누적합 관리도에 대한 새로운 성능 평가 기준

이윤동* · 안병진*†

* 건국대학교 응용통계학과

A New Performance Criterion for Cusum Control Chart

Yoon-dong Lee* · Byoung Jin Ahn*†

Department of Applied Statistics, Konkuk University

Key Words : CUSUM, Average Run Length, Stationary Distribution

Abstract

Cusum control chart is an efficient method to detect the change of process status. Many variants of cusum have considered, and the effects of design parameters have reviewed. To find the best cusum out of variants and to decide the best values of the design parameters, we need a criterion measuring the performance of the cusum control chart. People used and suggested several criterions which appear to be similar, but those have quite different properties. In this paper we review the properties of performance measure of cusum and its variants. Our goal is to provide fair and impartial criterion for comparison of cusums when the decision boundaries of the cusums are much different each other. We comparatively tested newly suggested measure and traditional measure with the examples of cumulative scored chart as a special case of cusum chart.

1. 서 론

공정의 품질 특성을 관리하고자 하는 입장에서 자주 사용되는 방법이 관리도를 이용한 공정관리 방법이다. 관리도 중 가장 대표적인 것이 $\overline{X}$-관리도와 R-관리도이다. 관리 대상이란 측면에서 $\overline{X}$-관리도는 공정 평균을 관리하고자 하는 목적으로 사용되고 S-관리도와 R-관리도는 공정분산(혹은 공정편차)를 관리하고자 하는 목적으로 사용된다. 그러나 이들은 모두 기본적으로 공정의 품질 특성치가 갖는 분포의 변화를 감지하기 위한 방법들이라는 공통점을 갖는다. 다음에서 논의된 내용은 공정 평균의 관리에 대한 경우뿐만 아니라 공정 편차의 관리에도 적용이 가능하다(참조, 이윤동, 김상익, 2005). 그러나 이후 본 논문에서는 논의의 단순화를 위하여 $\overline{X}$-관리도에서와 같이 공정 평균의 변화를 관리하고자 하는 상황을 기본으로 설정하고 논의를 진행하고자 한다.

관리도는 이론적 측면으로 해석해서, 귀무가설 "H_0: *공정이 정상이다*($\mu=\mu_0$)"와 대립가설 "H_1: *공정에 이상이 발생했다*($\mu=\mu_1$)"인 가설을 계속적이고 반복적으로 검정하는 절차라고 할 수 있다. 여기서 μ_0는 물론 공정 품질 특성의 평균이 갖게 되기를 희망하는 값이고, $\mu_1(\neq\mu_0)$은 품질 특성치의 허용한계(tolerance limit)를 감안하여 공정 평균이 이와 같을 때 마땅히 공정에 이상이 있음을 감지하게 하고자하는 값이다. 이러한 단순 형태의 가설들에 대한 검정은 Neyman-Pearson의 이론적 틀 안에서 효과적으로 해결되어 질 수 있다. 축차확률비검정(SPRT)은 통계적 검정 절차에서 표본의 크기를 미리 정해 놓지 않고, 매회 추출되는 관측치의 값에 따라 더 많은 관측을 할 것인지 아니면 주어진 관측

† 교신저자 bjahn@konkuk.ac.kr
※ 한국과학재단 목적기초연구 지원에 의하여 수행되었음(R01-2003-000-10220-0).

치만으로 검정을 수행할 것인지를 결정하는 방법이다. 이런 이유로 SPRT는 최소의 평균 표본 개수만으로도 지정된 일종오류 확률 α와 이종오류 확률 β를 만족시키는 검정을 가능하게 한다는 최적성을 갖는다. SPRT 이론이 관리도 방법에 적용된 대표적 방법이 Page(1954)의 누적합(cusum) 관리도이다. 누적합 관리도는 $\overline{X}$-관리도에 비하여 상대적으로, 공정 평균의 변화이후 공정 이상 신호가 검출되기까지의 평균 표본 횟수를 최소화시켜주는 장점을 갖는다. $|\mu_1-\mu_0|$가 공정편차 σ에 비하여 그다지 크지 않은 경우, 즉 정밀한 공정관리가 필요한 경우, $\overline{X}$-관리도 보다는 누적합 관리도가 더 좋은 성질을 갖는 것으로 알려져 있다. 반면, 일회의 큰 공정변화가 일어났을 때, 누적합 관리도는 $\overline{X}$-관리도보다 공정 이상 신호 검출까지 더 많은 횟수의 표본이 필요하다고 알려져 있다. 이러한 점 때문에 Lucas(1982)와 Ncube and Woodall(1984)는 누적합 관리도와 $\overline{X}$-관리도를 결합하여 사용하는 방법을 제안하였다.

