

가변샘플링기법을 이용한 합성관리도의 개발

송서일* · 박현규**†

* 동아대학교 산업경영공학과

Development of VSI Synthetic Control Chart

Suh-Il Song* · Hyun-Kyu Park**†

* Dept. of Industrial & Management System Engineering, Dong A University

Key Words : VSI control chart, CRL control chart, Synthetic control chart

Abstract

This paper develops a new VSI \bar{X} -CRL synthetic control chart that considers convenience of use in the field, and perception of change of process applying VSI techniques to synthetic control chart, simultaneously. We found the optimal sampling interval and various control limit factor of the suggested chart using markov chain.

Comparison and analysis is carried out between synthetic VSI \bar{X} -CRL chart and other chart in the statistical aspect ; \bar{X} control chart, VSI \bar{X} chart, another synthetic chart.

In case that the process follows normal distribution, the proposed VSI \bar{X} -CRL synthetic control chart in detecting process mean shift showed the best performance in aspect of statistical performance, regardless of control limit L of CRL/S control chart.

1. 서 론

제품품질을 검사, 관리 그리고 개선하는데 사용되는 많은 기법들 중 통계적 공정관리(SPC)는 공정의 품질과 제품의 품질을 개선하는데 유용하게 사용되고 있는 문제해결도구이다. 이 중에서 관리도는 공정에서 제품 품질의 변동을 초래하는 어떤 변화를 탐지하는 목적을 가지고 공정을 모니터링하는데 사용되고 있다. 대표적으로, Shewhart \bar{X} 관리도가 공정 평균을 모니터링하는데 널리 사용되고 있다. \bar{X} 관리도의 특징은 공정의 평균적이나, 평균의 변화가 작을 때에는 둔감하다는 단점을 가지고 있다.

\bar{X} 관리도의 이러한 단점을 보완하기 위한 많은 연구들이 있었다. 먼저 Nelson(1984)과 Champ와 Woodall(1987)는 기준의 런 규칙(run rules)과 함

께 작은 변화에 민감하도록 런 규칙을 보완하였다. Albin, Kang & Shea(1997)는 결합 \bar{X} -EWMA 관리도를 개발하였다. 그들이 제시한 관리도가 표준 편차가 작은 변화일 때를 제외하고 공정변화를 모니터하는데 민감하다는 것을 제시하였다.

Ncube(1990)는 Shewhart 관리도와 CUSUM 관리도를 결합시키는 것을 제안하였고, Shamma and Shamma(1992)는 공정에서의 작은 평균변화와 일 반적인 평균변화를 감지하기 위하여 이중 EWMA 관리도를 제안하였다.

Wu와 Spedding(2000)은 \bar{X} 관리도와 CRL(conforming run length) 관리도를 결합한 관리도를 개발하였다. 그들은 평균변화가 0.5σ 이상인 경우에는 어떠한 결합관리도보다 우수한 수행도를 가진다는 것을 제시하였다.

일반적으로 전통적인 관리도들은 고정된 샘플링 간격과 샘플 크기로서 공정변동을 감시하므로 관리

† 교신저자 parksssem@donga.ac.kr

한계 근처에 타점되는 샘플 점들에 대하여 공정의 이상여부를 정확하게 감지하지 못하는 단점을 가지고 있다. 따라서 이러한 샘플 점들에 의해 샘플링 구간을 짧게 한다면 보다 빨리 공정의 이상상태를 감지할수 있어 경제적인 낭비를 줄일 수 있는 것이다.

전통적인 관리도의 단점인 고정된 샘플 크기와 샘플링 구간에 대한 문제점을 개선하기 위해서 VSS(variable sample size)와 VSI(variable sample interval) 관리도의 이론이 나타나기 시작하면서부터 여러 학자들에 의해 많은 연구가 행해졌다.

이 이후로 Costa(1994)는 다양한 샘플 크기(VSS)를 갖는 \bar{X} 관리도를 개발하여 수행도 평가를 통해서 우수성을 입증하였다. 그 후 Reynolds, Amin, Arnold와 Nachlas(1988)는 다양한 샘플링 구간을 가지는 \bar{X} 관리도에 대하여 연구하였다. 그리고 Costa(1997)는 다양한 샘플링 구간과 샘플 크기를 가지는 VSSI(Variable Sample Size and Interval) \bar{X} 관리도의 특성을 평가하는 절차로 마코브 연쇄를 사용하였다. VSS 및 VSI 관리도에 대한 많은 연구들이 지금까지 이루어지고 있다.

