# 가변모수를 갖는 EWMA 관리도

이재헌*† · 한정희*

* 중앙대학교 수학통계학부

# EWMA Control Charts with Variable Parameter

Jaeheon Lee*† · Jung Hee Han*

* Faculty of Math-Statistics, Chung-Ang University

Key Words : EWMA Chart, Variable Parameter, Variable Sampling Rate, Variable Weight

## Abstract

Variable sampling rate(VSR) scheme varies the sampling rate for the current sample depending on the previous value of the control statistic. In this paper, we propose EWMA control charts with variable parameter(VP) scheme, which allows both the sample rate(the sample size or the sampling interval) and the weight to vary. We investigate the effectiveness of the VP scheme relative to the fixed parameter(FP) scheme and the VSR scheme in EWMA control charts. It is shown that using the VP scheme gives some improvements to the ability in detecting small and moderate shifts in the process normal mean.

## 1. 서 론

통계적 공정관리(statistical process control; SPC)에서 관리도(control chart)는 공정 변동의 원인이 되는 공정 모수의 변화를 탐지하는 도구로서 널리 사용되어 왔다. 공정모수로서 공정평균의 변화를 탐지하는 대표적인 관리도로는 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도, CUSUM(cumulative sum) 관리도, 그리고 EWMA(exponentially weighted moving average) 관리도 등이 있다. 일반적로 $\overline{X}$ 관리도는 공정평균의 큰 변화를 탐지하는데 효율적이고, CUSUM과 EWMA 관리도는 공정평균의 작은 변화를 탐지하는데 효율적이라 알려져 있다.

관리도를 사용하기 위해서는 표본크기(sample size), 표본추출간격(sampling interval), 관리한계(control limit), 그리고 기타의 관리모수 등을 지정하여야 하는데, 이러한 모수를 선정하는 과정을 관리도의 설계(design)라고 한다. 여기서 기타 모수로는 EWMA 관리도의 가중치(weight)와 CUSUM 관리도의 참고값(reference value) 등이 있다. 관리도의 설계는 통계적인 특성을 고려하여 설계하는 통계적 설계(statistical design)와 생산라인에서 발생하는 비용과 손실로 표현된 비용함수를 고려하여 설계하는 경제적 설계(economic design)로 크게 구분할 수 있다.

이와 같은 관리도의 설계에서의 전통적인 방법은 FSI(fixed sampling interval)에서 FSS(fixed sample size)를 추출하는 FSR(fixed sampling rate)을 사용하는 것이다. 이에 반하여 이전 시점의 관리통계량 값에 기초하여 현재의 표본추출비를 변화시키는 방법을 VSR(variable sampling rate) 방법이라 한다. VSR 방법에서 표본크기만을 변화시키는 것을 VSS(variable sample size) 방법이라 하고, 표본추출간격만을 변화시키는 것을 VSI(variable sampling interval) 방법이라 한다. VSS와 VSI를 동시에 적용시키는 것은 일반적으로 VSSVSI 방법이라 일컫는다. VSR 방법에 대해서 1980년대 말부터 많은 연구가 되어졌으며, 그 대표적인 것으로는 Rey-

† 교신저자 jaeheon@cau.ac.kr

※ 이 논문은 2005년도 중앙대학교 학술연구비(일반연구비) 지원에 의한 것임.

nolds et al.(1988), Runger and Montgomery(1993), Costa(1994), Prabhu et al.(1994), Park and Reynolds(1999), Arnold and Reynolds(2001), Reynolds and Arnold(2001), 그리고 Park, Lee and Kim(2004) 등이 있다.

본 논문은 표본크기와 표본추출간격 이외에 EWMA 관리도의 관리모수인 가중치를 이전 시점의 관리통계량 값에 기초하여 변화시키는 것에 대한 것이다. 즉, VSR과 VW(variable weight) 방법을 병행하는 것으로 이를 VP(variable parameter) 방법이라 칭하고, 이 VP 방법을 이용한 EWMA 관리도에 대한 절차를 제안한다. 또한 제안된 VP 방법의 수행 능력을 알아보기 위하여 VP 방법의 효율을 기존의 FP(fixed parameter) 및 VSR 방법의 효율과 비교하였다.

## 2. VP EWMA 관리도의 절차

먼저 공정에서 추출하는 관측치의 분포는 평균 $\mu$와 분산 $\sigma^2$을 갖는 정규분포 따름을 가정하고, 공정평균 $\mu$가 목표치 $\mu_0$에서 변화하는지를 탐지하기 위하여 EWMA 관리도를 사용하는 상황을 고려해 보자.

