

# 선택적 누적합(S-CUSUM) 관리도

임태진\*†

\* 숭실대학교 산업·정보시스템공학과

## A Selectively Cumulative Sum (S-CUSUM) Control Chart

Tae-Jin Lim\*†

\* Department of Industrial & Information Systems Engineering

Key Words : CUSUM, ARL, Control chart, Selective scheme, Markov chain

### Abstract

This paper proposes a selectively cumulative sum (S-CUSUM) control chart for detecting shifts in the process mean. The basic idea of the S-CUSUM chart is to accumulate previous samples selectively in order to increase the sensitivity. The S-CUSUM chart employs a threshold limit to determine whether to accumulate previous samples or not. Consecutive samples with control statistics out of the threshold limit are to be accumulated to calculate a standardized control statistic. If the control statistic falls within the threshold limit, only the next sample is to be used. During the whole sampling process, the S-CUSUM chart produces an 'out-of-control' signal either when any control statistic falls outside the control limit or when  $L$ -consecutive control statistics fall outside the threshold limit. The number  $L$  is a decision variable and is called a 'control length'. A Markov chain approach is employed to describe the S-CUSUM sampling process. Formulae for the steady state probabilities and the Average Run Length (ARL) during an in-control state are derived in closed forms. Some properties useful for designing statistical parameters are also derived and a statistical design procedure for the S-CUSUM chart is proposed. Comparative studies show that the proposed S-CUSUM chart is uniformly superior to the CUSUM chart or the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart with respect to the ARL performance.

### 1. 서 론

관리도의 주 목적은 공정의 이상상태를 신속하게 감지하는 것이라 할 수 있다. 특히, 공정평균의 이동은 중요한 관리대상이다. 슈하트(Shewhart)에 의해 관리도가 개발된 이래로 관리도의 민감도를 향상시키기 위한 많은 연구가 진행되어 왔다. 그 중 가장 성공적인 결과는 Page(1954)가 제안하고 Brook and Evans(1972)가 발전시킨 누적합(CUSUM) 관리도, Lucas와 Saccucci(1990)가 집대성한 지수이

동평균(EWMA) 관리도, 그리고 Prabhu 외(1994) 및 Costa(1997)가 제안한 적응형(adaptive) 관리도 등이라 할 수 있다.

CUSUM 관리도와 EWMA 관리도의 공통점은 과거의 표본을 모두 이용하여 관리통계량을 계산함으로써 관리도의 민감도를 향상시키고자 한 점이다. 반면에 적응형 관리도는 임계한계(threshold limit)를 설정하여, 현재 관리통계량의 상태를 기준으로 다음 샘플링방식(표본크기 및 샘플링 간격)을 결정한다. 즉, 현재의 표본이 우수한 관리상태를 나타내면 수월한 샘플링방식을 적용하고, 의심스러운 상태를 나타내면 엄격한 샘플링방식을 적용함으로써 관리도의 민감도를 향상시키고자 한 것이다.

† 교신저자 jlim@ssu.ac.kr

\* 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

본 논문에서는 누적형 관리도와 적응형 관리도의 착안점을 모두 이용하여 선택적 누적합(S-CUSUM) 관리도를 제안한다. 전통적 슈하트  $\bar{X}$  관리도에서 표본크기를 증가시키면 민감도 또한 증가한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러나 표본크기의 증가는 관리비용의 증가를 가져오므로, 표본크기를 증가시키는 대신 과거의 표본을 누적하여 민감도를 향상시키고자 하는 것이 CUSUM 관리도의 착안점이다. 이상상태에서의 표본만을 누적하면 민감도가 향상되지만, 관리상태에서의 표본을 같이 누적하면 오히려 민감도를 저하시킬 수 있다. 본 논문의 착안점은 적응형 관리도에서와 같이 임계한계를 설정하여 잘 관리된 상태와 의심스러운 상태로 구분하고, 의심스러운 상태에서의 표본만을 누적하여 관리함으로써 더욱 향상된 결과를 얻고자 하는 것이다. 또 다른 착안점은 관리 길이(control length)  $L$ 을 설정하여, 의심스러운 상태가  $L$  이상 지속될 경우에도 이상신호를 발생함으로써 관리도의 민감도를 향상시킴과 동시에 통계적 특성을 해석적으로 규명할 수 있도록 한 점이다.

제2장에서는 S-CUSUM 관리도의 운영방법을 설명하고, 마코프(Markov)체인으로 샘플링 프로세스를 모형화한다. 제3장에서는 관리상태에서의 평균런 길이(ARL) 식을 유도하고, 유용한 통계적 특성을 도출한다. 제4장에서는 S-CUSUM 관리도의 통계적 설계 방안을 제시하고, 제5장에서는 CUSUM 관리도와 비교연구를 통하여 S-CUSUM 관리도의 민감도를 규명한다.

## 2. 선택적 누적합(S-CUSUM)

### 관리도

S-CUSUM 관리도는 표준화된 관리통계량을 사용하며, 관리한계  $k$ , 임계한계  $w$ , 관리 길이  $L$  등 세 가지의 설계모수를 갖는다. 표본크기와 샘플링간격은 일반적 슈하트  $\bar{X}$  관리도와 동일하게 각각  $n_0$ 와  $h_0$ 로 설정한다. 하나의 관리통계량이 관리한계  $k$ 를 벗어나거나,  $L$  개의 관리통계량이 임계한계  $w$ 를 연속하여 벗어나면 이상신호를 발생한다.

