공정분산 관리를 위한 누적합 관리도

이윤동* · 김상익*†

* 건국대학교 응용통계학과

Cusum Control Chart for Monitoring Process Variance

Yoon-dong Lee* · Sangik Kim*†

* Department of Applied Statistics, Konkuk University

Key Words : CUSUM, Process Variance, Erlang Distribution

Abstract

Cusum control chart is used for the purpose of controling the process mean. We consider the problem related to cusum chart for controling process variance. Previous researches have considered the same problem. The main difficulty shown in the related researches was to derive the ARL function which characterizes the properties of the chart. Sample variance, differently with sample mean, follows chi-squared type distribution, even when the quality characteristics are assumed to be normally distributed. The ARL function of cusum is described by a type of integral equation. Since the solution of the integral equation for non-normal distribution is not known well, people used simulation method instead of solving the integral equation directly, or approximation method by taking logarithm of the sample variance. Recently a new method to solve the integral equation for Erlang distribution was published. Here we consider the steps to apply the solution to the problem of controling process variance.

1. 서 론

통계적 공정관리(statistical process control)에서 논의되는 주요한 주제 중 하나는 정규분포 또는 정규분포와 유사한 성질을 갖는 것으로 가정되는 품질특성치(quality characteristic)에 대하여 그 평균과 분산을 일정한 범위 한계 내에서 관리하기 위한 방법들이다. 그 대표적인 방법이 공정 평균의 관리를 위한 $\overline{X}$-관리도, 그리고 공정 분산(혹은 공정 편차)의 관리를 위한 R-관리도 또는 S-관리도 등이다. R-관리도는 작업 현장에서 간편한 계산만으로 적용이 가능하여 전통적으로 많이 사용되고 있다. S-관리도는 R-관리도에 비하여 통계적 성질이 좋고, 관련 이론이 보다 잘 정비되어 있어, 계산의 복잡성이 문제가 되지 않는 요즘 공정편차 관리의 주요한 방법이 되고 있다. 관리도의 특성을 대표하는 값으로 사용되는 것이 평균런의 길이(average run length, ARL) 이다. ARL은 평균적으로 얼마 만에 공정 이상신호가 검출되는 가를 나타내는 값이다. 공정이 정상적으로 운영되고 있을 때의 ARL을 보통 ARL_0라고 나타내고, 공정에 이상이 있는 경우－정상적인 경우와 비교하여 미리 지정된 양 만큼의 편차가 발생한 경우－에서의 ARL을 ARL_1이라고 한다. 바람직한 관리도가 되기 위해서 ARL_0는 가능한 커야 하고 ARL_1은 가능한 작아야 한다. 관리도의 개념은 통계적 가설검정의 한 응용으로 해석되는데, “공정이 정상이다(H_0)”와 “공정에 이상이 있다(H_1)”인 가설을 반복적으로 검정하는 것과 동일하다는 것이 잘 알려져 있다. 가설검정에서의 일종오

† 교신저자 sikim@konkuk.ac.kr

※ 이 연구는 2004년도 건국대학교 신임교수 연구비 지원에 의한 것임.

류(Type I error) 확률 α와 이종오류(Type II error)확률 β에 대하여, $ARL_0 \propto \alpha^{-1}$이고, $ARL_1 \propto (1-\beta)^{-1}$인 관계가 있다.

특히 정밀한 공정평균의 관리가 요구되는 경우에는 Page(1954)에 의하여 제안된 누적합(cusum) 관리도가 주로 사용된다. 누적합 관리도는 공정평균의 작은 변화를 잘 검출하는 특성을 가지고 있다. 이론적 측면에서 누적합 관리도가 축차확률비검정(SPRT)의 변형임은 이미 잘 알려진 사실이다. 누적합 관리도의 ARL은 Page(1954)가 보인 제 2종 프레돔(Fredholm)형 적분방정식의 형태로 나타난다. 정규분포를 따르는 공정평균에 대한 누적합 관리도의 ARL을 구하는 방법에 대하여는 이미 많은 연구들이 이루어져 왔다. 이러한 방법에는 크게 Brook and Evans(1972) 방식의 유한요소법(finite element method)을 적용하는 방법과, 적분방정식의 전통적인 수치적 해법인 직교다항식(orthogonal polynomial)에 의한 가우시안 쿼드러쳐(Gaussian quadrature)를 이용하는 방법 등이 있다.