$N_t$는 시점 $t$에서의 표본크기, $H_t$는 시점 $t-1$과 $t$표본추출간격, 그리고 $\Lambda_t$는 시점 $t$에서 사용하는 가중치라 할 때 전통적인 FP EWMA 관리도에서는 $N_t$, $H_t$, 그리고 $\Lambda_t$를 고정시키지만, VP EWMA 관리도에서는 이들이 시점 $t-1$에서 추출된 표본에서 계산된 통계량에 따라 변화하게 된다.

시점 $t$에서의 표본평균을 $\overline{X}_t$, 이를 표준화시킨 표본평균을 $Z_t=\sqrt{N_t}(\overline{X}_t-\mu_0)/\sigma$라 할 때, 공정상태를 판단하는 EWMA 관리도의 통계량 $E_t$는

$$E_t=\Lambda_t Z_t+(1-\Lambda_t)E_{t-1}$$

로 정의하며, 여기서 가중치 $\Lambda_t$는 $0<\Lambda_t\le 1$의 범위를 갖는다. 표준화시킨 표본평균 $Z_t$를 사용할 경우 VSS 방법으로 인하여 매시점 마다 관리한계가 변하는 것을 방지할 수 있는 장점이 있다. 이 때 공정평균의 변화를 탐지하는 EWMA 관리도의 절차는 $E_t$가 미리 설정된 관리한계 $\pm c$를 벗어날 경우 이상상태라는 신호를 주게 되며, 이 때의 $N_t$, $H_t$, 그리고 $\Lambda_t$ 값은 이전 통계량 $E_{t-1}$에 의하여 결정된다.

표본추출간격을 나타내는 함수 $H_t$는 2개의 값을 사용하는 것이 최적의 통계적 성질을 갖는다고 알려져 있기 때문에(Reynolds and Arnold, 1989 ; Runger and Montgomery, 1993 등을 참조), 본 논문에서는 2개의 표본추출간격을 사용하고자 한다. 또한 표본크기를 나타내는 함수 $N_t$와 가중치를 나타내는 함수 $\Lambda_t$의 최적성질에 대해서는 밝혀진 것이 없지만, 간편성을 위하여 2개의 표본크기와 가중치를 사용하기로 한다.

먼저 2개의 표본크기를 사용하는 VSS EWMA 관리도에서 표본크기 $n_t$는 다음과 같이 결정한다.

$$N_t=\begin{cases} n_1, & \text{만일 } |E_{t-1}|<c_P \\ n_2, & \text{만일 } c_P\le|E_{t-1}|<c \end{cases},$$

여기서 $n_1<n_2$이고, $c_P$는 표본크기를 결정짓는 영역의 분계선(threshold limit)이다.

위의 VSS 방법에 VW 방법을 동시에 적용하는 VP 방법을 VSSVW 방법이라 칭하고, VSSVW EWMA 관리도에서 표본크기 $N_t$와 가중치 $\Lambda_t$는 다음과 같이 결정한다.

$$(N_t,\Lambda_t)=\begin{cases} (n_1,\lambda_1), & \text{만일 } |E_{t-1}|<c_P \\ (n_2,\lambda_2), & \text{만일 } c_P\le|E_{t-1}|<c \end{cases},$$

여기서 $\lambda_1<\lambda_2$이고, 편의상 분계선은 $c_P$ 하나만을 사용한다.

위의 VSSVW 방법의 기본적인 아이디어는 다음과 같이 설명될 수 있다. 즉, 시점 $t-1$에서 공정변화에 징후가 있을 것으로 판단되면, 즉 $c_P\le|E_{t-1}|<c$인 경우에는 다음 시점 $t$에서 큰 표본크기의 표본을 추출하므로 이 때 얻어진 표준화된 표본평균 $Z_t$에 대한 가중치를 그렇지 않은 경우에 비하여 더 크게 하자는 것이다. 더 큰 표본크기를 사용할 때 얻어지는 표본의 통계량에 더 큰 가중치를 사용함으로 관리도의 효율을 증진시킬 수 있을 것이라 판단된다.

2개의 표본추출간격을 사용하는 VSI EWMA 관리도에서 표본추출간격 $H_t$는 다음과 같이 결정한다.

$$H_t=\begin{cases} h_1, & \text{만일 } |E_{t-1}|<c_P \\ h_2, & \text{만일 } c_P\le|E_{t-1}|<c \end{cases}$$

여기서 $h_1 < h_2$이다.