관리한계  $k$ 와 임계한계  $w$ 가 정해지면, 관리통계량  $Z_i$ 의 영역을 다음과 같이 상호 배타적이고 포괄적인(mutually exclusive and exhaustive) 세 영역

으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{Z_i; |Z_i| \leq w\}, \\ I_2 &= \{Z_i; w < |Z_i| \leq k\}, \\ I_3 &= \{Z_i; |Z_i| > k\} \end{aligned} \quad (1)$$

영역  $I_1$ ,  $I_2$ , 및  $I_3$ 을 각각 일치영역, 중간영역, 불일치영역이라 하자. 즉, S-CUSUM 관리도에서는 하나의 관리통계량이 불일치영역에 속하거나,  $L$  개의 관리통계량이 연속하여 중간영역에 위치하면 이상신호를 발생한다.

공정의 목표값을  $\mu_0$ , 표준편차를  $\sigma$ 라 하면,  $i$ 번째 표본통계량  $Z_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{n_0}(\bar{X}_1 - \mu_0)/\sigma, \\ Z_i &= \begin{cases} \sqrt{n_0}(\bar{X}_i - \mu_0)/\sigma, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ \sqrt{jn_0}(\sum_{m=i-j+1}^i \bar{X}_m / j - \mu_0)/\sigma, & \\ \text{if } Z_{i-j} \in I_1, Z_{i-j+1}, \dots, Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (2)$$

공정특성치는 정규분포를 따르고, 공정은 관리상태  $N(\mu_0, \sigma^2)$ 에서 시작하며, 이상원인이 발생하면 공정평균이  $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ 으로 이동한다고 가정하자. 관리통계량에 누적된 표본크기가  $n$ 이고, 공정평균이  $\delta\sigma$ 만큼 이동하였다면, 관리통계량이 영역  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ 에 각각 속할 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(n, \delta) &= \Phi(w - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n}), \\ p_3(n, \delta) &= 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{n}) \\ p_2(n, \delta) &= 1 - p_1(n, \delta) - p_3(n, \delta) \end{aligned} \quad (3)$$

다음으로 S-CUSUM 관리도의 운영특성을 규명하기 위하여 상태를 정의하고, 마코프체인을 구성해보자. 하나의 표본에 대하여 다음과 같이 네 가지의 경우를 생각할 수 있다.

- ◎ : 관리상태에서의 표본, 관리통계량은 일치영역에 속함
- △ : 관리상태에서의 표본, 관리통계량은 중간영역에 속함
- : 이상상태에서의 표본, 관리통계량은 일치영역에 속함
- ▲ : 이상상태에서의 표본, 관리통계량은 중간영역에 속함

관리통계량이 불일치영역에 속하면 이상신호가 발생하므로 과도(transient)상태에서는 고려할 필요가 없다. 가장 최근의  $L-1$ 개 관리통계량  $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 을 고려하여 다음 통계량  $Z_i$ 를 결정하게 되므로 총  $4^{L-1}$ 개의 과도상태벡터가 발생할 수 있는데, 다음과 같이 경우를 통합하여 상태벡터의 개수를 줄일 수 있다. 표본의 상태와 상관없이 관리통계량이 일치영역에 속하는 경우를 '○'로 나타내면,  $\bigcirc = \bigcirc \cup \bullet$ 와 같다. 관리통계량이 일단 일치영역에 속하게 되면 그 이전의 표본은 더 이상 사용하지 않으므로 경우를 고려할 필요 없이  $\diamond = \bigcirc \cup \triangle \cup \bullet \cup \blacktriangle$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 다음과 같이 총  $M \equiv L(L+1)/2$ 개의 과도상태를 고려한다.

상태 (1,1)  $(\diamond, \diamond, \dots, \diamond, \bigcirc)$  : 가장 최근의 통계량  $Z_{i-1}$ 이 일치영역에 속함.

상태 (2,1)  $(\diamond, \diamond, \dots, \diamond, \bigcirc, \triangle)$  : 통계량  $Z_{i-2}$ 이 일치영역에 속하고,  $Z_{i-1}$ 는 중간영역에 속하며 공정은 관리상태임.

상태 (2,2)  $(\diamond, \diamond, \dots, \diamond, \bigcirc, \blacktriangle)$  : 통계량  $Z_{i-2}$ 이 일치영역에 속하고,  $Z_{i-1}$ 는 중간영역에 속하며  $(i-1)$ 번째 샘플링 시점에서 공정은 이상상태임.

상태 (3,1)  $(\diamond, \diamond, \dots, \diamond, \bigcirc, \triangle, \triangle)$  : 통계량  $Z_{i-3}$ 이 일치영역에 속하고,  $Z_{i-2}$ 와  $Z_{i-1}$ 는 중간영역에 속하며, 공정은 관리상태임.

상태 (3,2)  $(\diamond, \diamond, \dots, \diamond, \bigcirc, \triangle, \blacktriangle)$  : 통계량  $Z_{i-3}$ 이 일치영역에 속하고,  $Z_{i-2}$ 와  $Z_{i-1}$ 는 중간영역에 속하며,  $(i-1)$ 번째 샘플링 시점에서 공정은 이상상태임.