공정분산 관리를 위하여도 마찬가지로 S-관리도 외에 다양한 장점을 갖는 관리도를 개발하려는 노력이 이루어져 왔다. Crowder and Hamilton(1992)는 표본분산 S^2에 대하여 로그변환를 취한 후에, $\log(S^2)$ 통계량을 이용한 EWMA 관리도를 제안하였다. 또 Chang and Gan(1995)은 $\log(S^2)$를 이용한 누적합 관리도의 사용을 제안하였다. 이러한 선행 연구들에서 공정분산에 대한 누적합 관리도를 적용하려는 시도들이 1980년대 이후 부단히 이루어져 왔음에도 불구하고, 이에 대한 후속 연구나 적용 사례가 많지 않은 이유는 표본분산(sample variance) S^2의 분포가, 축차적 방법론 분야에서 이론이 잘 정립되어 있는 정규분포에 해당되지 않고, 이론 전개가 기존에 잘 연구되어 있지 않은 χ^2-분포를 따르는데 그 기본적인 원인이 있다. 특히 Chang and Gan(1995)은 시뮬레이션 실험을 통하여, 표본분산 S^2을 직접 이용한 누적합 관리도가, $\log(S^2)$을 이용한 누적합 관리도보다 더 좋은 성질을 가지고 있음에도 불구하고, $\log(S^2)$이 정규분포에 가까운 형태를 보여서 정규분포를 대상으로 이루어진 축차확률비검정 이론이나, 공정평균에 대한 누적합 관리도에서 개발된 이론을 근사적으로 사용할 수 있다는 이유로 $\log(S^2)$을 이용한 누적합 관리도의 사용을 제안한 바 있다.

본 연구에서는 최근 이은경 외(2005) 등에서 제안된 얼랑분포에 대한 축차확률비검정과 관련된 이론을 검토해보고, 이를 이용하여 공정분산 관리를 위해 표본분산 S^2을 이용한 누적합 관리도의 사용 방법을 구체적으로 살펴보고자 한다.

2. 얼랑분포에 대한 누적합 관리도

χ^2-분포족에 대한 축차확률비검정 분야에서의 가장 주목할 만한 연구는 Vardeman and Ray(1985)에 의하여 이루어졌다. Vardeman and Ray(1985)는 자유도 2인 $\chi^2(2)$ 분포, 즉 지수분포에 대한 누적합 관리도의 ARL에 대한 Page(1954)의 적분방정식이 유한요소법이나 가우시안 쿼드러쳐를 사용하지 않고서도 간단한 변환을 통하여 선형방정식의 형태로 변환됨을 보이고, 이의 해를 구하여 ARL 값들을 표로 제시하였다. Vardeman and Ray(1985)의 방법은 Stadje(1987)에 의하여 지수분포에 대한 축차확률비검정의 평균표본개수(Average Sample Number, ASN)와 운용특성(Operating Characteristic, OC)을 구하는 문제에 응용되었다. 이들 연구는 ARL, ASN, OC의 값들이 지수분포를 가정하는 경우에는, 정규분포를 가정하는 경우와 달리, 그 값들이 근사적 방법이 아니라 정확한 값들로 구해짐을 밝히고 있다. 이러한 성질은 지수분포를 따르는 확률변수가 정지시간(stopping time) 확률 변수와 결합하여 만들어 내는 여러 가지 흥미로운 현상의 하나로, 지수분포를 가정하는 경우에서의 잔여대기시간 (Residual Waiting Time)의 분포가 정확히 지수분포의 형태로 주어진다는 지수분포의 무기억성(memoryless property) 혹은, 그 다른 변형인 인스팩션 페러독스(inspection paradox) 등의 관련 이론들과 그 기본 원리를 같이 하고 있다.