위의 VSI 방법에 VW 방법을 동시에 적용하는 VP 방법을 VSIVW 방법이라 칭하고, VSIVW EWMA 관리도에서 표본추출간격 $H_t$와 가중치 $\Lambda_t$는 다음과 같이 결정한다.

$$(H_t, \Lambda_t) = \begin{cases} (h_1, \lambda_1), & \text{만일 } |E_{t-1}| < c_P \\ (h_2, \lambda_2), & \text{만일 } c_P \le |E_{t-1}| < c \end{cases}$$

여기서 $\lambda_1 < \lambda_2$이고, 하나의 분계선 $c_P$를 사용한다. VSIVW 방법에 대한 기본적인 아이디어는 위의 VSSVW 방법과 유사하다.

공정탐지의 시작과 이상원인의 신호 후 처음 출발은 시작에 대한 어떤 문제나 이상원인 제거 후 잘못 수정된 점이 없나를 알아보기 위하여, 큰 표본크기 $n_2$, 짧은 표본추출간격 $h_2$와 큰 가중치 $\lambda_2$를 사용하기로 한다.

이상에서 제안된 절차에서 관리한계 $c$와 분계선 $c_P$는 관리상태와 이상상태에서의 비용함수 또는 통계적 특성을 통하여 결정될 수 있다.

## 3. VP EWMA 관리도의 설계 및 효율

VP EWMA 관리도의 설계는 2개의 표본크기 $n_1$과 $n_2$(또는 2가지 표본추출간격 $h_1$과 $h_2$), 2개의 가중치 $\lambda_1$과 $\lambda_2$, 그리고 2개의 한계선 $c_P$와 $c$ 등 모두 6개의 관리모수를 결정하는 것이다. 앞에서 언급한 바와 같이 관리도의 설계는 크게 통계적 설계와 경제적 설계로 구분할 수 있지만, 이 연구에서는 통계적 효율을 고려하는 통계적 설계를 사용하기로 한다.

전통적으로 사용하는 FP 방법의 통계적 효율은 주로 ARL(average run length)로 나타내지만, VP 방법에서는 VSR 방법에서와 유사하게 다음의 측도들로 그 통계적 효율을 나타낼 수 있다. 즉, 공정의 시작으로부터 관리도가 신호를 줄 때까지의 평균표본수인 ANSS(average number of samples to signal), 평균관측갯수인 ANOS(average number of observations to signal), 그리고 평균시간인 ATS(average time to signal) 등이 그것이다. 여기서 ANSS는 ARL과 동일한 개념의 측도이며, 위의 측도들은 마르코프 연쇄(Markov chain)를 이용하여 계산할 수 있다. 매시점마다 표본크기가 변하는 VSS 관리도에서 평균표본크기는 $\bar{n} = ANOS/ANSS$, 또한 매시점마다 표본추출간격이 변하는 VSI 관리도에서 평균표본추출간격은 $\bar{h} = ATS/ANSS$로 나타낼 수 있다.

공정평균의 변화량은 편의상 $\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$로 나타내기로 한다. 관리도의 통계적 설계를 위하여 관리상태에서의 ANSS를 $ANSS_0 = 370.4$로 설정하였고, (이 값은 FP Shewhart 관리도에서 3 시그마 관리한계를 사용할 때의 값이다.) 이것은 관리상태에서 ANOS와 ATS 값이 $ANOS_0/\bar{n} = 370.4$와 $ATS_0/\bar{h} = 370.4$가 됨을 나타내는 것이다. 따라서 VP 관리도에서 관리모수들, 즉 $n_1/\bar{n}$, $n_2/\bar{n}$(또는 $h_1/\bar{h}$, $h_2/\bar{h}$), $\lambda_1$, $\lambda_2$, $c_P$, 그리고 $c$는 관리상태에서의 제약조건들을 만족시키면서 특정한 $\delta$에 대하여 $ATS_\delta/\bar{h}$가 최소가 되도록 설정할 수 있다. 변화량 $\delta$와 관리모수들이 특정한 표본크기과 표본추출간격에 의존하지 않도록 위와 같이 $\bar{n}$과 $\bar{h}$를 이용하여 조정하였다. 마르코프 연쇄를 이용하여 ANSS, ANOS, 그리고 ATS를 계산하는 과정은 부록에 기술하였으며, 최적의 관리모수를 설정하는 최적화는 편도함수(partial derivatives)에 대한 유한차분근사(finite difference approximations)를 이용한 일반화된 축소경사법(generalized reduced gradient procedure ; GRG procedure)을 사용하였다(Lasdon et al., 1978 참조).