상태 (3,3)  $(\diamond, \diamond, \dots, \diamond, \bigcirc, \blacktriangle, \blacktriangle)$  : 통계량  $Z_{i-3}$ 이 일치영역에 속하고,  $Z_{i-2}$ 와  $Z_{i-1}$ 는 중간영역에 속하며,  $(i-2)$ 번째 샘플링 시점에서 공정은 이상상태임.

...

상태 (L,1)  $(\triangle, \triangle, \dots, \triangle)$  : 이전의  $(L-1)$ 개 통계량  $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 이 모두 중간영역에 속하며, 공정은 관리상태임.

상태 (L,2)  $(\triangle, \triangle, \dots, \triangle, \blacktriangle)$  : 이전의  $(L-1)$ 개 통계량  $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 이 모두 중간

영역에 속하며,  $(i-1)$ 번째 샘플링 시점에서 공정은 이상상태임.

...

상태 (L, L)  $(\blacktriangle, \blacktriangle, \dots, \blacktriangle)$  : 이전의  $(L-1)$ 개 통계량  $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 이 모두 중간영역에 속하며,  $(i-L+1)$ 번째 샘플링 시점에서 공정은 이상상태임.

마지막으로 다음과 같이 흡수상태를 정의한다.

상태 (L+1) (흡수상태) : 이상신호 발생. 즉, 하나의 통계량이 불일치영역에 속하거나, 연속된  $L$ 개의 통계량이 중간영역에 속함.

이상의 상태 정의에 따라 아래의  $(M+1) \times (M+1)$  전이행렬을 갖는 마코프체인으로 S-CUSUM 관리도의 샘플링 프로세스를 설명할 수 있다.

$$P_\delta = \begin{pmatrix} Q_\delta & (I - Q_\delta)1 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

단,  $Q_\delta$ 는 과도상태에 대한  $M \times M$  전이행렬을 나타낸다. 일례로써  $L=3$ 일 때, 과도상태 전이행렬은 다음과 같다.

$$Q_\delta = \begin{pmatrix} p_1(n_0, \delta) & 0 & p_2(n_0, \delta) & 0 & 0 & 0 \\ p_1(2n_0, \frac{\delta}{2}) & 0 & 0 & 0 & p_2(2n_0, \frac{\delta}{2}) & 0 \\ p_1(2n_0, \delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2(3n_0, \frac{\delta}{3}) \\ p_1(3n_0, \frac{\delta}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1(3n_0, \frac{2\delta}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1(3n_0, \delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

초기상태확률은 공정이 관리상태를 오랫동안 지속해왔다는 전제 하에서 정상상태(steady state) 확률로서 정의할 수 있다. 따라서 초기상태는 (1,1), (2,1), ..., (L,1) 등  $L$ 개의 상태만이 고려되며, 관리상태에서는 평균이동이 발생하지 않으므로 ( $\delta=0$ ) 사용된 표본크기가 식 (3)의 계산에 영향을 미치지 않는다. 일례로써  $L=3$ 일 때, 다음과 같은 전이행렬로써 관리상태 하의 샘플링 프로세스를 나타낼 수 있다.

$$Q_{R,0} = \begin{pmatrix} p_1(\cdot, 0) & p_2(\cdot, 0) & 0 \\ p_1(\cdot, 0) & 0 & p_2(\cdot, 0) \\ p_1(\cdot, 0) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

관리상태 하의 정상상태 확률벡터  $\pi_0 = (\pi_{(1,1)}, \pi_{(2,1)}, \dots, \pi_{(L,1)})^T$ 는 다음 연립식의 해를 구하여 계산할 수 있다.

$$\pi_0^T Q_{M,0} = \pi_0^T, \quad \pi_0^T \mathbf{1}_L = 1, \quad (6)$$

단,  $\mathbf{1}_L = (1, \dots, 1)^T$ 이며, 행렬  $Q_{M,0}$ 는 이상신호가 발생하지 않았다는 전제 하의 전이행렬을 나타낸다. 일례로써  $L=3$ 일 때, 관리상태 하의 조건부 전이행렬  $Q_{M,0}$ 는 다음과 같다.

$$Q_{M,0} = \begin{pmatrix} \frac{p_1(\cdot, 0)}{\sum_{i=1}^2 p_i(\cdot, 0)} & \frac{p_2(\cdot, 0)}{\sum_{i=1}^2 p_i(\cdot, 0)} & 0 \\ \frac{p_1(\cdot, 0)}{\sum_{i=1}^2 p_i(\cdot, 0)} & 0 & \frac{p_2(\cdot, 0)}{\sum_{i=1}^2 p_i(\cdot, 0)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

식 (6)으로부터 구한 해를 대입하여 전체 과도상태에 대한  $M \times 1$  초기상태확률 벡터를  $\pi = (\pi_{(1,1)}, \pi_{(2,1)}, 0, \pi_{(3,1)}, 0, 0, \dots, \pi_{(L,1)}, 0, \dots, 0)^T$ 와 같이 설정하면, 정상상태의 ARL은 다음과 같이 계산된다.

$$ARL_s = \pi^T (I - Q_s)^{-1} \mathbf{1}_M \quad (8)$$

행렬  $(I - Q_s)^{-1}$ 의 원소  $m_{A,B}$ 는 상태 A에서 시작하여 상태 B에서 경과한 기대횟수를 나타내므로 (Ross, 1996), 벡터  $(I - Q_s)^{-1} \mathbf{1}_M$ 의 원소  $r_A$ 는 상태 A에서 시작하여 과도상태에서 경과한 기대횟수를 나타낸다. 따라서 식 (8)은 정상상태에서 시작하여 과도상태에서 경과한 기대횟수, 즉 정상상태

ARL을 나타낸다.