이러한 Vardeman and Ray(1985) 그리고 Stadje(1987)의 연구를 지수분포만의 경우가 아니고, 보다 일반적인 감마분포족 또는 χ^2-분포족으로 확장하려는 연구로 Kohlruss(1994)의 연구를 들 수 있다. Kohlruss(1994)는 얼랑분포(Erlang distribution) - 정수형 모양모수를 갖는 감마분포 - 를 가정하는 경우, 축차확률비 검정에서의 ASN과 OC를 나타내기 위해서 표현되는 적분방정식에서의 커널(kernel)이 분리 가능한 성질을 갖는 커널(separable kernel)

이라는 점을 이용하여 이의 문제 해결을 시도하였다. 또 Knoth(1998)은 같은 경우 누적합 관리도의 ARL을 구하는 방법을 제시하였다.

Lee(2004)는 지수분포나 얼랑분포의 두 경우에 통합적으로, 누적합 관리도의 ARL이나 축차확률비 검정의 ASN과 OC가 간단히 정의된 어떤 함수족의 선형결합 형태로 표현됨을 보이고, 연속성 조건에 의하여 선형결합의 계수가 쉽게 구해짐을 보임으로써 얼랑분포에 대한 Page(1954)의 적분방정식이 완전하고 매우 간단하게 해가 구해짐을 보이고 있다. 특히 지수분포에 대하여는 그 해가 특별히 간단한 형태의 수식으로 표현될 뿐만 아니라, Vardeman and Ray(1985)에서 보이는 표나, Gan and Choi (1994)에서 보이는 복잡한 컴퓨터 계산 알고리즘의 도움이 없이도, 단순한 수열 계산만으로도 그 값을 구할 수 있음을 보였다. 또한 이은경 외(2005)은 Lee(2004)가 제시한 알고리즘의 수치적 성질을 개선하기 위한 연구를 하였다. 다음에서는 Lee(2004)가 제시한 누적합 관리도의 ARL을 구하는 방법을 결과를 중심으로 간단히 살펴보기로 한다.

다항함수 $e_n(x)=\sum_{j=0}^{n} x^j/j!$에 대하여 자유도 n을 갖는 얼랑분포의 분포함수는

$$F_n(x)=(1-e_{n-1}(x)\cdot e^{-x})\cdot I(x\geq 0)$$

와 같이 나타난다. 여기서 $I()$는 괄호안의 조건이 참일 때 1이고 그렇지 않을 때 0을 갖는 지시함수이다. 미지의 시점 m에 대하여, $X_i\sim F_n(x/c_0)$, $i=1,\cdots,m,(c_0=1)$이고 $X_i\sim F_n(x/c_1)$, $i=m+1,\cdots,\infty$ $(c_1\neq 1.0)$ 이라고 할 때, 이러한 확률변수열의 평균 c가 $c_0=1.0$으로부터 $c_1>1.0$으로 증가 하였는지를 검출하기 위한 상방향 누적합 관리도의 통계량 T^u_i와, $c_1<1.0$으로 감소하였는지를 검출하기 위한 하방향 누적합 관리도의 통계량 T^d_i는 어떤 양수 h와 양수 k에 의하여 각각 다음과 같다.

