게 할 수 있을 것으로 판단된다. 따라서, 곡선교에 연직하중이 작용하면 곡률 때문에 휨모멘트와 비틀림 모멘트가 연속적으로 발생하고 서로 관련성을 갖고 있으며, 응력분포가 균등하지 않고, G2에 많이 작용하게 된다. 이것은 비틀림에 의한 영향이므로 교량 전체로서 비틀림 강도를 크게하는 것이 응력 분포의 부회를 막을 수 있을 것으로 판단된다.

## 4.2 경사각 격자교의 특성에 관한 해석

일반적으로 경사각이 큰 사교(Skew bridge)로 도로 폭이 좁을 경우에는 비틀림 강성도가 큰 단일 상자 거더를 사용하나 폭이 넓은 경우에는 격자 상자거더를 사용하는 것이 바람직하다. 상자 거더를 사용하는 경우 휨 비틀림의 영향이 작다는 것은 잘알려져 있기 때문에 무시하고 단순비틀림을 받는 사항으로 취급하였다.

경사각 격자교(Skew girder bridge)의 정역학적 특성은 휨과 비틀림이 동시에 작용하며, 경사각( $\theta$ ), 휨강도와 비틀림강도의 비 등의 함수로서 주어지므로 경사각 직선 격자교와 경사각 곡선 격자교를 대상으로 하여 매개변수에 따른 해석을 수행하였다.

Fig. 7에서와 같이 지점부와 중점부의 경사각과 경사각 교량의 휨강도와 비틀림강도의 비에 변화를 주었고, 하중은 단위등분포하중을 G1, G2 전 구간에 걸쳐서 재하 하였으며, 단위집중하중은 G1, G2의 경간의 중앙부에 재하 하였다.

Fig. 8~Fig. 9에서 경사각 직선교의 휨모멘트를 나타내고 있으며, 경사각이 적어짐에 따라 최대 휨모멘트는 감소하는 경향이 나타났고, 휨강도와 비틀림강도의 비가 커짐에 따라서 최대모멘트도 증가하는 경향이 나타났다. 90°와 75°의 경사각 변화에서는 휨모멘트(G1,G2)의 차이가 3~7%정도로 나타나는 것으로 각도의 영향이 부재력에 미치는 영향은 작은 것으로 나타났으나, 75°이하에서 급격히 휨모멘트의 값이 감소하는 양상을 나타냈다.

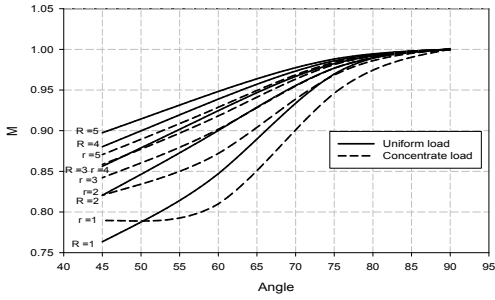


Fig. 8 경사각과 강도비에 따른 모멘트와 관계(G1)

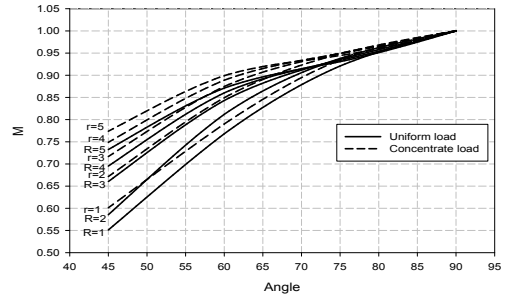


Fig. 12 경사각과 강도비에 따른 모멘트와 관계(G2)

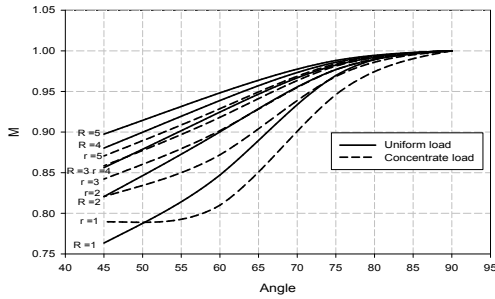


Fig. 9 경사각과 강도비에 따른 모멘트와 관계(G2)

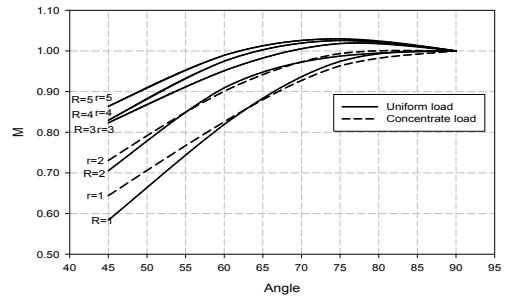


Fig. 13 경사각과 강도비에 따른 모멘트와 관계(G2)