### 3. S-CUSUM 관리도의 통계적 특성

S-CUSUM 관리도의 설계에 필요한 통계적 특성을 알아보자. 먼저, 관리상태 하의 ARL 벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

[정리 1] 관리상태 하의 ARL 벡터를

$$ARL_{R,0} \equiv (I - Q_{R,0})^{-1} \mathbf{1}_L = (a_{(1,1)}, a_{(2,1)}, \dots, a_{(L,1)})^T$$

라 하면,

$$a_{(i,1)} = \sum_{j=0}^{L-i} p_2(\cdot, 0)^j / D_1, \quad (9)$$

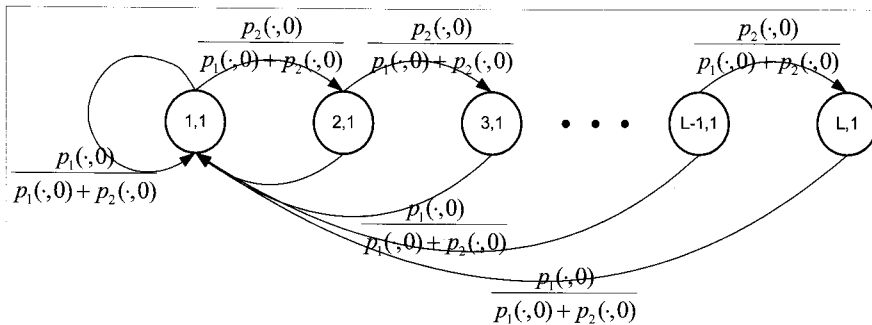
단,

$$D_1 = |I - Q_{R,0}| = 1 - p_1(\cdot, 0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(\cdot, 0)^j, \quad (10)$$

[증명]

분모  $D_1$ 은 초기상태  $(i,1)$ 에서 시작하여 상태  $(1,1)$ 을 두 번 이상 방문하지 않고 흡수상태로 전이할 확률을 나타낸다. 즉,  $D_1$ 은 상태  $(L,1)$ 에서 시작한 경우 1회의 시행주기에서 성공할 확률을 나타내므로, 상태  $(L,1)$ 에서 시작된 런길이는 성공확률  $D_1$ 을 갖는 기하분포를 따르고, 따라서  $a_{(L,1)} = 1/D_1$ 이 된다. 상태  $(i,1)$ 에서 시작된 ARL  $a_{(i,1)}$ 은 이후의 모든 상태  $(i,1), (i+1,1), \dots, (L,1)$ 에서 시작된 주기를 합하여 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다. ■

다음으로 마코프체인의 초기상태 확률을 얻기 위하여 관리상태 하의 정상상태 확률을 구하면 아래와 같다.



<그림 1> 관리상태 하에서의 상태전이도

[정리 2] 식 (6)으로부터 계산된 정상상태 확률은 다음과 같다.

$$\pi_{(i,1)} = \frac{[p_2(\cdot, 0) / \{p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)\}]^{i-1}}{\sum_{j=1}^L [p_2(\cdot, 0) / \{p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)\}]^{j-1}} \quad (i=1, \dots, L). \quad (11)$$

#### [증명]

아래의 그림에서 상태 (1,1)에서 자신으로 돌아오는 하나의 주기를 고려하면,  $\pi_{(i,1)}$ 은 상태 (i,1)이 이 주기에서 차지하는 상대적 비율로 생각할 수 있다. 주기의 총 확률은 식 (11)의 분모에  $p_1(\cdot, 0) / [p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)]$ 을 곱한 값과 같고, 한 주기에서 상태 (i,1)이 차지하는 확률은 식 (11)의 분자에  $p_1(\cdot, 0) / [p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)]$ 을 곱한 값과 같으므로, 약분하여 식 (11)을 얻는다. ■

## 4. S-CUSUM 관리도의 통계적 설계

앞에서 도출한 통계적 특성을 이용하여 S-CUSUM 관리도의 통계적 설계 절차를 제안한다. 먼저 유의수준  $\alpha$ 를 지정하면, 관리상태 하의 ARL은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} ARL_0 &= \pi^T (I - Q_0)^{-1} \mathbf{1}_M \\ &= \pi_0^T \mathbf{ARL}_{R,0} \equiv 1/\alpha \end{aligned} \quad (12)$$

정규분포를 따르는 경우, 관리한계  $k_0$ 인 일반적 슈하트  $\bar{X}$  관리도에서는  $\alpha = 2\Phi(-k_0)$ 와 같다.