본 연구에서는, Wu와 Spedding(2000)이 제시한 \bar{X} -CRL 합성관리도를 설계하는데 있어서 VSI 관리도의 기본 개념을 적용함으로써 기존에 제시되었던 합성관리도보다 공정 평균의 변화에 대해서 보다 빨리 반응하는 VSI \bar{X} -CRL 관리도를 설계하고, 제시된 관리도가 공정의 작은변화와 큰변화를 감지하는데 있어서 우수하다는 것을 제시하고자 한다.

2. \bar{X} -CRL 합성관리도

CRL 관리도는 Bourke(1991)에 의해 제안된 것으로써, 그 후 Kaminsky, Binneyan과 Davis(1992), Nelson(1994) 그리고 Goushkovsky(1994) 등에 의해 많은 연구가 진행되었다. 이 관리도는 초기에 계수치 관리도를 위해 개발되었으나, CRL 관리도와 Shewhart \bar{X} 를 결합시킨 합성관리도가 최초로 Wu와 Spedding(2000)에 의해서 제시되었다.

CRL 관리도에서 CRL의 기본 개념은 <그림 1>에 의해서 쉽게 설명될 수 있다. <그림 1>에서 비어있는 원은 양품, 검은색 원은 불량으로 표시 할 때,

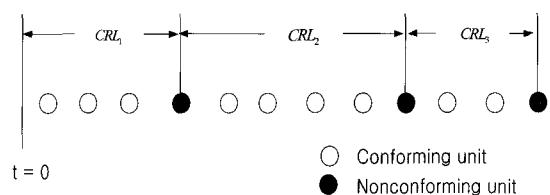
불량이 발견되기 까지의 연속적인 검사수의 길이를 CRL로 표시한다. <그림 1>에서는 공정이 시간 $t=0$ 에서 출발한다고 가정하고, 여기서 $CRL_1=4$, $CRL_2=5$, $CRL_3=3$ 이 된다. CRL 관리도에서 CRL은 불량률 p 가 증가하는 만큼 짧아지고 감소하는 만큼 길어지게 된다.

여기서 확률변수 CRL은 기하분포를 따른다. 따라서, CRL의 평균값 그리고 CRL의 누적 확률 함수는 식 (1)과 식 (2)와 같다.

$$\mu_{CRL} = 1/p \quad (1)$$

$$F_p(CRL) = 1 - (1-p)^{CRL} \quad (2)$$

$$CRL = 1, 2, \dots, .$$



<그림 1> CRL(Conforming Run Length)

공정에서 불량률 p 는 증가하는 것에 대하여 관리한계를 설정하는 것이 바람직하므로 CRL 관리도는 한쪽 관리한계 L 만 설정하게 된다. 이때 L 은 식 (3)과 같다.

$$L = \ln(1 - \alpha_{CRL}) / \ln(1 - p_0) \quad (3)$$

$$\alpha_{CRL} = F_{p_0}(L) = 1 - (1 - p_0)^L$$

α_{CRL} 은 CRL 관리도의 제 1종 오류이고, p_0 는 공정이 안정상태인 경우에 불량률(fraction nonconforming)이다. L 은 식 (3)을 넘지 않는 최대의 정수이다. 만일 각 CRL이 L 과 같거나 더 작게 되면, 불량률은 증가한 것이다. 그러므로 공정은 이상상태로 표시되어진다.

CRL 관리도에서 ARL_{CRL} 은 식 (4)와 같이 구해진다.

$$ARL_{CRL} = 1/F_p(L) = 1/[1 - (1 - p)^L] \quad (4)$$

마지막으로, ANS_{CRL} 은 불량률의 증가를 감지하는데 요구되는 단위당 평균 검사 갯수이다. 이것은 μ_{CRL} 와 ARL_{CRL} 의 곱으로 식 (5)와 같이 나타낼 수

있다.

$$\begin{aligned} ANS_{CRL} &= \mu_{CRL} \times ARL_{CRL} \\ &= (1/p) \times 1/[1 - (1-p)^L] \end{aligned} \quad (5)$$

\bar{X} -CRL 합성관리도는 \bar{X}/S 하위 관리도와 CRL/S 하위 관리도의 2단계로 구성된 관리도로써, CRL 관리도에서 계수치의 양품, 불량품 대신에 \bar{X} 샘플을 사용한다는 것을 제외하고는 일반적인 CRL 관리도와 동일한 방법을 사용하는 것이다.