$$T^u_i=\max(0,\ T^u_{i-1}+(X_i-k)),$$
$$T^d_i=\min(0,\ T^d_{i-1}+(X_i+k))$$

여기서 $i=1,2,\cdots$이고 초기값 $T^u_0=s$, $s\in[0,h]$, $T^d_0=v\in[-h,0]$이다. 상방향 누적합 관리도는 $T^u_t>h$인 경우에 평균의 증가가 있었다고 결론을 내리는 방법이고 하방향 누적합 관리도는 $T^d_t<-h$인 경우에 평균의 감소가 있었다고 결론을 내리는 방법이다. 누적합 관리도의 ARL은 초기값의 함수로 표현되는데, 이를 각각 상방향의 경우는 $H(s)$ 하방향의 경우는 $L(v)$ 로 표현한다. 물론 $H(s)$와 $L(v)$는 초기값 s와 v에 대한 함수 일뿐만 아니라 경계값 h와 참조값 k의 함수이다. 따라서 필요한 경우 이를 명시적으로 $H(s,h,k)$ 혹은 $L(v,h,k)$로 나타내기로 한다. 이 때, $H(s)$와 $L(v)$에 대한 해는 다음과 같이 주어진다. 어떤 양수 h와 k에 의하여 $(m-1)k\leq h\leq mk$인 양의 정수 m에 대하여, $s\in[ik,(i+1)k]\cap[0,h]$이고 $v\in[-h+ik,-h+(i+1)k]\cap[-h,0]$, $i=0,\cdots,(m-1)$일 때,

$$H(s)=H(0)+\sum_{j=0}^{i}(1-\sum_{l=0}^{n-1}C_{j,l}W(l+ni-nj,\ l+i-j,\ s)) \tag{2.1}$$

$$L(v)=\sum_{j=0}^{i}(1-\sum_{l=0}^{n-1}C_{j,l}W(l+\ni-nj,\ l+i-j,\ s)) \tag{2.2}$$

와 같이 나타난다. 여기서 $W(t,j,s)=e_t(jk-s)\cdot\exp(s-jk)\cdot I(t\geq 0)$이다. 앞서 언급한 ARL_0는 $c=1$ 이라 할 때의 ARL을 말하는 것으로 공정 평균의 증가를 관리하고자 하는 경우는 $H(0)$, 혹은 공정 평균의 감소를 관리하고자 하는 경우는 $L(0)$를 말하게 된다. 반면 ARL_1은 $c=c_1$인 경우의 $H(0)$와 $L(0)$를 말한다.

위의 식 (2.1)의 $H(s)$가 완전히 결정되기 위해서는 $n\cdot m$개의 상수 $C_{j,l}$과 $H(0)$의 결정을 위하여 다음과 같은 $n\cdot m+1$개의 선형방정식이 필요하다.

$$V(i,u,j,l,s)=W(l-u+ni-nj,l+i-j,s)-W(l-u+ni-nj-n,\ l+i-j-1,s)$$

$$Q(a,i,j,l)=\exp(-(j+1)k)\cdot\sum_{p=0}^{l-1}e_{i+l-p}(jk-a)\frac{(a+k)^p}{p!}$$

$$d^t_{j,l}(u,a)=\sum_{i=j}^{m-1}Q(a,l+ni-nj,l+i-j,n-u)$$

$$d_{j,l}(u)=d^t_{j,l}(u,ik)-d^t_{j,l}(u,\min(h,(i+1)k))$$

$$G(u) = -mW(n-u-1, 1, -h) + \sum_{i=0}^{m-1} W(n-u-1, 1, -ik)$$

라고 정의할 때, $i=1,\cdots,(m-1)$, $u=0,\cdots,(n-1)$에 대하여,

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{n-1} V(i,u,j,l,ik)\cdot C_{j,l} = 1$$

이고, $u=0,\cdots,(n-1)$에 대하여

$$W(n-u-1,1,-h)\cdot H(0) - W(l-u,l,0)\cdot C_{0,l} + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} d_{j,l}(u)C_{j,l} = G(u)$$

으로 주어진다. 여기에 더하여 $H(0)$가 주는 의미로부터 직접

$$\sum_{l=0}^{n-1} C_{0,l} W(l,l,0) = 1$$

가 얻어진다.