여기서  $\pi_0$ 와  $\mathbf{ARL}_{R,0}$ 는 관리 길이  $L$ ,  $p_1(\cdot, 0)$  및  $p_2(\cdot, 0)$ 만의 함수이다. 따라서  $L$ 과  $k$ 가 정해지면, 식 (12)로부터 임계한계  $w$ 를 결정할 수 있다. 슈하트  $\bar{X}$  관리도의 관리한계  $k_0 = 3.0$ 인 경우, <표 1>에 다양한  $L$ 값과  $k$ 값에 따른  $w$ 의 값을 구하여 나타내었다. 임계한계  $w$ 는  $L$ 이나  $k$ 가 증가함에 따라 감소하는 경향을 보인다. 관리 길이  $L$ 나 관리한계  $k$ 의 증가는 이상신호 발생을 억제하므로,  $ARL_0$ 을 유지하기 위해서는 일치영역에 속할 확률을 줄여야 하기 때문에  $w$ 가 줄어드는 것으로 해석할 수 있다.

관리 길이  $L=1$ 인 경우 S-CUSUM 관리도는 슈하트  $\bar{X}$  관리도와 동일하므로  $k = k_0$ 이며,  $L \geq 2$ 인 경우  $ARL_0$ 을 유지하기 위해서  $k$ 는  $k_0$ 보다 커야 한다. <그림 2>는  $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3.0$ 인 경우,  $k = 3.1, 3.5$

4.0, 및  $\delta = 0.5, 1.0$  각각에 대하여 관리 길이  $L$ 값의 증가에 따른  $ARL_\delta$ 의 변화를 나타낸다. 여기서 주목할 점은, 모든 경우에 있어서  $ARL_\delta$ 가  $L$ 값이 증가함에 따라 감소하는 경향을 나타낸다는 점이다. 즉, 관리 길이  $L$ 이 클수록 S-CUSUM 관리도의 민감도가 증가하는 경향을 보인다. 그러나 마코프체인 전이행렬 크기의 제약으로  $L$ 을 무한정 크게 할 수는 없으며, 현실적으로도  $L$ 이 너무 크면 임계한계  $w$ 값이 영에 근접하여 일치영역과 중간영역의 구분이 어려워질 수 있다. 따라서 본 연구에서는  $L = 100$ 으로 지정하여 S-CUSUM 관리도를 운영할 것을 제안한다. <표 2>는  $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3.0$ 인 경우 ( $ARL_0 \approx 370.4$ ),  $\delta$ 가 0.25에서 5까지 증가할 때 다양한  $k$ 값에 따른  $ARL_\delta$ 의 변화를 나타낸다.  $k = 3.15$ 에서 전반적으로 가장 우수한 특성을 보였으나,  $k = 3.1$ 이나  $k = 3.2$ 인 경우와 큰 차이를 보이지는 않는다. 단,  $k = 3.5$ 나  $k = 4.0$ 과 같이 넓은 관리한계를 사용하면 전반적인 ARL 특성이 저하되는 경향을 보인다. 주목할 만한 사실은 표준화된 공정평균 이동  $\delta$ 가 큰 경우에도 표준 슈하트 관리도에 비해 ARL 성능이 떨어지지 않는다는 점이다. 일례로써  $\delta = 5$ 인 경우, 표준 슈하트 관리도의 ARL은  $ARL_{5,0} = 1 / [\Phi(2) - \Phi(-8)] \approx 1.0233$ 으로서, S-CUSUM 관리도의  $ARL_\delta$ 가 더 작다.

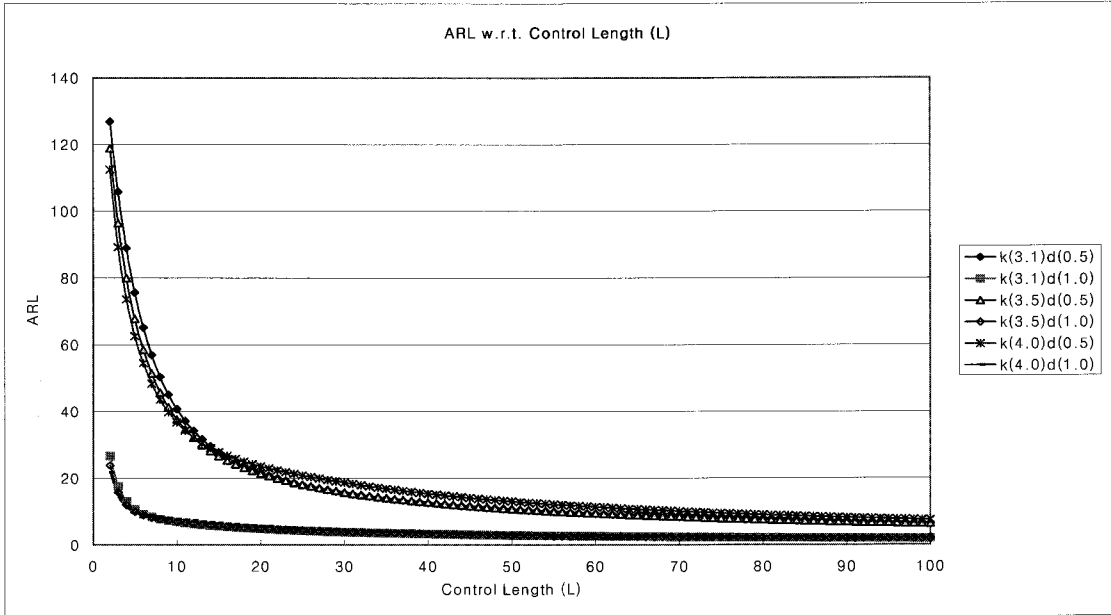
이상의 통계적 특성에 대한 관측결과를 종합하여 S-CUSUM 관리도의 통계적 설계 방안을 다음과 같이 제안한다.