중요한 사실은, 일반적인 \bar{X} 관리도와 달리, \bar{X} 의 샘플 값이 관리한계를 벗어나도 즉시 이상상태로 판정하지 않고 CRL/S 하위 관리도에서 CRL이 관리하한 (L)보다 작거나 같을 때에 이상상태로 판정하는 것이다.

3. VSI 관리도

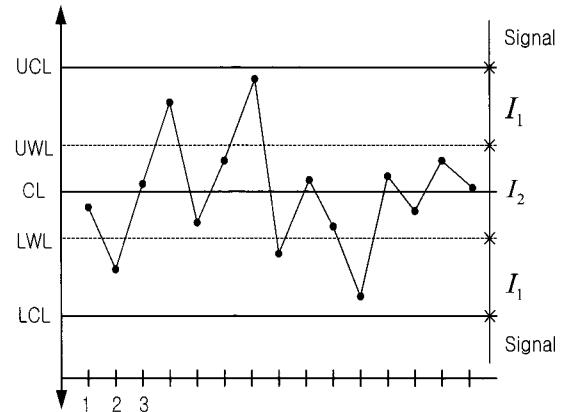
관리통계량이 관리한계선 내에 있더라도 관리한계선 가까이 위치한다면 공정이 이상상태일 가능성이 높기 때문에 샘플링 간격을 짧게 하여 가능한 한 빨리 신호를 발생시켜 조치를 취하도록 하는 것이 바람직하다. 반면, 관리통계량이 목표치 가까이 있다면, 공정이 안정상태에 있다고 할 수 있기 때문에 샘플링 간격을 길게 하여 가능한 한 허위경보(false-alarm)가 발생하지 않도록 하여 불필요한 공정의 중지를 막는 것이 바람직하다. VSI 관리도는 이러한 개념을 구현한 관리도이다.

VSI 관리도는 유한개의 샘플링 구간길이 d_1, d_2, \dots, d_r ($d_1 < d_2 < \dots < d_r$)를 사용한다. 그리고 이와 같은 구간 길이들은 $l_1 \leq d_i \leq l_2$ 를 만족하도록 선택되어지며, l_1 은 최소 구간 길이이고, l_2 는 최대 구간 길이을 말한다. 샘플 구간 함수는 $d(x)$ 로 나타낸다. 일반적인 관리도에서는 관측치들 X_i 의 평균 \bar{X}_i 가 관리도에 타점되며, 관리 중심선을 μ_0 로 두고 관리하한선과 관리상한은 $\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n}$ 와 $\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n}$ 로둔다. 여기서 σ 는 관측치들의 표준편차이고, k 는 주로 3를 사용하는 경우가 많다.

샘플 점이 $(\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n}, \mu_0 + k\sigma/\sqrt{n})$ 을 ν 로 나눈 구간 I_1, I_2, \dots, I_ν 에 있을 때 사용되는 구간 길이는 식 (6)과 같다.

$$d(x) = d_j, \quad x \in I_j \quad (6)$$

$\nu = 2$ 인 경우인 VSI 관리도의 일반적인 개념을 <그림 2>에 나타내었다.



<그림 2> VSI 관리도

<그림 2>에서 UCL과 LCL은 관리상한선과 관리하한선을 나타내며, LWL과 CL은 주로 경고상한선과 경고하한선을 나타낸다. 그리고 d_1 은 샘플 점이 I_1 구간에 있을 때 사용하는 샘플링 구간 길이이고, d_2 는 샘플 점이 I_2 구간에 있을 때 사용하는 샘플링 구간을 의미한다.

4. VSI \bar{X} -CRL 합성관리도

4.1 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 기본개념

본 연구에서 제시하고자 하는 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도는 \bar{X} -CRL 합성관리도에 VSI 기법을 적용함으로써, 보다 공정의 평균변화를 빠른 시간에 감지할 수 있도록 하는 것이다.

먼저 VSI \bar{X} -CRL 관리도를 설계하는 것은 \bar{X} -CRL 합성관리도에서 \bar{X}/S 하위 관리도에 VSI 기법을 적용함으로써 간단하게 설계할 수 있다.