함수 $L(v)$의 결정을 위한 식 (2.2)의 $C_{j,l}$는 다음과 같은 선형방정식에 의하여 구해진다. 각 첨자 $i=1,\cdots,(m-1)$, $u=0,\cdots,(n-1)$에 대하여,

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{n-1} V(i,u,j,l,-h+ik)\cdot C_{j,l} = 1$$

이고,

$$r^t_{j,l}(u,a) = Q(a, l+n(m-j-2), l+m-j-2, n-u)$$
$$r^s_{j,l}(u,a) = Q(a, l+n(m-j-1), l+m-j-1, n-u)$$
$$r_{j,l}(u) = r^t_{j,l}(u,-k) - r^t_{j,l}(u,-h+(m-1)k) + r^s_{j,l}(u,-h+(m-1)k) - r^s_{j,l}(u,0)$$
$$q_{j,l}(u) = (W(n-u-1, 1, 0)-1)\cdot W(n(m-j-1)+l-u,\ l+m-j-1, 0)$$

라고 할 때, $u=0,\cdots,(n-1)$에 대하여

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}(r_{j,l}(u)+q_{j,l}(u))C_{j,l} = W(n-u-1,\ m,\ h)$$

로 얻어진다. 또 관심이 되는 상수 $L(0)$는

$$L(0) = m - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} C_{j,l}\cdot W(l+n(m-j-1),\ l+m-j-1, 0)$$

과 같이 얻어진다. 보다 자세한 과정과 개선된 알고리즘에 대하여는 이은경 외(2005)를 참조하기 바란다.

3. 공정분산 관리를 위한 누적합 관리도

얼랑분포에 대하여 앞서 언급한 적분방정식의 해를 구할 수 있다는 것은 자유도가 짝수인 χ^2-분포에 대한 해를 구할 수 있다는 것과 동일한 의미가 되고, 1회 표본의 크기가 홀수인 경우에서의 S-관리도를 누적합 관리도의 형태로 구현할 때 그에 대한 ARL을 구하는 것이 가능함을 말하는 것이다. 따라서 Chang and Gan(1995)이 시뮬레이션 방법에 의존하거나, 근사적 방법을 통하여 해결하고자 했던 공정분산 관리를 위한 누적합 관리도의 성질 해석이 표본의 크기가 홀수인 경우에 대하여 수리적으로 완벽한 형태로 해결이 가능하게 되었음을 의미한다.

다음에서 공정 특성치는 Y로, i-번째 표본은 $Y_i=(Y_{i1},\cdots,Y_{ib})'$로 나타내기로 한다. i-번째 표본에서의 표본분산은 $S_i^2 = \frac{1}{b-1}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij}-\overline{Y_i})^2$로 정의 된다. 이로부터 공정분산을 σ_0^2으로 관리하고자 하는 경우,

$$Z_i = \sum_{j=1}^{b}(Y_{ij}-\overline{Y_i})^2 = (b-1)S_i^2$$

은 $\sigma_0^2\chi^2(b-1)$ 분포 혹은 규모모수가 $2\sigma_0^2$이고, 모양모수가 $(b-1)/2$인 감마분포 $Gamma((b-1)/2,\ 2\sigma_0^2)$를 따르게 된다. 이로부터 $b=2n+1$일 때 $X_i=Z_i/(2\sigma_0^2)$, $i=1,2,\cdots$은 자유도 n인 감마분포 $Gamma(n,1)$을 따르게 된다. 이에 따라 공정분산이 σ_0^2에서 $\sigma_1^2(>\sigma_0^2)$으로 증가되었는지를 관리하고자 하는 목적으로 작성되는 누적합 관리도의 ARL_0와 ARL_1은 $c=c_0(=1)$일 때의 $H(0)$와 $c=c_1(=\sigma_1^2/\sigma_0^2)$일 때의 $H(0)$를 구하는 것과 같다. 이를 위하여, c가 주어진 경우의 $H(s)$를 $H_c(s)$로 나타내기로 하자. 이때 규모모수 c의 특성상 $H_c(s)=H(s/c,\ h/c,\ k/c)$인 관계가 성립함을 주목하자. 구체적으로 Vardeman and Ray(1985)와 Lee(2004)에 주어진 표와 함수는 $H(s)$에 대한 표이고, Chang and Gan(1995)에