VP EWMA 관리도, 즉 VSSVW와 VSIVW EWMA 관리도의 효율을 알아보기 위하여 FP, VSS, 그리고 VSI EWMA 관리도와 비교하였다. 주어진 $\delta$에서의 $ATS_\delta/\bar{h}$ 값을 계산하여 <표 1>과 <표 2>에 제시하였는데, <표 1>은 $\delta = 0.5$일 때, 그리고 <표 2>은 $\delta = 1.0$일 때 최적이 되도록 관리모수를 설정한 것이다.

<표 1>과 <표 2>를 살펴보면 예상한 바와 같이 VSR과 VP 방법은 FP 방법에 비하여 관리도의 효율을 크게 증진시키며, VSR 방법 중에서는 VSS 보다 VSI 방법의 효율이 더 좋은 것으로 나타났다 (EWMA 관리도에서 VSS 보다 VSI 방법이 더 효율적이라는 사실은 Reynolds와 Arnold(2001)의 연구 등을 통하여 잘 알려져 있다.). 또한 VSR과 VP 방

법을 비교해 보면 대부분의 경우 VSIVW 방법의 효율이 제일 좋은 것으로 나타났으며, $\delta$가 작은 경우 VSS(또는 VSI) 방법 대신 VSSVW(또는 VSIVW) 방법을 사용할 경우 더 빨리 공정평균의 변화를 탐지할 수 있었다. 일반적으로 VW 방법은 VSI와 병행하는 것 보다 VSS와 병행하는 것이 더 효율을 증진시키는 것으로 나타났다. VSI와 VSIVW 방법에서 짧은 표본추출간격 $h_2$는 최소값으로 제한한 0.1에서 최적값을 가졌는데, 이는 선행 연구들과 동일한 결과이다(Reynolds와 Arnold(1989)와 Park, Lee와 Kim(2004) 등을 참조).

## 4. 결 론

일반적으로 관리도에 VSR 방법을 적용시킬 경우 FSR 방법에 비하여 공정모수의 변화를 더 효율적으로 탐지할 수 있다고 알려져 있다. VSR 방법은 이전 시점의 통계량에서 공정모수의 변화의 징후가 탐지될 경우 현 시점의 표본크기를 크게 하거나 표본추출간격을 짧게 하는데, 이 때 얻은 표본의 정보는 그 가중치를 크게 하는 것이 더 타당할 것으로 생각된다. 본 논문은 이 VSR 방법에 EWMA 관리도의 가중치를 변화시키는 VW 방법을 병행하는 것에 대한 것으로, 이를 VP 방법이라 칭하고 이 방법의 효율을 알아보았다.

EWMA 관리도에서 VP 방법을 사용할 경우 기존의 VSR 방법을 사용하는 것 보다 더 효율적임을 알 수 있었고, 특히 표본크기를 변화시키는 VSS에 VW 방법을 병행하는 것이 보다 큰 효과를 얻을 수 있는 것으로 나타났다.

CUSUM 관리도의 참고값을 이전 시점의 통계량에 따라 변화시키는 VP CUSUM 관리도 또한 유사한 결과가 예상되며, 이에 대한 연구를 수행할 계획이다.

## 참 고 문 헌

[1] Arnold, J. C. and Reynolds, M. R., Jr. (2001), "CUSUM Control Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals", *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, No. 1, pp. 66-81.

[2] Costa, A. F. B.(1994), "$\overline{X}$ Charts with Variable Sample Size", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 155-163.

[3] Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain, A., and Ranter, M.(1978), "Design and Testing of Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 4, No. 1, pp. 34-50.

[4] Park, C., Lee, J., and Kim, Y.(2004), "Economic Design of a Variable Sampling Rate EWMA Chart", *IIE Transactions*, Vol. 36, No. 5, pp. 387-399.

[5] Park, C. and Reynolds, M. R., Jr.(1999), "Economic Design of a Variable Sampling Rate $\overline{X}$-Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, No. 4, pp. 427-443.

[6] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval $\overline{X}$ Control Scheme", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 164-176.

[7] Reynolds, M. R., Jr., Amin, R. W., Arnold, J. C., and Nachlas, J. A.(1988), "$\overline{X}$ Charts with Variable Sampling Interval", *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, pp. 181-192.