따라서 \bar{X}/S 하위 관리도에서 샘플링하는 구간길이를 타점된 통계량의 위치에 따라서 변화시키면 되는 것이다. 일반적인 VSI \bar{X} 관리도에서와 마찬가지로 \bar{X}/S 관리도의 관리한계를 식 (7)와 같은 샘플링 구간으로 나눌 수 있다.

$$I_1 = [LCL, LWL] \cup (UWL, UCL]$$

$$I_2 = [LWL, UWL]$$

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_0 - k\sigma_{\bar{X}} \\ UCL &= \mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} \\ LWL &= \mu_0 - k'\sigma_{\bar{X}} \\ UWL &= \mu_0 + k'\sigma_{\bar{X}} \end{aligned} \quad (7)$$

단, $k > k'$

이때 관리통계량이 I_1 구간에 속하게되면 그 다음 샘플을 빠른 시간 d_1 으로 하고, I_2 구간에 속하게 되면 긴 샘플링 간격 d_2 에서 다음 샘플링을 하면 된다. 그런데 여기에서 I_1 에 속하는 영역에서 \bar{X}/S 하위관리도의 관리한계선인 UCL 과 LCL 을 통계량이 벗어나도 일단 관리상태를 벗어난 것이 아니라는 것이 주의를 할 필요가 있다. 결국 관리한계선을 벗어나더라도 CRL/S 하위관리도의 관리한계 L 값보다 CRL이 작거나 같지 않으면 공정은 관리상태에 있다. 이때에는 다음 샘플링구간에 따라 샘플을 취하여 \bar{X}/S 관리도에 타점하게 된다. 본 연구에서는 이때 샘플링 간격은 짧은 구간으로 하는 것으로 한다.

4.2 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 운용 방법

VSI \bar{X} -CRL 합성관리도는 VSI \bar{X}/S 하위 관리도와 CRL/S 하위 관리도의 2단계로 구성된 관리도로써 관리도 절차는 다음과 같다.

[단계 1] VSI \bar{X}/S 하위 관리도의 $LCL_{\bar{X}/S}, LWL_{\bar{X}/S}$ 와 $UCL_{\bar{X}/S}, UWL_{\bar{X}/S}$ 그리고 CRL/S 하위 관리도의 관리하한 L 을 결정한다. VSI \bar{X}/S 하위 관리도의 경고한계와 관리한계는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} LWL_{\bar{X}/S} &= \mu_0 - k'\sigma_{\bar{X}} \\ UWL_{\bar{X}/S} &= \mu_0 + k'\sigma_{\bar{X}} \\ UCL_{\bar{X}/S} &= \mu_0 - k\sigma_{\bar{X}} \\ CL_{\bar{X}/S} &= \mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} \end{aligned}$$

여기서 μ_0 는 관리상태 공정평균이고, $\sigma_{\bar{X}}$ 는 각 하위그룹의 평균의 표준편차이다. \bar{X}/S 하위 관리도

의 관리한계 계수 k 와 k' 를 이용한다.

[단계 2] 각 하위그룹의 n 개의 샘플 X_i ($i=1, 2, \dots, n$)를 샘플링하여 샘플 평균 \bar{X} 를 계산한다.

[단계 3] \bar{X} 가 VSI \bar{X}/S 하위 관리도의 경고한계 선구간 $I_2 = [LWL, UWL]$ 에 들어오면 보다 긴 샘플링 구간 d_2 를 사용하여 다음 샘플을 취한다. \bar{X} 가 $I_1 = [LCL, LWL] \cup (UWL, UCL]$ 구간에 들어오면 보다 짧은 샘플링 구간 d_1 를 사용하여 다음샘플을 취한다. \bar{X} 가 관리하한 $LCL_{\bar{X}/S}$ 보다 크거나 상한관리한계 $UCL_{\bar{X}/S}$ 보다 작으면, 이 샘플을 양샘플으로 판정하고 관리도는 [단계 2]로 다시 돌아간다. 그렇지 않으면 샘플은 불량샘플로 판정하고 관리도는 다음 단계로 넘어간다.

[단계 4] 불량샘플이 발생할 때까지 \bar{X} 샘플의 수를 누적시킨다. 이 누적수는 합성관리도에서 CRL/S 하위 관리도의 CRL 샘플로써 취급된다.

[단계 5] 만일 이 CRL 샘플이 CRL/S 하위 관리도의 관리하한 L 보다 크면 그때 그 공정은 관리상태로 판정하고 [단계 2]로 다시 돌아간다. 만약 관리하한보다 CRL이 낮게 나오면 그 공정의 관리도는 관리하한을 벗어난 이상상태에 있고 [단계 6]으로 간다.