누적합 관리도 혹은 $\overline{X}$-관리도의 성능을 비교적으로 평가하는 기준으로 사용되는 것이 평균 런의 길이(Average Run Length; ARL) 이다. 공정이 정상인 경우, 즉 $\mu=\mu_0$인 경우의 ARL을 보통 ARL_0라 하고, 공정에 이상이 있는 경우, 즉 $\mu=\mu_1$인 경우의 ARL을 ARL_1이라 한다. 바람직한 관리도가 되기 위해서 ARL_0는 가능한 커야 하고 ARL_1은 가능한 작아야 한다. 이 때, $\overline{X}$-관리도의 경우 $ARL_0=\alpha^{-1}$이고, $ARL_1=(1-\beta)^{-1}$인 관계가 있음은 매우 잘 알려져 있다. $\overline{X}$-관리도에서의 ARL_0와 ARL_1은 이와 같은 설명을 통하여 매우 명쾌하게 정의되는데 비하여, 누적합 관리도의 경우는 몇 가지 더 고려하여야 할 사항이 있다. 본 연구에서는 누적합 관리도의 성능 평가를 위하여 기존에 설정된 ARL의 정의를 살펴보고 이 기준들이 갖는 문제점과 그 대안에 대하여 논의하게 된다.

2. 평균 런의 길이에 대한 정의

공정 평균이 증가하였는지를 검출하기 위하여 사용되는 상방향 누적합 관리도의 통계량 T^u_i와, 공정 평균이 감소하였는지를 검출하기 위하여 사용되는 하방향 누적합 관리도의 통계량 T^d_i는 어떤 양수 h와 적당한 양수 k에 의하여 각각 다음과 같이 나타난다.

$$T^u_i=\max(0,T^u_{i-1}+(X_i-k)),$$
$$T^d_i=\min(0,T^d_{i-1}+(X_i+k)),$$

여기서 $i=1,2,\cdots$이고 초기값은 각각 $T^u_0=0$, $T^d_0=0$이다. 이 때 h와 k를 각각 경계값과 참조값이라고 한다. 상방향 누적합 관리도는 $T^u_t>h$인 경우에 평균의 증가가 있었다고 결론을 내리는 방법이고 하방향 누적합 관리도는 $T^d_t<-h$인 경우에 평균의 감소가 있었다고 결론을 내리는 방법이다. 상방향이나 하방향이냐 하는 누적합 관리도의 방향성을 구별하지 않고 문맥에 따라 T^u_i 혹은 T^d_i를 함께 표현하고자 할 때 누적합 관리도의 통계량을 일반적으로 T_i라 표현하기로 한다. 경계값 h를 0에 매우 가깝게 접근시키고 참조값 k를 적당히 잡는 경우의 누적합 관리도는 $\overline{X}$-관리도와 동일하다. 보통의 누적합 관리도에서 참조값은 $k=(\mu_0+\mu_1)/2$인 경우를 사용한다.

누적합 관리도의 ARL 중에서, 공정 평균의 변화를 가정할 필요가 없는 ARL_0의 정의에 대하여는 기존에 잘 알려진 연구 외에 별달리 고려해야할 논의는 없는 듯하다. 이에 반하여 공정 평균의 변화를 가정해야 하는 ARL_1의 경우에는 몇 가지 검토해야 할 관련 사항을 찾아 볼 수 있다. 보통 사용되는 정의로서 ARL_1은 일단 먼저 공정평균의 변화가 있었다고 가정하고, 즉 $\mu=\mu_1$, 그 후 공정이상 신호가 검출되기까지 얼마의 시간(표본 횟수)이 필요한지를 말하는 값이다. 보다 엄밀한 ARL_1의 정의를 위하여, Lorden(1971)은 다음과 같이 정리하였다. 먼저 Y라는 품질 특성치가 있을 때, 이에 대한 i-번째 표본의 표본평균을 $X_i=\overline{Y}_i$, $i=1,2,\cdots$ 라 하면, 초기 $X_1,\cdots,X_{m-1}$들 각각은 독립적으로 동일한 분포 F_0를 따르고, $X_m, X_{m+1},\cdots$ 각각은 F_1인 분포를 따른다고 하자. 이 때 이를 간단히 표현하여 X_1, $X_2,\cdots$가 결합 확률측도 P_m을 따르는 것으로 나타내기로 하자. 다시 말해서, 확률측도 P_m하에서는 X_i, $i<m$은 F_0를 따르고 X_i, $i\ge m$은 F_1을 따른다는 의미가 된다. 여기서 어떤 절차, 혹은 어떤 통계량에 의하여 $X_1,\cdots,X_n$으로부터 공정 이상 신호