[8] Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J. C. (1989), "Optimal Shewhart Control Charts with Variable Sampling Intervals between Samples", *Sequential Analysis*, Vol. 8, No. 1, pp. 51-77.

[9] Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J. C. (2001), "EWMA Control Charts with Variable Sample Sizes and Variable Sampling Intervals", *IIE Transactions*, Vol. 33, No. 6, pp. 511-530.

[10] Runger, G. C. and Montgomery, D. C. (1993), "Adaptive Sampling Enhancements for Shewhart Control Charts", *IIE Transactions*, Vol. 25, No. 3, pp. 41-51.

## 부 록

VP EWMA 관리도의 ANSS, ANOS, 그리고 ATS를 계산하는 방법으로 일반적으로 마르코프 연쇄와 적분방정식 방법이 사용되는데, 본 논문에서는 마르코프 연쇄를 사용하였다.

$(x_k, v_k), k=1,2,\cdots,m$를 계속영역 $(-c, c)$에서 정의된 $m$개의 Gaussian quadrature 점과 가중치라 하면, 구간 $(-c, c)$는 다음과 같이 $m$개의 부분영역으로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 $m=121$을 사용하였다.

$$I_k=(b_k, b_{k+1}),\ k=1,\cdots,m.$$

여기서 $b_k=-c+\sum_{l=1}^{k-1} v_l$이고 $v_0=0$ 이다. 계속영역 $(-c, c)$을 제외한 영역은 $I_d$로 표기한다.

VP EWMA 관리도에 대한 마르코프 연쇄는 위에서 정의된 $m$개의 부분 영역 $I_k$에 해당되는 $m$개의 일시적 상태(transient state)를 갖는다. $i, j=1,2,\cdots,m$에 대하여

$$q_{ij}^{\delta}=\Pr\left[E_t \in I_j | E_{t-1} \in I_i, \mu=\mu_0+\delta\sigma/\sqrt{n}\,\right]$$

라 할 때, 일시적 상태의 전이확률행렬(transition probability matrix)은 $\mathbf{Q}_{\delta}=[q_{ij}^{\delta}]_{m\times m}$으로 표현되며, 전이확률 $q_{ij}^{\delta}$는 $x_i$가 부분 영역 $I_i$를 대표함을 이용하여

$$\begin{aligned} q_{ij}^{\delta} &\approx \Pr\left[E_t \in I_j | E_{t-1}=x_i, \mu=\mu_0+\delta\sigma/\sqrt{n}\,\right] \\ &= \Pr\left[b_j < \Lambda_t(Z+\sqrt{N_t/\bar{n}}\,\delta)+(1-\Lambda_t)x_i < b_{j+1}\right]. \\ &= \Phi\left[\frac{1}{\Lambda_t}(b_{j+1}-(1-\Lambda_t)x_i)-\sqrt{N_t/\bar{n}}\,\delta\right] \\ &\quad -\Phi\left[\frac{1}{\Lambda_t}(b_j-(1-\Lambda_t)x_i)-\sqrt{N_t/\bar{n}}\,\delta\right] \end{aligned}$$

로 근사시킬 수 있다. 여기서 $Z$는 표준정규분포를 따르는 확률변수이고, $\Phi(\cdot)$는 표준정규분포의 누적분포함수를 나타낸다. 또한 $\Lambda_t$는 $|x_i|<c_P$인 경우에는 $\lambda_1$이고, $c_P \le |x_i| < c$인 경우에는 $\lambda_2$가 된다.

마르코프 연쇄의 성질을 이용하면 $ANSS_{\delta}$, $ANOS_{\delta}/\bar{n}$, 그리고 $ATS_{\delta}/\bar{h}$는

$$\begin{aligned} ANSS_{\delta} &= \mathbf{s}_{\delta}'[\,\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{\delta}]^{-1}\mathbf{1}, \\ ANOS_{\delta}/\bar{n} &= \mathbf{s}_{\delta}'[\,\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{\delta}]^{-1}\mathbf{n}, \\ ATS_{\delta}/\bar{n} &= \mathbf{s}_{\delta}'[\,\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{\delta}]^{-1}\mathbf{h} \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $\mathbf{s}_{\delta}$는 크기가 $m$인 초기 확률의 벡터로서, $\delta=0$일 경우에는 $(m+1)/2$ 번째 원소만 1, 나머지 원소는 0으로 놓았으며, $\delta \neq 0$인 경우 $\mathbf{s}_{\delta}$의 $k$번째 원소 $s(k)$는 관리상태의 마지막 시점에서 관리통계량이 각 영역에 있을 가능성을 고려하여

$$s(k)=\begin{cases} \dfrac{\sum_{l=1}^{m} q_{lk}^{0}}{m}, & \text{만일 } k \neq \dfrac{m+1}{2} \\ \dfrac{\sum_{l=1}^{m}(q_{lk}^{0}+q_{ld}^{0})}{m}, & \text{만일 } k=\dfrac{m+1}{2} \end{cases}$$