[단계 6] 이상상태를 표시한다.

[단계 7] 조치를 취하고 이상원인을 제거한다. 그때 [단계 2]로 돌아간다.

4.3 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 통계적 설계

Wu와 Spedding(2000)은 \bar{X} -CRL 합성관리도를 설계하는데 있어서, 공정의 이상상태가 발생하기 직전에 불량샘플을 발견했다는 조건인 “head start” 조건을 가정하였다. 또한 고정된 샘플링 간격을 1로 설정하는 경우 품질특성치가 정규분포를 따른다는 가정하에, 공정이 관리상태에 있는 경우 ATS가 370.4가 되는 관리모수 (k, L) 의 다양한 값을 제시하였다. 이 값은 합성관리도가 공정이 관리상태에

있을 때 3σ Shewhart 관리도와 같은 ATS를 가지도록 선택되어진 것이다.

본 연구에서는 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도는 관리한계 모수 (L, k, k')를 설정하기 위하여 마코브 연쇄를 이용하며, Wu와 Spedding(2000)의 가정과 동일하게 “head start” 조건을 전제로 통계적 설계를 하였다.

본 연구에서 사용하는 기호는 다음과 같다.

ATS_0 : 관리상태에서 관리도가 이상신호 발생까지의 평균시간

ATS_1 : 이상상태에서 관리도가 이상신호 발생까지의 평균시간

$\pm k$: 통계량이 표준정규분포를 따를 때의 \bar{X}/S 관리도의 관리한계선

$\pm k'$: 통계량이 표준정규분포를 따를 때의 \bar{X}/S 관리도의 경고한계선

Z : 표준정규분포 통계량

p_{01} : 관리상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 관리한계선과 경고한계선 사이에 타점될 확률

p_{02} : 관리상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 경고한계선 사이에 타점될 확률

p_{11} : 이상상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 관리한계선과 경고한계선 사이에 타점될 확률

p_{12} : 이상상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 경고한계선 사이에 타점될 확률

L : CRL/S 관리도의 관리한계선

RL : \bar{X}/S 관리도의 관리한계선내에 연속으로 타점된 \bar{X} 의 길이

먼저, VSI \bar{X} -CRL 합성관리도에서는 샘플링 간격 함수는 식 (8)과 같이 표시할 수 있다.

$$S(Z) = \begin{cases} d_2, & \text{if } -k < Z < k \\ d_1, & \text{if } k < |Z| < k, |Z| > k \text{ and } RL > L \end{cases} \quad (8)$$

여기서 $Z \sim N(0, 1^2)$ 이다.

$E_0[S(Z)]$ 는 변화가 없는 상태에서 $S(Z)$ 의 기대값이다. 식 (9)는 공정이 목표치에 있을 경우 샘플 사이의 기대 시간은 일반적인 \bar{X} -CRL 합성관리도의 샘플링 간격의 길이를 1로서 가정하는 경우, 샘

플링 간격의 기대치가 1과 같도록 k 가 선택된다는 것을 나타낸다.

$$E_0[S(Z) | \mu = \mu_0] = 1 \quad (9)$$

또한 일반적으로 VSI 관리도를 사용함에 있어서 두 개의 샘플링 간격을 사용하는 것이 관리도의 복잡함을 방지할 수 있는 합리적인 방법이고, 실제 현장에 적용하기에 용이한 것으로 알려져 있다.

따라서 본 연구에서도 두 개의 샘플링 간격을 갖는 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도를 고려하기로 한다.

공정은 관리상태 ($\mu = \mu_0$)에서 시작하여 이상원인이 발생하면 공정평균은 목표치 μ_0 에서 $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ 로 바뀐다. VSI \bar{X} -CRL 합성관리도에서 샘플 크기는 n 으로 일정하고, 관리한계선과 경고한계선은 식 (7)을 이용한다.