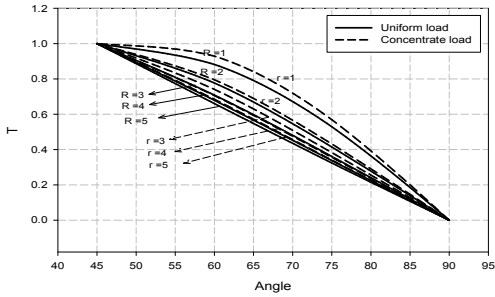


Fig. 10 경사각과 강도비에 따른 비틀림와 관계(G1)

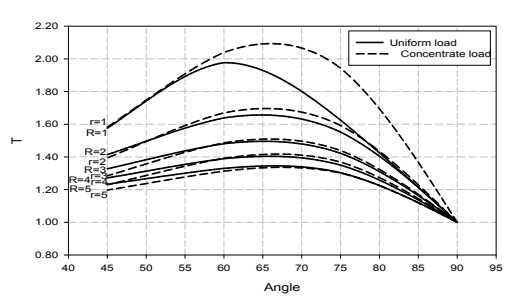


Fig. 14 경사각과 강도비에 따른 비틀림와 관계(G1)

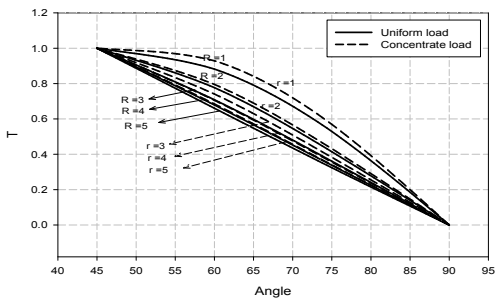


Fig. 11 경사각과 강도비에 따른 비틀림와 관계(G2)

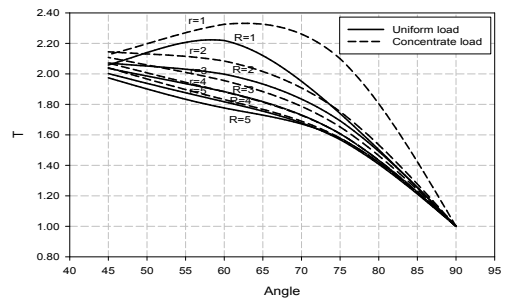


Fig. 15 경사각과 강도비에 따른 비틀림와 관계(G2)

Fig. 10~Fig. 11에서 경사각 직선교의 비틀림을 나타내고 있으며, 휨강도와 비틀림강도의 비에서는  $r=2$  (단위하중),  $R=2$ (등분포하중)이하에서 급격히 감소하여 45°에서 모든 휨강도와 비틀림강도의 비가 최대로 감소하는 양상을 나타냈다.

Fig. 12~Fig. 13에서 경사각 곡선교의 휨모멘트를 나타내고 있으며, G1에서 경사각이 적어짐에 따라 휨모멘트는 감소하는 경향이 나타났으나, G2에서는 65°까지 휨모멘트가 증가하다가 감소하는 경향을 나타내고 있다. 이는 곡률반경이 G1 보다 G2가 작아짐으로써 나타나는 것으로 판단되며, 경사각 곡선교에서의 곡률반경의 영향을 반영한 것으로 판단된다.

휨강도와 비틀림강도의 비가 커짐에 따른 휨모멘트도 감소하는 경향이 나타났지만, G1에서  $r=3$ ,  $R=3$  이상에서 일 경우 비틀림은 경사각이 적어짐에 따라 나타나는 양상이 경사각 직선교와는 달리 커졌다가 다시 감소하는 경향을 보였고, G2는 커지는 양상을 보여주고 있다.

G2에서는 직선교와는 달리 사면 각도 변화가 60° 이하에서 급격히 휨모멘트의 값이 감소하는 양상을 나타냈다. 또한, G1,G2의 휨강도와 비틀림강도의 비에서는  $r=3$ (단위하중),  $R=3$ (등분포하중)일 때 급격히 감소하여 45°에서 모든 휨강도와 비틀림강도의 비가 최대로 감소하는 양상이 나타났다.

Fig. 14~Fig. 15에서 경사각 곡선교의 비틀림을 나타내고 있으며, 비틀림은 G1에서는 직선교와는 달리 60°~65°까지 최대로 나타났다가 다시 감소하는 경향을 나타내었고, G2에서는  $r=1$ ,  $R=1$ 은 60°~65°까지 최대로 되었다가 다시 감소하는 경향을 보였으나,  $r=2\sim r=5$ ,  $R=2\sim R=5$ 에서는 45°에서 최대로 발생하는 양상을 보였다.

## 5. 결론

본 연구에서는 직선교와 곡선교의 평형 방정식으로부터 구한 미분방정식을 라플라스 변환하여 격간행렬과 절점의 연속 조건식을 고려한 격점행렬을 이용한 전달행렬법을 사용하여 경사각 격자교에 대하여 해석하였다. 프로그램에 따른 해석을 하여 다음과 같은 결

론을 얻었다.