가 검출되었다고 하자. 즉 공정 이상 신호를 알리는 어떤 정지 시간(stopping time) 확률 변수 N에 대하여 $N=n$인 사건이 발생했고, 실제 공정의 변화가 있었다고 하자. 즉 $N \geq m$. 이 경우에 $X_1, X_2, \cdots$의 실제 결합분포는 P_m으로 표현된다. 여기서 P_m에 대한 기대치 구하는 과정을 E_m이라 표현할 때 Lorden(1971)은 바람직한 형태의 ARL_1으로

$$\sup_{m \geq 1} ess\sup E_m[(N-m+1)^+ | X_1, \cdots, X_{m-1}]$$

와 같이 정의된 $\overline{E}_1N$을 사용할 것을 제안하였다. 이러한 정의는 간단히 설명해서, 확률변수 $X_1, \cdots, X_n$에 의하여 결정되는 공정의 변화 이후 신호 검출에 필요한 지연 시간으로 정의되는 확률변수 $(N-m+1)^+$을, $X_m, \cdots, X_n$과 관련되어 확률적으로 설명되는 부분에 대하여는 기대치를 취하고, 조건부로 주어진 $X_1, \cdots, X_{m-1}$과 관련된 부분에 대하여는 확률적으로 유의미한 값 중에서 최대값($ess\sup$)이 되도록 하겠다는 의미이다. 즉, 공정의 변화가 발생하기 이전에 발생한 값들 $X_1, \cdots, X_{m-1}$은 계산시 공정신호 검출을 가장 늦추는 최악의 상황을 만들도록 작용했다고 가정하고, 그 이후의 발생한 확률변수 $X_m, \cdots, X_n$에 대하여는 대응하는 기대치를 취했다는 의미이다. 이를 누적합 관리도의 경우에 맞추어 해석해 보면, 공정 평균의 변화가 시점 m에서 일어났다고 할 때, $X_1, \cdots, X_{m-1}$에 의해서 생성되는 시그마 필드 $\sigma(X_1, \cdots, X_{m-1})$에 속하는 T_{m-1}에 대하여는 신호 검출 시간을 지연시키게 만드는 최악의 경우 $T_{m-1}=0$을 가정하고, 시그마 필드 $\sigma(X_m, \cdots, X_n)$에 대하여는 평균을 취한다는 뜻이다. 이는 $T_0=0$이라 하고 처음($m=1$)부터 공정 평균의 변화가 발생했다고 가정하여, 즉 $X_1, \cdots, X_n$ 모두가 독립적으로 동일한 분포 F_1을 따랐다고 가정하여 ARL을 구하는 E_1N과 동일하다. 수식으로 표현하면 $E_1N = ARL_1$이라는 의미이다. 다시 말해서, Page(1954)에 의하여 제안된 정규적인 누적합 관리도에 대하여는 $\overline{E}_1N = E_1N$이고 이를 ARL_1으로 잡으면 된다는 의미이다.