- (1) 슈하트  $\bar{X}$  관리도의 설계모수  $n_0$ ,  $h_0$ ,  $k_0$ 을 명시한다.
- (2) S-CUSUM 관리도의 관리한계  $k = k_0 + \Delta$ 를 지정한다. 단,  $\Delta = 0.1 \sim 0.2$  사이의 값으로 정한다.
- (3) S-CUSUM 관리도의 관리 길이는  $L = 100$ 으로 정하고, <표 1>을 참조하여 임계한계  $w$ 값을 정한다.

이상의 절차는 통계적으로 최적이라고 할 수는 없다. 관리 길이  $L$ 을 증가시키면  $ARL_\delta$ 를 더욱 줄일 수 있는 여지가 있으며, 관리한계  $k$ 값도 최적은 아니기 때문이다. 그러나 이 절차의 가장 큰 장점은 표준화된 공정평균 이동  $\delta$ 값에 무관하게 관리도의 설계 운영이 가능하다는 점이다.

<표 1> L값과 k값에 따른 임계한계 w값의 변화 ( $k_0 = 3.0$ )

k \ L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.1		2.17096	1.66327	1.35319	1.14150	0.98660	0.86785	0.77371	0.69717	0.63369
3.2		2.07054	1.57394	1.27373	1.06963	0.92075	0.80696	0.71700	0.64406	0.58371
3.5		1.97031	1.48541	1.19497	0.99838	0.85549	0.74664	0.66087	0.59152	0.53431
4.0		1.93757	1.45656	1.16930	0.97515	0.83422	0.72699	0.64259	0.57442	0.51824
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3.1	0.58018	0.53446	0.49496	0.46051	0.43019	0.40332	0.37935	0.35784	0.33844	0.32086
3.2	0.53296	0.48971	0.45242	0.41995	0.39145	0.36623	0.34378	0.32366	0.30555	0.28916
3.5	0.48633	0.44554	0.41047	0.38000	0.35331	0.32974	0.30880	0.29008	0.27326	0.25806
4.0	0.47117	0.43120	0.39685	0.36703	0.34094	0.31792	0.29747	0.27921	0.26280	0.24800
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3.1	0.30486	0.29023	0.27682	0.26448	0.25309	0.24255	0.23277	0.22366	0.21518	0.20725
3.2	0.27427	0.26067	0.24823	0.23679	0.22625	0.21651	0.20747	0.19908	0.19126	0.18397
3.5	0.24427	0.23171	0.22022	0.20968	0.19999	0.19104	0.18275	0.17506	0.16791	0.16125
4.0	0.23457	0.22234	0.21117	0.20093	0.19151	0.18282	0.17478	0.16732	0.16039	0.15393
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
3.1	0.19982	0.19286	0.18631	0.18015	0.17434	0.16885	0.16366	0.15875	0.15409	0.14966
3.2	0.17715	0.17075	0.16475	0.15910	0.15378	0.14877	0.14403	0.13954	0.13529	0.13126
3.5	0.15502	0.14919	0.14373	0.13859	0.13376	0.12921	0.12491	0.12085	0.11701	0.11337
4.0	0.14789	0.14225	0.13696	0.13200	0.12732	0.12292	0.11877	0.11485	0.11114	0.10763
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
3.1	0.14546	0.14145	0.13764	0.13401	0.13054	0.12722	0.12405	0.12102	0.11811	0.11532
3.2	0.12743	0.12379	0.12033	0.11703	0.11388	0.11088	0.10800	0.10526	0.10263	0.10011
3.5	0.10992	0.10663	0.10351	0.10054	0.09771	0.09501	0.09244	0.08997	0.08762	0.08536
4.0	0.10429	0.10113	0.09812	0.09526	0.09253	0.08993	0.08745	0.08508	0.08281	0.08064
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
3.1	0.11265	0.11008	0.10762	0.10524	0.10296	0.10076	0.09865	0.09661	0.09464	0.09274
3.2	0.09769	0.09538	0.09315	0.09101	0.08896	0.08698	0.08508	0.08324	0.08147	0.07977
3.5	0.08320	0.08113	0.07915	0.07724	0.07541	0.07364	0.07195	0.07032	0.06875	0.06723
4.0	0.07856	0.07657	0.07466	0.07283	0.07107	0.06938	0.06775	0.06619	0.06468	0.06323
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
3.1	0.09090	0.08913	0.08742	0.08576	0.08416	0.08260	0.08110	0.07964	0.07823	0.07686
3.2	0.07812	0.07653	0.07500	0.07351	0.07208	0.07069	0.06934	0.06804	0.06678	0.06556
3.5	0.06577	0.06436	0.06300	0.06169	0.06042	0.05919	0.05800	0.05685	0.05574	0.05466
4.0	0.06183	0.06048	0.05917	0.05791	0.05670	0.05552	0.05438	0.05328	0.05222	0.05119
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
3.1	0.07553	0.07424	0.07299	0.07178	0.07060	0.06945	0.06833	0.06724	0.06619	0.06516
3.2	0.06437	0.06322	0.06211	0.06103	0.05997	0.05895	0.05796	0.05699	0.05606	0.05514
3.5	0.05362	0.05260	0.05162	0.05067	0.04975	0.04885	0.04798	0.04713	0.04631	0.04551
4.0	0.05019	0.04922	0.04829	0.04738	0.04649	0.04564	0.04480	0.04400	0.04321	0.04245
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
3.1	0.06416	0.06318	0.06223	0.06131	0.06040	0.05952	0.05867	0.05783	0.05701	0.05621
3.2	0.05425	0.05339	0.05255	0.05173	0.05093	0.05015	0.04939	0.04865	0.04792	0.04722
3.5	0.04473	0.04397	0.04324	0.04252	0.04182	0.04114	0.04048	0.03983	0.03920	0.03859
4.0	0.04170	0.04098	0.04028	0.03960	0.03893	0.03828	0.03765	0.03704	0.03644	0.03585
	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
3.1	0.05543	0.05467	0.05393	0.05321	0.05250	0.05180	0.05112	0.05046	0.04981	0.04918
3.2	0.04653	0.04586	0.04521	0.04456	0.04394	0.04333	0.04273	0.04215	0.04158	0.04102
3.5	0.03799	0.03741	0.03684	0.03628	0.03574	0.03521	0.03469	0.03418	0.03369	0.03321
4.0	0.03528	0.03473	0.03419	0.03366	0.03314	0.03264	0.03214	0.03166	0.03119	0.03073