서는 FIR(Fast Initial Response) 특성이 없는 경우와 FIR 특성이 있는 경우로 구분하여, FIR 특성이 없는 경우는 c의 함수로서 $H_c(0)$ 값들을 표로 주고 있고, FIR 특성이 있는 경우는 몇 가지의 지정된 초기값 s에 대하여 c의 함수로서 $H_c(s)$ 값을 구하여 보이고 있다. 그러나 Chang and Gan(1995)의 결과는 $H_c(s) = H(s/c,\ h/c,\ k/c)$ 적용함으로써 Lee(2004)나 이은경 외(2005)에서 사용한 알고리즘으로부터 직접 그 정확한 해를 얻을 수 있다. 공정분산의 감소를 관리하고자 하는 경우도 $L(v)$와 $L_c(v)$ 사이에 동일한 관계식이 작용한다는 점을 이용하여 마찬가지로 구할 수 있다.

다음 <표 1>은 Chang and Gan(1995)의 <Table 5>에서 나타난 결과와 앞서 제시한 $H_c(s)$ 계산 결과를 비교적으로 보인 것이다. Chang and Gan(1995)의 <Table 5>에서는, $\log(S^2)$을 정규분포로 근사하여(LN-cusum) 잘 알려진 공식을 이용하여 ARL을 구하였고, S^2에 대하여 직접 누적합 관리도(S^2-cusum)를 적용한 경우에서의 ARL은 시뮬레이션을 방법에 의하여 구한 것이다. 두 경우의 비교에서 S^2-cusum이 LN-cusum보다 통계적으로 바람직한 성질을 가지고 있음을 보이고 있다. 그럼에도 불구하고, Chang and Gan(1995)이 LN-cusum을 사용할 것을 권고하게 되는 이유는 S^2-cusum의 통계적 성질을 얻기가 쉽지 않았기 때문이다. <Table 5>에서 주어진 시뮬레이션 결과를 얻는데도 상당한 정도의 계산 시간이 필요했을 것으로 보인다. <표 1>에 주어진 <Table 5>의 시뮬레이션 결과와 앞서 제시된 새로운 방법에 의하여 구한 정확한 해를 비교해보면 양 쪽이 매우 잘 들어맞고 있음을 볼 수 있다. 다만 $\sigma_1 = 1.5$일 때 최적이고 $\sigma_1/\sigma_0=1.3$인 경우, 즉 <표 1>에서 $\sqrt{c}=1.3$에 해당하는 행과 (II)에 해당하는 열에서 시뮬레이션의 결과는 8.00±0.01이라고 되어 있는데 반하여, 수식으로부터 얻어진 정확한 값은 7.9703 으로 되어 있어, 시뮬레이션 연구를 통하여 제시된 평균이 시뮬레이션에서 추정된 오차의 범위를 벋어나고 있음을 볼 수 있다.

<표 1>에서는 LN-cusum과 S^2-cusum을, 설계기준을 두 가지로 바꾸어 가면서 시험한 것이다. 첫 번째 (Ⅰ)는 ARL_1이 $\sigma_1=1.3\sigma_0$일 때 최적이 되도록 설계한 것이고, 두 번째 (Ⅱ)는 $\sigma_1=1.5\sigma_0$일 때 최적이 되도록 설계한 것이다. 표의 크기를 줄이기 위해서 Chang and Gan(1995)에서와 달리 최적 $\sigma_1=1.4\sigma_0$이 최적이 되는 경우는 생략하였다. LN-cusum에서 사용된 참조값 k의 설정 방법은 Chang and Gan(1995)에 설명되어 있다. Chang and Gan(1995)

<표 1> 표본개수 5인 경우, 즉 $b=5$ 일 때, LN-cusum과 S^2-cusum의 비교, 그리고 S^2-cusum에 대한 정확한 ARL 값