Lorden(1971)이 위에서와 같이 다소 복잡한 형태로 ARL_1을 정의한 것은, 정상적인 누적합 관리도만의 성능 평가를 위해서 라기 보다는, 정상적인 누적합 관리도를 포함한 보다 더 큰 틀에 속하는 관리도들의 성능 평가를 위한 것이었다고 보인다. 일부 변형된 누적합 관리도의 경우에 대하여 $\overline{E}_1N$과 E_1N은 서로 다른 값으로 정의되기도 한다. 이 때 별다른 주의 없이 보통 E_1N을 ARL_1으로 사용하기도 하는데 이는 잘못임을 말하는 것이다. E_1N과 $\overline{E}_1N$이 다른 경우는 $\overline{E}_1N$을 ARL_1으로 정의하여 사용해야 한다. 구체적인 예로 Muford(1980) 그리고 Ncube and Woodall(1984)은 제시된 누적합 관리도의 정수형 버전으로 누적 점수 관리도를 제안하면서, "Rule-II"라는 변형을 만들 때, T_i가 0인 값으로 재설정되기 위한 조건을 보통의 정상적인 누적합 관리도에서와 같이 $T^u_{i-1}+(X_i-k)<0$ 혹은 $T^d_{i-1}+(X_i-k)>0$으로 하지 않고, 어떤 적당한 양수 $b>0$에 대하여 $T^u_{i-1}+(X_i-k) \leq -b$ 혹은 $T^d_{i-1}+(X_i+k) \geq b$인 경우로 설정하였다. 이러한 경우들은 Lorden(1971)이 그 예로서 지적한 바와 같이 정상적인 SPRT의 응용으로 해석되는 경우가 아니며, 따라서 Page(1954)가 제안한 틀에 속하는 것으로 볼 수 없는 경우이다. 이들 경우에 $\overline{E}_1N$과 E_1N은 서로 다른 값을 갖고, 이 때 ARL_1으로는 $\overline{E}_1N$이 더 적합하다. 그럼에도 불구하고 Muford(1980)와 Ncube and Woodall(1984)은 누적점수 관리도의 비교 기준으로 $\overline{E}_1N$ 대신 E_1N을 쓰고 있는데 이는 Lorden(1971)의 관점에서 보면 잘못된 평가 기준을 적용한 것이다.

3. 새로운 성능 평가 기준

앞 장에서 언급한 특이한 일부 경우들을 제외하고, 보통 정상적인 누적합 관리도의 성능 평가를 위한 기준인 ARL_1의 값으로 E_1N(마찬가지로 $\overline{E}_1N$)을 사용하는 것은 매우 자연스럽고 합리적인 것으로 받아들여지고 있다. Lucas and Crosier(1982)는 누적합 관리도의 성능 평가 기준으로 사용되는 E_1N의 특성을 이용하여, 성능 개선을 위한 방법으로 초기값 T_0을 0으로 지정하는 대신 미리 적당한 값 $s \in [0, h]$와 $v \in [-h, 0]$에 대하여 $T^u_0 = s$, $T^d_0 = v$와 같이 할 것을 주장하고 있다. 특히 이러한 초기값의 설정은 경계값 h가 큰 경우 그 효과가 큰 것으로 알려져 있다. 그러나, Chang and Gan(1995)는 이와

같은 초기 값의 설정이 누적합 관리도의 성능 개선에 그다지 도움이 되지 않음을 지적하고 있다. 이러한 의견의 차이는 ARL_1으로 정의된 E_1N이 그 정의상 처음부터($m=1$) 공정 평균에 변화가 있다는 것을 가정하고 그 때부터 공정 이상 신호가 검출될 때까지의 평균 시간을 의미하도록 정의되어 있기 때문이다. 이렇게 정의된 기준 하에서는, 물론 초기값 설정에 따르는 ARL_0의 감소를 고려하더라도, 당연히 초기값의 설정이 매우 유리한 결과를 낳게 된다. 이에 반하여, Chang and Gan(1995)은 현실적 상황에서 공정 평균의 변화는 공정이 정상적으로 운영되다가 어느 미지의 시점에서 갑자기 발생하는 것이고, 이 경우 초기값을 0 아닌 다른 값으로 설정하였다고 하더라도, 공정 평균의 실제 변화가 일어나는 시점에서의 누적값은 0이나 0에 매우 가까운 값을 갖게 될 것이란 점을 지적하고 있다. 이러한 점은 누적합 관리도의 설계과정에서 SPRT의 최적화 원칙에 따라 참조값 k를 설정할 때, 공정의 상태가 정상인 경우 시간이 지남에 따라 누적값이 확률적으로 0에 매우 가까운 값에 머무르게 된다는 점을 고려할 때 매우 합리적인 의견이라고 하겠다. 이윤동(1990)도 이미 이러한 점에 대하여 동일한 의견을 말하고 있다. 이 점이 Lorden(1971)이 $\overline{E}_1N$ 혹은 동일하게 E_1N을 합리적인 기준으로 제시하면서 확률적 최대값($ess\sup$)의 개념을 통하여 $T_{m-1}=0$인 경우를 가정한 이유이기도 하다.