샘플 크기에 따라서 관리한계선과 경고한계선이 변하게 되므로 관리의 편리성을 위해서 표준정규분포의 통계량을 이용한다. 즉 표준정규분포의 통계량을 Z 로 두고 j 번째 샘플링 간격을 $d(j)$ 라고 하면 $d(j)$ 는 식 (10)과 같이 결정된다.

$$d(j) = \begin{cases} d_1, & \text{if } k' \leq Z_{j-1} < k \\ d_2, & \text{if } -k' < Z_{j-1} < k' \\ d_1, & \text{if } -k < Z_{j-1} \leq -k' \\ d_1, & \text{if } |Z_{j-1}| \geq k \text{ and } CRL > L \end{cases} \quad (10)$$

여기서, $j = 1, 2, \dots$,

제안한 관리도의 모수를 설정하기 위해 FSI \bar{X} -CRL 합성관리도에서의 샘플링 간격 d 와 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 평균 샘플링 간격 \bar{d} 가 동일한 값을 가진다는 가지도록 모수를 설정한다.

이러한 가정하에, 본 연구에서는 이때 마코브 연쇄를 이용하여 ATS를 구하게 된다.

일반적으로 j 번째 관리통계량 Z_j 는 식 (11)과 같은 마코브 연쇄의 전이행렬을 가지게 된다.

$$P = \begin{pmatrix} R & (I - R) \mathbf{1} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

여기에서 R 은 흡수상태가 제거된 과도(transient) 상태로 이루어진 전이 확률행렬로써, 공정에 신호가 발생하기 전까지 관리한계내에서 상태가 전이될 확률들을 의미한다. 결국 R 내에서 흡수상태로 가기

전까지 각 상태에 몇 번 방문하였는가 하는 것이 런 길이 분포를 구성하는 것이 된다.

VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 마코브 연쇄는 \bar{X} 통계량의 런 길이에 기초한 상태에 대한 전이확률을 구해야 한다. 이때 전이확률행렬은 L 값에 달라지게 된다.

예를 들어 $L = 2$ 인 경우 런 길이 3이상은 무조건 관리상태에 해당하므로 각 샘플링 간격 d_1, d_2 에 대하여 각각 3개의 상태만 정의하면 된다.

즉 R 은 6×6 행렬이 되며, 이를 일반화시키면 L 값에 대하여 $2(L+1) \times 2(L+1)$ 행렬을 가지게 된다.

공정이 최초에 어떠한 상태에 있는가하는 문제에 대한 초기 확률벡터는 식 (12)와 같이 $1 \times 2(L+1)$ 행렬이 된다.

$$\mathbf{p}_{int}^T = \left(\frac{p_{01}}{p_{01} + p_{02}}, 0, \dots, 0, \frac{p_{02}}{p_{01} + p_{02}}, 0, \dots, 0 \right) \quad (12)$$

초기확률벡터의 2행부터 L 행까지는 확률 0을 가지고, $L+2$ 행부터 $L+L$ 행까지 확률 또한 0가된다. 이것은 공정이 안정상태이고 런길이(RL)가 1에서 시작한다는 것을 의미한다. 관리상태 t 에서의 ARL과 ATS는 식 (13)과 식 (14)와 같다.

$$ARL = \mathbf{p}_{int}^T (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (13)$$

$$ATS = \mathbf{p}_{int}^T (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (14)$$

여기서 \mathbf{b} 는 샘플 구간 벡터이다. 식 (13)과 식 (14)는 $\mathbf{p}_{int}^T (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$ 의 런 길이 분포행렬에 1의 행렬이 곱해지면 FSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 ARL 값이 되다. 그리고 상태에 따른 \mathbf{b} 구간 벡터가 곱해지면 ATS가 되는 것이다. 샘플 구간 벡터 \mathbf{b} 는 식 (15)와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{b}^T = (d_1, \dots, d_1, d_2, \dots, d_2) \quad (15)$$

여기서 d_1 은 $L+1$ 개, d_2 도 $L+1$ 개가 된다.

ATS를 계산하는데 마코브 연쇄를 구하기 위해서는 전이행렬 P 의 상태정의가 필요하다. 각 상태는 (I_i, RL_j) 로 정의를 하며, $I_i (i=1, 2)$ 는 구간 상태이고 $RL_j (j=1, \dots, L+1)$ 는 런길이가 j 인 상태를 의미한다. 예를 들면 $(1, 1)$ 은 구간 I_1 에 런길이가 1인 상태를 의미하고, $(2, 3)$ 은 구간 I_2 에서 런길이가

3인상태를 의미한다.