로 설정하였다. $k=(m+1)/2$인 경우에는 오경보로 인하여 다시 시작하는 가능성까지 고려한 것이다. $\mathbf{I}$는 $m\times m$의 단위행렬(identity matrix), $\mathbf{1}$은 모든 원소가 1인 크기 $m$인 벡터, 그리고 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{h}$는 크기가 $m$인 벡터로서 $k$번째 원소를 각각 $n(k)$와 $h(k)$라 할 때

$$n(k)=\begin{cases} n_1/\bar{n} & \text{만일 } |x_k|<c_P \\ n_2/\bar{n} & \text{만일 } c_P \le |x_k| < c \end{cases}$$

$$h(k)=\begin{cases} h_1/\bar{h} & \text{만일 } |x_k|<c_P \\ h_2/\bar{h} & \text{만일 } c_P \le |x_k| < c \end{cases}$$

라고 정의할 수 있다.

<표 1> $\delta=0.5$에서 최적인 경우 $ATS_{\delta}/\overline{h}$값

| | | FP | VSS | VSSVW | VSI | VSIVW |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1/\overline{n}$ | | 1.00 | 0.55 | 0.53 | 1.00 | 1.00 |
| $n_2/\overline{n}$ | | 1.00 | 5.88 | 8.21 | 1.00 | 1.00 |
| $h_1/\overline{h}$ | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 2.65 | 3.05 |
| $h_2/\overline{h}$ | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.10 | 0.10 |
| $\lambda_1$ | | 0.049 | 0.159 | 0.073 | 0.062 | 0.038 |
| $\lambda_2$ | | 0.049 | 0.159 | 0.320 | 0.062 | 0.067 |
| $\delta$ | 0.25 | 63.87 | 56.51 | 48.24 | 44.62 | 45.86 |
| | 0.50 | 23.96 | 16.76 | 14.12 | 11.59 | 11.20 |
| | 1.00 | 10.19 | 6.85 | 5.50 | 4.66 | 4.10 |
| | 1.50 | 6.55 | 4.40 | 3.67 | 3.05 | 2.54 |
| | 2.00 | 4.88 | 3.34 | 2.95 | 2.32 | 1.86 |
| | 3.00 | 3.32 | 2.35 | 2.34 | 1.62 | 1.27 |
| $c_P$ | | - | 0.498 | 0.302 | 0.081 | 0.048 |
| $c$ | | 0.394 | 0.827 | 0.855 | 0.458 | 0.465 |

<표 2> $\delta=1.0$에서 최적인 경우 $ATS_{\delta}/\overline{h}$ 값

| | | FP | VSS | VSSVW | VSI | VSIVW |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1/\overline{n}$ | | 1.00 | 0.56 | 0.57 | 1.00 | 1.00 |
| $n_2/\overline{n}$ | | 1.00 | 3.93 | 5.15 | 1.00 | 1.00 |
| $h_1/\overline{h}$ | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 2.00 | 2.16 |
| $h_2/\overline{h}$ | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.10 | 0.10 |
| $\lambda_1$ | | 0.138 | 0.324 | 0.131 | 0.185 | 0.054 |
| $\lambda_2$ | | 0.138 | 0.324 | 0.479 | 0.185 | 0.194 |
| $\delta$ | 0.25 | 94.68 | 96.77 | 72.70 | 92.38 | 90.47 |
| | 0.50 | 28.55 | 21.78 | 16.46 | 18.49 | 17.60 |
| | 1.00 | 8.97 | 5.97 | 5.08 | 3.76 | 3.32 |
| | 1.50 | 5.21 | 3.58 | 3.23 | 2.16 | 1.75 |
| | 2.00 | 3.73 | 2.65 | 2.57 | 1.60 | 1.21 |
| | 3.00 | 2.48 | 1.91 | 2.07 | 1.12 | 0.78 |
| $c_P$ | | - | 0.651 | 0.397 | 0.198 | 0.081 |
| $c$ | | 0.757 | 1.292 | 1.231 | 0.910 | 0.872 |