공정 평균의 변화가 일어나기 직전의 누적값 T_{m-1}을 0이라고 가정하는 $\overline{E}_1N$는, 관리도가 이상 신호의 검출 도구이고, 이의 평가 기준으로는 최악의 경우를 대비해야 한다는 점에서 매우 합리적인 기준이라고 할 수 있다. 그러나 실제로 누적합 관리도를 적용하는 경우 변화가 일어나는 시점 m이 클 때 $T_{m-1}=0$인 확률이 높은 것은 사실이나, 항상 그런 것은 아니고 확률적으로 0이 아닌 경우들이 존재한다. 특히 h가 큰 경우 T_{m-1}이 0이 아닌 경우들의 확률이 늘어나게 된다. $T_{m-1}>0$인 경우에는 다분히 공정 이상을 보다 빨리 검출할 확률이 높아지고 $\overline{E}_1N$ 혹은 E_1N이란 기준에 의하여 평가되어지는 값보다 더 나은 성능을 보여 주게 된다. 그러므로 경계값이 h_1과 $h_2(h_1<h_2)$로 서로 다른 누적합 관리도들의 성능을 단지 ARL_0와 $\overline{E}_1N$ 만으로 비교하는 경우, 보다 큰 경계값 h_2를 갖는 누적합 관리도의 장점을 충분히 평가하지 못하고 불리하게 평가하게 될 우려가 있다. 이러한 차이는 극단적인 예로 누적합 관리도와 $\overline{X}$-관리도의 성능 비교를 하는 경우 두드러지게 나타난다. 앞서 언급한 바와 같이 $\overline{X}$-관리도는 매우 작은 경계값 $h=0^+$를 사용하는 것과 같으므로, 누적합 관리도와 $\overline{X}$-관리도의 성능을 비교하기 위해서 ARL_0와 $\overline{E}_1N$만을 사용하는 것은 누적합 관리도의 성능을 보다 불리하게 평가받도록 만드는 점이 있다.

이러한 문제점의 해결을 위하여 이윤동(1990)은 누적 점수 관리도의 예를 들어, 서로 다른 경계값 h_1과 h_2을 사용하는 누적합 관리도들의 비교를 위하여, 다음과 같이 정의된 $E^{\infty}N$을 ARL_1으로 사용할 것을 주장하였다.

$$E^{\infty}N = \lim_{m\to\infty} E^m \mathrm{E_m}[(\mathrm{N-m+1})^+ \mid \mathrm{X_1, \cdots, X_{m-1}}]$$

이다. $E^{\infty}N$의 의미는 Lorden(1971)이 제안한 $\overline{E}_1N$에서 시스마필드 $\sigma(X_1,\cdots,X_{m-1})$에 대하여 esssup를 취한 것과는 달리, 기대치를 취한 것이다. 또한 공정에서 변화가 일어나는 시점이 공정이 상당기간 정상적으로 계속 작동 중이었을 것이라는 의미에서 m이 매우 큰 경우를 상정한 것이다. 즉 T_{m-1}의 값을 공정이 오랫동안 정상적으로 작동하고 있다고 할 때의 평균값으로서의 주자는 의미이다. $E^{\infty}N$의 사용은 앞서 지적된 초기값 설정에 대한 착시 효과로부터 자유로울 수 있고, 누적합 관리도와 $\overline{X}$-관리도와의 공정한 비교를 가능하게 한다는 장점이 있다. 그러나 현실적으로는 m이 매우 큰 경우에서 T^u_{m-1}이나 T^d_{m-1}가 갖는 분포를 알기가 어려운 문제점을 가지고 있다. 이를 정확히 알기 위해서는 다루기가 그리 손쉽지 않은 적분방정식을 풀어서 그 분포를 구하여야 하는 단점이 있다. 이러한 복잡한 계산 때문에 $E^{\infty}N$가 누적합 관리도의 평가 기준 외에, 누적합 관리도의 설계 기준으로 사용될 수 있는 편리한 대안으로 자주 사용되지 못한다는 단점이 있다.