$\sqrt{c}$	(Ⅰ)			(Ⅱ)		
	LN-cusum	S^2-cusum	Exact	LN-cusum	S^2-cusum	Exact
1.00	100.0	100.0±0.5	99.827	100.0	100.3 ±0.5	100.257
1.01	86.6	85.5±0.5	85.283	87.3	86.8 ±0.5	86.934
1.02	75.4	73.4±0.5	73.395	76.5	75.6 ±0.5	75.798
1.03	66.0	63.6±0.5	63.614	67.5	66.5 ±0.5	66.443
1.04	58.2	55.5±0.5	55.514	59.7	58.3 ±0.5	58.545
1.05	51.5	48.7±0.5	48.765	53.2	51.8 ±0.5	51.844
1.10	30.2	28.1±0.5	27.875	31.6	30.0 ±0.5	30.256
1.20	13.8	13.0±0.5	12.780	14.4	13.6 ±0.5	13.648
1.30	8.15	7.75±0.01	7.742	8.31	8.00 ±0.01	7.970
1.40	5.63	5.46±0.01	5.464	5.61	5.46 ±0.01	5.455
1.50	4.29	4.22±0.01	4.217	4.19	4.12 ±0.01	4.122
2.00	2.11	2.08±0.01	2.075	1.96	1.96 ±0.01	1.969

에 의하면 그 과정이 “intractable” 혹은 “extensive computing work”을 필요로 한다고 표현한 것으로 보아 다소 복잡한 계산 과정을 거쳐 결정된 것으로 보인다. 그러나 S^2-cusum의 설계 변수 k를 결정하는 방법은, 축차우도비검정(SPRT)에 의하여 통계량을 계산함으로써 쉽게 얻을 수 있다. $\chi^2(b-1)$ 분포의 밀도함수를 $f_b(x)$라 하고 $c_1=\sigma_1^2/\sigma_0^2$이라 할 때,

$$\log\frac{\Pi_{i=1}^{n}\sigma_1^{(b-1)}f_b(S_i^2/\sigma_1^2)}{\Pi_{i=1}^{n}\sigma_0^{(b-1)}f_b(S_i^2/\sigma_0^2)}$$
$$=(1-1/c_1)\sum_{i=1}^{n}(S_i^2-\frac{\log c_1}{(1-1/c_1)})$$

인 관계가 있으므로 참조값 k의 최적 값은 $(1-1/c_1)^{-1}\log c_1$에 따라 결정된다. 보통 일반성의 상실없이 $\sigma_0^2=1$이라 놓고 보면, ARL_1 설정의 기준이 되는 최적 σ_1^2에 대하여 $k=(1-1/\sigma_1^2)^{-1}\log\sigma_1^2$인 관계가 성립한다. 이는 <표 1>에 나타난 S^2-cusum의 최적값을 잡는 과정에서도 마찬가지 방법이 사용되었다. 누적합 관리도의 또 다른 설계 변수 h는 원하는 수준의 ARL_0가 얻어질 수 있도록 그 값을 조절하는 수치적 최적화 과정을 통하여 결정되게 된다. <표 1>에서 사용된 설계변수는 모두 Chang and Gan(1995)의 <Table 5>와 동일하다. LN-cusum에 대하여 (Ⅰ)에서 k와 h는 0.309, 1.210이고, (Ⅱ)에서 k와 h는 0.451, 0.896이다. S^2-cusum에 대하여 (Ⅰ)에서 k와 h는 1.285, 2.921이고, (Ⅱ)에서 k와 h는 1.460, 2.331이다. Exact 값의 계산에서는 당연히 S^2-cusum과 같은 설계변수 k와 h를 사용하였다.