본 연구에서 작성한 전달행렬법에 의한 격자교의 프로그램은 Leonhardt, Szabo, FEM, 양장현 및 정진환과 해석결과를 비교하여 5% 이내의 차이가 나타났고, 이는 전달행렬법의 특성인 순차적인 행렬의 곱에서 비롯된 것으로 판단되며 프로그램의 신뢰성이 검증되었다. 특히, 다른 방법에 비해 이론체계가 알기쉬워 구조해석법으로 범용성이 있을 것으로 판단된다.

곡선 격자교는 직선 격자교와는 달리 외측보에 큰 응력의 작용이 가중되므로 강성도를 크게 하면 응력도 커져 주거더 단면의 조화를 잃을 수 있다. 이를 경우 내측부의 강성도를 늘려서 외측보의 응력이 경감되도록 설계하는 것이 전체적으로 응력의 부조화를 막을 수 있을 것으로 판단된다.

경사각 직선교에서는 경사각이 작아질수록 내측보와 외측보의 모멘트는 작아지고, 45°일 때 최소 값을 보였다. 비틀림은 모멘트와 상반관계를 보였고, 45°일 때 최대 값을 보였다. 또한, 경사각 곡선교에서는 내측보와 외측보의 모멘트는 경사각 직선교와 같이 45°일 때 최소 값을 보였으나, 비틀림은 내측보에서 60°~65°에서 최대 값을 보였다.

즉, 경사각 곡선교는 휨과 비틀림의 작용을 동시에 받는다는 것을 알 수 있고, 이러한 점에서 경사각 직선교와 현저하게 다르다는 것을 알 수 있다. 또한, 교량설계 실무자는 경사각 직선교와 경사각 곡선교의 특성을 잘 이해하고, 합리적이고, 경제적인 설계를 진행하여야 된다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 경남대학교 2004년 학술논문게재 연구비에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. 정진환, 曲線 프리스트레스 콘크리트 의 靜的 彈性解析, 서울대학교 공학박사 학위, 1985.
2. Hiroshi Nakai, Chai Hong Yoo, Analysis and Design of Curved Steel Bridges, McGrall-Hill Book Company, pp9-168, 1988.

3. 成岡昌夫, 遠田良喜, 傳達 マトリックス法, 培風館, 1970.
4. 김용희, 이윤영, 전달행렬법에 의한 격자거더교의 영향선 해석, 경남대학교 부설 공업기술연구소 연구논문집, Vol. 21, No.2, 2003.
5. 김용희, 이윤영 전달행렬법에 의한 변단면 곡선 상자형 거더교의 정적해석, 한국구조물진단학회 논문집, Vol. 7, No.4, 2003.
6. Woinnowsky-Krieger, S., Zur Theorie Schiefwinkliger-Tragerrste, Ingenieur-Archiv, Vol.126, 1957.
7. Naruoka, M., Hirai, K, A Study on Composite Grillage Girder Bridge, Technical Report, Vol.13. Engineering Research Institute, Kyoto of Uni., 1956.
8. Szabo, j., Die Berechnung von Brucken-Trag-erosten, Stahlbau, Vol. 27, 1958.
9. Hendry, A. W., The Analysis of Interconnected Bridge Girders by Distribution of Harmonics, Structural Engineer, Vol. 43, 1965.
10. Hiba, Z., Beitrag zur Statik des drillweichen Tragerrostenm, Stahlbau, Vol. 29, 1960.
11. Goldstein, A., Analysis of a Three-span Continuous Grillage Having Varying Section Properties, Structural Engineer, Vol 39, 1960
12. Basole, M. M., Analysis of inter-Connected Beams, Cement and Concrete, Vol 9, 1969.
13. Clarkson, J., The Elastic Analysis of Flat Grillages, Uni. of Cambridge Press , 1965.
14. Lee, S. L., Makino, M., Analysis of Corner-Supported Grillages, IABSE, Vol. 20, 1960.
15. van Langeddonck, T., Gridworks Skew Bridge, IABSE, Vol. 26, 1966.
16. Leonhardt, F.m Die vereinfachte Tragerrostbe-rechnung, 2 Aufl., 1950
17. Yang, C. H., Analytical Investigation of Horizontally Curved Girder System, Ph. D, Dissertation, Alabama of Univ., 1972.
18. Timoshenko., Uber Die Biegung von Tragerr-osten, ZAMM, Vol. 13, 1933.
19. Hetenyi, A Method of Calculating Grillage Beam, Contributions to the Mechanics of Solid, Macmillan, 1938.
20. Melan, E., Schindler, R., Die genaue Berechn-ung von Tragerrosten, Springer. 1942.
21. Kloppe, K., Zur Berechnung des Tragerrosten, Stahlbau, 1942.
22. Guyon, Y., Calcul des ponts larges a poutres mutiples solidarisees par des entrefoises, Ann. Ponts Chaussees France, Vol. 166, 1946.

(접수일자 : 2004년 7월 23일)