이와 같은 $E^{\infty}N$의 문제점 개선을 위하여, 다음과 같은 근사적 계산법을 고려하게 된다. 공정이 정상적인 상황에 있고 m이 매우 커지면서(∞에 가까워

지면서) 갖게 되는 T^u_{m-1}의 분포를 $\pi(s)$라고 나타낼 때, $\pi(s)$는 다음과 같은 세 개의 관계식으로부터 얻어진다.

$$\pi(0)=\pi(0)\frac{F_0(k)}{F_0(h+k)}+\int_0^h \pi(s)\frac{F_0(k-s)}{F_0(h+k-s)}ds$$

$$\pi(x)=\pi(0)\frac{f_0(x+k)}{F_0(h+k)}+\int_0^h \pi(s)\frac{f_0(x+k-s)}{F_0(h+k-s)}ds$$

$$\pi(0)+\int_0^h \pi(s)\,ds=1.$$

여기서 f_0는 분포함수 F_0에 대응하는 확률밀도함수이다. 이 때 얻어지는 근은 $\pi(0)$에 대하여는 확률의 의미이고, $\pi(s)$, $s\in(0,h]$에 대하여는 확률밀도를 의미하게 된다. 위의 연립 적분방정식으로부터 그 근을 알 수 있다면, $E^\infty N$은 다음과 같은 관계로부터 구해진다.

$$E^\infty N=\pi(0)M_m(0)+\int_0^h \pi(s)M_m(s)\,ds \qquad (1)$$

이다. 여기서

$$M_m(s)=E_m[(N-m+1)^+ \mid T^u_{m-1}=s]$$

라고 정의되었다. 그러나 위 식 (1)에서 적분을 통하여 그 정확한 값을 알기 위하여는 $\pi(s)$ 뿐만 아니라 $M_m(s)$에 대한 정확한 식을 알아 한다. 그러나 Lee(2004)혹은 이윤동(1990)에서와 같은 일부 특수 경우들을 제외하고 보통의 누적합 관리도에서 $M_m(s)$가 갖는 s에 대한 함수식을 파악하기는 매우 힘들다. 그러므로 식 (1)의 적분항을 직접 구하기보다는 다음과 같은 수치적 방법에 의한 근사적 대안인 $\tilde{E}_{q^\infty}N$을 이용하는 것이 편리하다.

$$\tilde{E}_{q^\infty}N=\tilde{\pi}(0)M_m(0)+\sum_{i=1}^{q}\tilde{\pi}(c_i)M_m(c_i)$$

이다. 여기서 q는 임의의 양의 정수이다. 계산의 정확성을 위해서 q는 가능한 큰 값을 갖는 것이 바람직하나, 그 선택은 이용 가능한 계산 자원의 상황을 고려하여 적당히 큰(혹은 적당히 작은) 값으로 사용하는 것도 큰 무리가 없다. 여기서 $\tilde{\pi}(0)$와 $\tilde{\pi}(c_i)$, $i=1,\cdots,q$는, $\pi(s)$가 마치 0과 h사이의 이산적인 값만을 갖는 것으로 근사하여 구한 근사 값으로 다음과 같은 관계식으로부터 구해진다. $\delta=h/(2q)$이고 $u_i=i(2\delta)$, $c_i=u_i-\delta$, $i=1,\cdots,q$이라 하자. 또한 편의를 위해서 $c_0=0$라 하자. 이 때, $\tilde{\pi}(c_i)$, $i=0,1,\cdots,q$는 다음 조건에 의하여 구해진다.

$$\sum_{j=0}^{q}\tilde{\pi}(c_j)=1$$

이고 $\tilde{\pi}(c_i)=\sum_{j=0}^{q}\tilde{\pi}(c_j)p_{ij}$, $i=0,1,\cdots,q$

이다. 여기서

$$p_{i0}=F(k-c_i)/F(h+k-c_i),$$

$$p_{ij}=\frac{F(c_j+k-c_i+\delta)-F(c_j+k-c_i-\delta)}{F(h+k-c_i)},$$

$$i=1,\cdots,q,\quad j=0,1,\cdots,q$$

이다. 위의 방법은 결국 Brook and Evans(1972)가 누적합 관리도의 ARL을 구하기 위하여 사용했던 유한요소법적 근사법을 적용하여 안정상태 확률 $\pi(s)$을 구하는 것이다.