<그림 2> 관리 길이  $L$ 에 대한  $ARL_\delta$ 의 단조특성

<표 2> 다양한  $k$  및  $\delta$ 에 대한  $ARL_\delta(n_0=1, k_0=3.0, L=100)$

$\delta$	$k = 3.05$		$k = 3.1$		$k = 3.15$	
	$w$	$ARL_\delta$	$w$	$ARL_\delta$	$w$	$ARL_\delta$
0.25	0.0582	28.1611	0.0492	26.9386	0.0442	26.9209
0.5	0.0582	6.7354	0.0492	6.4128	0.0442	6.3372
0.75	0.0582	3.1869	0.0492	3.0304	0.0442	2.9788
1	0.0582	2.0472	0.0492	1.9609	0.0442	1.9294
1.5	0.0582	1.3381	0.0492	1.3064	0.0442	1.294
2	0.0582	1.1399	0.0492	1.1261	0.0442	1.1206
2.5	0.0582	1.066	0.0492	1.0594	0.0442	1.0569
3	0.0582	1.0333	0.0492	1.0301	0.0442	1.0289
3.5	0.0582	1.0171	0.0492	1.0155	0.0442	1.015
4	0.0582	1.0083	0.0492	1.0076	0.0442	1.0074
5	0.0582	1.0012	0.0492	1.0012	0.0442	1.0012
$\delta$	$k = 3.2$		$k = 3.5$		$k = 4.0$	
	$w$	$ARL_\delta$	$w$	$ARL_\delta$	$w$	$ARL_\delta$
0.25	0.041	27.4286	0.0332	35.1024	0.0307	56.0768
0.5	0.041	6.3715	0.0332	7.5142	0.0307	11.247
0.75	0.041	2.9731	0.0332	3.3105	0.0307	4.5272
1	0.041	1.9213	0.0332	2.0562	0.0307	2.5812
1.5	0.041	1.2898	0.0332	1.3252	0.0307	1.4768
2	0.041	1.1187	0.0332	1.1324	0.0307	1.1929
2.5	0.041	1.056	0.0332	1.0627	0.0307	1.0918
3	0.041	1.0285	0.0332	1.0324	0.0307	1.0482
3.5	0.041	1.0149	0.0332	1.0175	0.0307	1.0268
4	0.041	1.0075	0.0332	1.0093	0.0307	1.0154
5	0.041	1.0012	0.0332	1.0019	0.0307	1.0043

### 5. 비교연구

표준 슈하트 관리도의  $n_0=1$ ,  $k_0=3.0$ 인 경우, S-CUSUM 관리도의  $k=3.15$ ,  $L=100$ 으로 설정하였을 때, Reynolds 외(1990)의 <Table 2>에 나타난 CUSUM 관리도의  $ARL_\delta$  및 VSI-CUSUM 관리도의  $ATS_\delta$ (Average Time to Signal)와 비교한 결과를 <표 3>에 정리하였다. 단, CUSUM 열에서 FSI는 고정 샘플링 간격(Fixed Sampling Interval), VSI는 가변 샘플링 간격(Variable Sampling Interval)을, 참조값은 감지하고자 하는 공정평균 목표값으로부터의 이탈도 등을 나타낸다. 대부분의 경우에 있어서 S-CUSUM 관리도의  $ARL_\delta$  값이 현저히 감소한 것을 알 수 있다. 단,

$\delta=3, 4$ 의 경우 VSI-CUSUM의  $ATS_\delta$  값이 1.0 및 0.9로서 더 작게 나타나는데, 이는 샘플링구간의 반만큼 시간을 줄여 수정한 값이다(Reynolds et al., 1990).