4. 결 론

공정평균을 관리하기 위하여 사용되는 누적합 관리도는 축차확률비 검정이론의 주요한 현실적 응용 방법 중의 하나로 자주 거론된다. 공정의 품질 특성치가 정규분포를 따른다고 가정하는 경우, 공정분산의 관리를 위해서 사용되는 기본통계량인 표본분산의 경우 χ^2-분포를 따른다. 따라서 공정분산을 관리하기 위하여 축차확률비 검정 이론을 적용하고자 하는 경우, χ^2-분포를 그 기본 분포로 하는 축차확률비 검정 이론의 전개가 필요하다. 그러나 이에 대하여는 충분한 연구가 이루어져 있지 않았던 이유로 그 특성치의 값들이 정확히 구해지지 않아서 현실 적용에 어려움이 있었다. 이런 이유로 표본분산을 직접 사용하는 대신 표본분산을 로그변환하고 이를 정규분포를 따른다고 가정하고 축차확률비 검정 이론을 적용하는 방법 등이 고려되어져 왔다. 그러나 최근 얼랑분포를 따르는 확률변수에 대한 축차확률비 검정에서 그 특성 함수들의 근을 구하는 쉬운 방법들에 대한 연구가 진행되었다. 얼랑분포는 자유도가 짝수인 경우의 χ^2-분포에 해당되므로, 공정분산에 대하여 축차확률비 검정을 적용할 때의 특성치를 구하는 것이 가능하게 되었다. 그 직접적인 응용으로 공정분산의 관리를 위한 누적합 관리도에서의 ARL을 정확하게 구할 수 있게 되었다. 본 연구에서는 이전에 시뮬레이션을 통하여 구해졌던 ARL 값들과 새로이 제시된 방법에 따라 정확한 계산에 의하여 구해진 값을 비교해 보았다.

그러나 홀수 자유도를 갖는 χ^2-분포에 대하여 축차확률비 검정을 적용할 때 특성함수의 근을 구하는 방법이 알려져 있지 않은 이유로 앞서 제시한 방법들이 아직 완전하다고 할 수 없는 것이 안타까운 점이다. 홀수 자유도를 갖는 경우에서, 정확한 해를 구하는 것이 가능하다면 그 것을 밝히거나, 그 것이 불가능하다면 짝수인 경우에서 얻어진 결과를 이용한 어떤 근사적 방법과 같이 홀수 자유도를 갖는 χ^2-분포에 대한 마땅한 해법 개발이 절실히 기대된다.

참 고 문 헌

[1] 이은경, 나명환, 이윤동(2005), “얼랑분포의 축차확률비 검정과 관련된 적분방정식의 해”, 「응용통계연구」, 18권, pp. 57-66.

[2] Brook, D. and Evans, D. A.(1972). “An Approach to the Probability Distributionb of Cusum Run Length”, *Biometrika*, Vol. 59, pp. 539-549.

[3] Chang, T. and Gan, F.(1995), “A Cumulative Sum Control Chart for Monitoring Process Variance”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp. 109-119.

[4] Crowder, S. V. and Hamilton, M. D.(1992), “An EWMA for Monitoring a Process

Standard Deviation", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, pp. 12-21.

[5] Gan, F. and Choi, K.(1994), "Computing Average Run Lengths for Exponential CUSUM Schemes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 134-139.

[6] Knoth, S.(1998), "Exact Average Run Lengths of CUSUM Schemes for Erlang Distribution", *Sequential Analysis*, Vol. 17, pp. 173-184.

[7] Kohlruss, D.(1994), "Exact Formulas for the OC and the ASN Functions of the SPRT for Erlang Fistributions", *Sequential Analysis*, Vol. 13, pp. 53-62.

[8] Lee, Y. D.(2004), "Unified Solutions of Integral Equations of SPRT for exponential Random Variables", *Communications in Statistics, Series A, Theory and Method*, Vol. 33, pp. 65-74.

[9] Page, E. S.(1954), "Continuous Inspection Schemes", *Biometrika*, Vol. 41, pp. 100-115.

[10] Stadje, W.(1987). "On the SPRT for the Mean of an Exponential Distribution", *Statistics & Probability Letters*, Vol. 5, pp. 389-395.

[11] Vardeman, S. and Ray, D.(1985), "Average Run Lengths for CUSUM Schemes When Observations Are Exponentially Distributed", *Technometrics*, Vol. 27, pp. 145-150.