다음의 <표 1>은 누적합 관리도의 특수한 경우인 누적 점수 관리도의 경우를 예로 들어 E_1N과 $\tilde{E}_{q^\infty}N$의 차이를 비교한 것이다. 누적 점수 관리도는 삼항분포(Trinomial distribution)에 적용된 누적합 관리도의 일종이다. 누적 점수 관리도를 예로 들어 비교를 한 것은, 누적 점수 관리도가 이론적으로는 누적합 관리도와 동일하면서도 그 편리성과 실용성으로 인해 다수의 연구자들에 의하여 연구되어 왔기 때문이다(참고, Munford, 1980 ; Ncube and Woodall, 1984 ; 최병철, 1987; 최인수, 이윤동, 1998). 또한 삼항분포는 지수분포, 얼랑분포 등과 함께 SPRT에서의 유의확률과 검정력이 근사적 방법이 아닌 정확한 방법으로 계산이 가능하다는 특징을 갖는다(참고, Siegmund, 1985; Lee, 2004; 이은경 외, 2005). 이러한 특징으로 누적 점수 관리도의 경우 E_1N과 $\tilde{E}_{q^\infty}N$의 차이를 손쉽게 비교 가능하다. 또한 누적 점수 관리도의 경우는 자료를 이산화 하는 특수성에 따라 안정상태 확률 $\pi(c_i)$를 이산화 하여 근사하는 절차상의 오차 혹은 q의 선택 등에 대하여 따로 고려하지 않아도 된다는 장점도 있다.

<표 1>은 정규분포를 따르는 공정이 정상 $\mu=\mu_0$(여기서 $\mu_0=0$)인 경우와 비정상 $\mu=\mu_1$인 경우를 검정하기 위하여 누적 점수 관리도를 적용한 경우의

<표 1> 누적 점수 관리도에서의 E_1N과 $\tilde{E}_{q^\infty}N$의 차이

μ_1	0.4			0.5			0.6		
ARL_0	100	300	600	100	300	600	100	300	600
h	4	6	7	4	5	6	4	5	6
k	0.4736	0.4040	0.4601	0.2859	0.4551	0.4497	0.1078	0.2506	0.2285
E_1N	21.2	33.9	43.2	16.7	25.5	31.2	13.7	19.9	24.4
$\tilde{E}_{q^\infty}N$	18.4	29.7	38.1	14.6	22.5	28.2	12.0	17.7	21.9
$E_1N - \tilde{E}_{q^\infty}N$	2.8	4.2	5.1	2.1	3.0	3.0	1.7	2.2	2.5
ARL_1 of $\overline{X}$	36.9	96.5	178.0	29.5	74.4	134.4	23.7	57.8	102.4

비교이다. 설계 기준이 되는 μ_1과 기준 요건인 ARL_0를 달리 잡아 가면서, E_1N을 최소화하는 (h, k) 쌍을 결정하고, 그 경우에서의 $\tilde{E}_{q^\infty}N$을 비교하여 나타낸 것이다. <표 1>에서 사용된 설계모수 h와 k의 결정 방법은 최인수, 이윤동(1998)에 자세히 나와 있다. 최인수, 이윤동(1998)에서는 참조값을 나타내는 기호로 k 대신에 s를 사용하고 있다. <표 1>의 결과로부터 경계값 h가 클 수록 $\tilde{E}_{q^\infty}N$과 E_1N의 차이가 커지는 것을 볼 수 있다. 이러한 점을 고려할 때, 누적합 관리도 혹은 누적 점수 관리도가, "공정의 변화가 큰 경우 $\overline{X}$-관리도에 비하여 공정 이상을 검출하는데 시간이 많이 걸린다"는 평가에는 누적합 관리도의 성능 평가 기준이 공정한 비교에 합당치 못했던 이유가 일부 있는 것으로 판단된다. <표 1>의 맨 아래 줄은 $\overline{X}$-관리도에서의 공정 평균 증가를 검출하는 능력을 비교적으로 나타낸 것이다. $\overline{X}$-관리도가 주어진 ARL_0를 만족하도록 설계되었을 때 지정된 μ_1에서 평가된 ARL을 "ARL_1 of $\overline{X}$"로 나타내었다. <표 1>에 주어진 μ_1 값들이 상대적으로 크지 않아 Lucas(1982)나 Ncube and Woodall (1984)에서와 같이 $\overline{X}$-관리도가 누적 점수 관리도에 비하여 더 좋은 성질을 보이는 경우는 표에 나타나지 않았다.