ATS 계산을 위한 상태정의는 $L = 2$ 인 경우 R 은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$R = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (1,1) & 0 & p_{r1}(\delta) & 0 & 0 & p_{r2}(\delta) & 0 \\ (1,2) & 0 & 0 & p_{r1}(\delta) & 0 & 0 & p_{r2}(\delta) \\ (1,3) & \frac{(p_{r1}(\delta) - p_{r2}(\delta))p_{r1}(\delta)}{(p_{r1}(\delta) + p_{r2}(\delta))} & 0 & p_{r1}(\delta) & \frac{(p_{r1}(\delta) - p_{r2}(\delta))p_{r1}(\delta)}{(p_{r1}(\delta) + p_{r2}(\delta))} & 0 & p_{r2}(\delta) \\ (2,1) & 0 & p_{r1}(\delta) & 0 & 0 & p_{r2}(\delta) & 0 \\ (2,2) & 0 & 0 & p_{r1}(\delta) & 0 & 0 & p_{r2}(\delta) \\ (2,3) & \frac{(p_{r1}(\delta) - p_{r2}(\delta))p_{r1}(\delta)}{(p_{r1}(\delta) + p_{r2}(\delta))} & 0 & p_{r1}(\delta) & \frac{(p_{r1}(\delta) - p_{r2}(\delta))p_{r1}(\delta)}{(p_{r1}(\delta) + p_{r2}(\delta))} & 0 & p_{r2}(\delta) \end{pmatrix}$$

여기서 r 은 관리도가 표시하는 공정의 상태를 나타내는 기호로써, 0인 경우에는 관리상태를 의미하고 1인 경우는 공정평균이 이동한 상태를 의미한다.

즉, $p_{r1}(\delta)$ 는 공정평균이 $\delta\sigma_x$ 만큼 이동한 경우 각각 관리도가 표시하는 공정상태에 따라서 \bar{X} 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 관리한계선과 경고한계선 사이에 타점 될 확률이고 $p_{r2}(\delta)$ 는 \bar{X}/S 관리도의 경고한계선 사이에 타점될 확률이다. 즉,

$$\begin{aligned} p_{r1}(\delta) &= \Pr [k' < Z_{i-1} < k | n; \delta] \\ &\quad + \Pr [-k < Z_{i-1} < k' | n; \delta] \\ &= \Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(k' - \delta\sqrt{n}) \\ &\quad + \Phi(-k' - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n}) \\ p_{r2}(\delta) &= \Pr [-k' < Z_{i-1} < k' | n; \delta] \\ &= \Phi(k' - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k' - \delta\sqrt{n}) \end{aligned}$$

여기서 δ 는 공정평균의 이동량을 의미하며, $r=0$ 인 경우 $\delta=0$ 가 된다.

$L=2$ 인 경우 ATS를 구하기 위하여 초기 확률벡터와 구간벡터를 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{int}^T &= \left(\frac{p_{01}}{p_{01} + p_{02}}, 0, 0, \frac{p_{12}}{p_{11} + p_{12}}, 0, 0 \right) \\ \mathbf{b}^T &= (d_1, d_1, d_1, d_2, d_2, d_2) \end{aligned}$$

식 (14)를 이용하여 ATS를 구하면, ATS는 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} ATS_0 &= [p_{01} d_1 + p_{02} d_2] / [(p_{01} + p_{02})(1 - p_{01} - p_{02})] \\ &\quad \times 1 / [1 - (p_{01} + p_{02})^2] \\ ATS_1 &= [p_{11} d_1 + p_{12} d_2] / [(p_{11} + p_{12})(1 - p_{11} - p_{12})] \\ &\quad \times 1 / [1 - (p_{11} + p_{12})^2] \end{aligned} \quad (16)$$

위의 방법과 동일하게 하여, $L \leq 3$ 인 경우의 ATS_0 와 ATS_1 를 구하면 식(17)과 같다.

$$\begin{aligned} ATS_0 &= [p_{01}d_1 + p_{02}d_2] / [(p_{01} + p_{02})(1 - p_{01} - p_{02})] \\ &\times 1 / [1 - (p_{01} + p_{02})^3] \\ ATS_1 &= [p_{11}d_1 + p_{12}d_2] / [(p_{11} + p_{12})(1 - p_{11} - p_{12})] \\ &\times 1 / [1 - (p_{11} + p_{12})^3] \end{aligned} \quad (17)$$