다음으로 표준 슈하트 관리도의  $n_0=1$ ,  $k_0=3.0$ 인 경우, S-CUSUM 관리도의  $k=3.2$ ,  $L=100$ 으로 설정하였을 때, Lucas and Saccucci(1990)가 제안한 EWMA 관리도의  $ARL_\delta$ 와 비교한 결과는 <표 4>와 같다. 표에서 EWMA 관리도의  $ARL_\delta$ 는 Lucas and Saccucci(1990)의 <Table 3>에서 각  $\delta$ 에 대한 최소값을 정리한 것이다. 모든 경우에 있어서 S-CUSUM 관리도의  $ARL_\delta$ 가 감소한 것을 알 수 있으며, 특히  $\delta=1$ 인 경우에는 80% 가까운 감소율을 나타낸다.

<표 3> CUSUM 및 VSI-CUSUM 관리도와의  $ARL_\delta$  비교

$\delta$	S-CUSUM $k=3.15$		CUSUM (참조값=0.25)		CUSUM (참조값=1.0)	
	$w$	$ARL_\delta$	FSI	VSI	FSI	VSI
0	0.0442	370.3983	370.4	370.4	370.4	370.4
0.25	0.0442	26.9209	76.3	62.8	195.2	187.9
0.5	0.0442	6.3372	25.1	16.4	68.0	57.5
1	0.0442	1.9294	9.4	5.2	12.8	7.5
1.5	0.0442	1.294	5.6	2.9	4.8	2.4
2	0.0442	1.1206	4.0	2.0	2.7	1.4
3	0.0442	1.0289	2.5	1.3	1.3	1.0
4	0.0442	1.0074	1.8	1.1	0.8	0.9

<표 4> EWMA 관리도와의  $ARL_\delta$  비교

$\delta$	$L$	$k$	$w$	$ARL_{S-CUSUM}$	$\lambda$	$ARL_{EWMA}$	감소율
0.25	100	3.2	0.0521	31.9214	0.03	74.1	56.9%
0.5	100	3.2	0.0521	7.268	0.05	28.6	74.6%
0.75	100	3.2	0.0521	3.347	0.1	15.5	78.4%
1	100	3.2	0.0521	2.1113	0.1	10.1	79.1%
1.5	100	3.2	0.0521	1.3548	0.25	5.37	74.8%
2	100	3.2	0.0521	1.1464	0.4	3.47	67.0%
2.5	100	3.2	0.0521	1.0693	0.5	2.47	56.7%
3	100	3.2	0.0521	1.0353	0.75	1.87	44.6%
3.5	100	3.2	0.0521	1.0185	0.75	1.46	30.2%
4	100	3.2	0.0521	1.0093	1	1.22	17.3%
5	100	3.2	0.0521	1.0015	1	1.03	2.8%



## 6. 요약 및 결론

CUSUM 관리도와 적응형 관리도의 특성을 결합하여 만든 S-CUSUM 관리도는 동일한  $ARL_0$  값을 갖는 경우, 기존의 CUSUM 관리도나 EWMA 관리도에 비해 우수한 민감도를 나타낸다. 또한 S-CUSUM 관리도는 관리한계  $k \in [k_0 + 1, k_0 + 2]$ 인 경우  $ARL_0$ 의 큰 변화가 없으며, 관리 길이  $L$ 이 증가함에 따라  $ARL_0$ 가 단조 감소하는 특성을 보이므로 현실적인 공정의 제약을 고려하여 최대의  $L$  값을 설정하는 것이 바람직하다. 즉, 공정평균의 이동 값  $\delta$ 에 따라 일일이 설계 최적화를 도모할 필요가 없으므로, 현장에서 쉽게 사용할 수 있을 것이다.

경제적 측면을 살펴보면, S-CUSUM 관리도는 표준 슈하트 관리도와 동일한 표본크기 및 샘플링구간을 사용하므로 샘플링 비용에는 차이가 없다. 또한 동일한  $ARL_0$ 를 사용하므로 오경보(false alarm) 비용에도 차이가 없다. 반면,  $ARL_0$ 를 현저히 감소시키므로 이상상태 방치비용이 감소하여 총비용의 절감을 기대할 수 있다.

두 가지 방향의 추후연구를 고려할 수 있는데, 하나는 관리 길이  $L$ 이 큰 경우에도 통계적 특성을 계산할 수 있는 방법에 대한 것이고, 또 하나는 가변 샘플링 구간을 적용하여  $ARL_0$  뿐 아니라  $ATS_0$  또

한 감소시키는 방법에 대한 연구이다.

## 참고 문헌

- [1] Brook, D. and Evans, D. A.(1972), "An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length", *Biometrika*, Vol. 59, pp. 639-549.
- [2] Costa, A. F. B.(1997), " $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size and Sampling Interval", *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 197-204.
- [3] Lucas, J. M. and Saccucci, M. S.(1990), "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes : Properties and Enhancements", *Technometrics*, Vol. 32, pp. 1-12.
- [4] Page, E. S.(1954), "Continuous Inspection Schemes", *Biometrika*, Vol. 41, pp. 100-114.
- [5] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 164-176.