4. 결 론

누적합 관리도는 전통적으로 사용되는 $\overline{X}$-관리도에 비하여 공정 이상을 빠른 시간 내에 감지하는 것이 가능하여 높은 효율의 사용 목적을 달성하도록 한다. 그러나 이에 비하여, 적용 방법이 단순하고 특성 파악이 쉬운 $\overline{X}$-관리도와는 달리 그 특성을 파악하는 방법이 단순하지 않다. 이 때문에 누적합 관리도의 성능을 평가하기 위해서는 여러 가지 사항을 고려하여야 한다. 본 논문에서는 누적합 관리도의 성능을 평가하기 위하여 제시된 기존 방법론을 검토하여 보고, 기존 방법론이 갖는 문제점을 해결할 수 있는 대안을 고려해 보았다. 기본적으로 축차확률비검정(SPRT) 또는 그 변형 검정 방법에서 양측 경계값을 다양하게 잡는 것이 여러 연구들에서 고려되었다. 이와 같이 변형된 SPRT 이론에 기인한 관리도를 평가함에 있어서, 다양한 경계값들의 영향을 공정하게 고려하는 방법을 찾고자 하는 것이 본 연구의 주 내용이다. 특히 공정 이상을 알리는 누적값 T_i에 대한 경계값 h가 서로 크게 다른 관리도들을 비교하고자 하는 경우 Lorden(1971)에 의하여 제안된 방법은, 상대적으로 큰 h값을 갖는 경우를 불리하게 평가하는 측면이 있었다. 새로 제시된 누적합 관리도의 성능 비교 기준은 이런 점을 보완하고, 또한 초기값이 주는 착시 현상을 막을 수 있는 방안으로 고려된 것이다. 구체적인 예로, 누적 점수 관리도에서 기존에 제안된 방법과 새로이 제안된 방법의 차이가 얼마나 나는 지를 살펴보았다. 일반적으로 자주 고려되는 정규분포의 경우에 어떤 결과를 보이는 지를 살펴보는 것도 추후 연구에서 관심이 되는 부분이라고 하겠다.

참 고 문 헌

[1] 이윤동(1990), 「누적 점수 관리도의 설계」, 한국과학기술원 석사학위 논문.

[2] 이윤동, 김상익(2005), "공정분산 관리를 위한 누적합관리도", 「품질경영학회지」, 33권, 3호, pp. 149-155.
[3] 이은경, 나명환, 이윤동(2005). "얼랑분포의 축차확률비검정과 관련된 적분방정식의 해", 「응용통계연구」, 18권, pp. 57-66.
[4] 최병철(1987), 「연속생산공정에서의 평균값 관리를 위한 누적 가중점수 관리도」, 서울대학교 박사학위 논문.
[5] 최인수, 이윤동(1998), "단방향 누적점수관리도의 설계", 「품질경영학회지」, 26권, pp. 31-45.
[6] Brook, D. and Evans, D. A.(1972), "An Approach to the Probability Distributionb of Cusum Run Length", *Biometrika*, Vol. 59, pp. 539-549.
[7] Chang, T. and Gan, F.(1995), "A Cumulative Sum Control Chart for Monitoring Process Variance", *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp. 109-119.
[8] Lee, Y. D. (2004), "Unified Solutions of Integral Equations of SPRT for Exponential Random Variables", *Communications in Statistics, Series A, Theory and Method*, Vol. 33, pp. 65-74.
[9] Lorden, G.(1971), "Procedures for Reacting to a Change in Distribution", *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 42, pp. 538-551.
[10] Lucas, J. M.(1982), "Combined Shewart-CUSUM Quality Control Schemes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 14, pp. 51-59.
[11] Lucas, J. M. and Crosier, R. B.(1982), "Fast Initial Response for CUSUM Quality-Control Schemes : Give your CUSUM a Head Start", *Technometrics*, Vol. 24, pp. 199-205.
[12] Munford, A. G.(1980), "A Control Chart based on Cumulative Scores", *Applied Statistics*, Vol. 29, pp. 252-258.
[13] Ncube, M. M. and Woodall, W. H.(1984), "A Combined Shewhart-Cumulative Score Quality Control Chart", *Applied Statistics*, Vol. 29, pp. 259-265.
[14] Page, E. S.(1954), "Continuous Inspection Schemes", *Biometrika*, Vol. 41, pp. 100-115.
[15] Siegmund, D.(1985), *Sequential Analysis*, Springer-Verlag, New York.