또한 $L = 4, 5, \dots$ 로 계속 L 을 증가시키게 되면, L 값에 따라 ATS_0 와 ATS_1 은 식 (18)과 같이 일반화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} ATS_0 &= [p_{01}d_1 + p_{02}d_2] / [(p_{01} + p_{02})(1 - p_{01} - p_{02})] \\ &\times 1 / [1 - (p_{01} + p_{02})^L] \\ ATS_1 &= [p_{11}d_1 + p_{12}d_2] / [(p_{11} + p_{12})(1 - p_{11} - p_{12})] \\ &\times 1 / [1 - (p_{11} + p_{12})^L] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $p = p_{01} + p_{02}$ 이므로 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도와 FSI \bar{X} -CRL의 합성관리도의 ATS_0 와 ATS_1 는 식 (19)과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} ATS_0 &= \frac{p_{01}d_1 + p_{02}d_2}{p_{01} + p_{02}} ATS_0(FSI) \\ ATS_1 &= \frac{p_{11}d_1 + p_{12}d_2}{p_{11} + p_{12}} ATS_1(FSI) \end{aligned} \quad (19)$$

즉, $(p_{01}d_1 + p_{02}d_2)/(p_{01} + p_{02}) = 1$ 인 경우, 공정이 관리상태에서 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 ATS는 FSI 관리도의 ATS와 동일한 값을 가지게 되는 것이다.

VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 관리모수 L, k, k' 를 구하기 위하여, 먼저 FSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 관리모수를 식 (20)에 의하여 구한다.

$$\begin{aligned} ATS_0(FSI) &= 1 / [2(1 - \Phi(k))] \\ &\times 1 / [1 - [2\Phi(k) - 1]^L] \end{aligned} \quad (20)$$

L 은 양의정수 값이므로 L 값의 변화에 따라 의도한 $ATS_0(FSI)$ 를 만족하는 k 값을 설정하게 된다.

k 가 결정된 경우에 $ATS_0(FSI) = ATS_0(VSI)$ 를 가지는 관리모수 k' 를 구 할 수 있다. k' 를 구하는 식은 식 (18)에 기초하여 식 (21)과 같이 정의할 수 있다.

$$\Phi(k') = \frac{(2 - 2d_2)\Phi(k) + (d_1 - 1)}{2(d_1 - d_2)} \quad (21)$$

<표 1> CRL/S 관리도의 관리한계 L 값에 따른 \bar{X}/S 관리도의 k 와 k'

L	k	k'	ATS_1		
			1.0σ	1.5σ	2.0σ
1	1.9437	0.63418	25.263	5.310	1.496
2	2.0850	0.64561	20.638	4.100	1.147
3	2.1642	0.65072	18.612	3.644	1.037
4	2.2190	0.65380	17.442	3.412	0.991
5	2.2606	0.65589	16.669	3.278	0.972
6	2.2941	0.65745	16.127	3.198	0.965
7	2.3220	0.65866	15.725	3.150	0.965
8	2.3460	0.65964	15.424	3.123	0.969
9	2.3669	0.66044	15.190	3.109	0.975
10	2.3853	0.66112	15.000	3.104	0.983
11	2.4019	0.66171	14.854	3.107	0.991
12	2.4170	0.66223	14.741	3.116	0.999
13	2.4308	0.66268	14.653	3.128	1.007
14	2.4434	0.66309	14.580	3.143	1.016
15	2.4552	0.66345	14.529	3.160	1.024
16	2.4661	0.66378	14.488	3.179	1.032
17	2.4763	0.66408	14.459	3.200	1.040
18	2.4858	0.66436	14.437	3.220	1.047
19	2.4948	0.66461	14.425	3.242	1.055
20	2.5033	0.66484	14.421	3.265	1.062

<표 1>은 $d_1 = 0.1, d_2 = 1.9$ 이고, $n = 4$ 인 경우 관리상태의 ATS를 370.4로 되기 위한 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 관리한계모수 L, k, k' 가 정의되어 있다. 또한 <표 1>에는 공정의 평균이 관리상태에서 공정평균의 이동량인 δ 가 $1.0\sigma, 1.5\sigma, 2.0\sigma$ 로 주어진 경우에 ATS_1 를 나타내고 있다.

공정 변화의 크기가 $\delta = 1.0\sigma$ 의 경우에 L 값은 클수록 공정평균의 이동을 잘 감지하는 것으로 나타났다. 공정평균의 이동이 큰 $\delta = 1.5\sigma$ 인 경우에는 $L = 10$ 으로 결정되고, $\delta = 2.0\sigma$ 인 경우에는 $L = 6, 7$ 에서 가장 효율적인 공정의 감시를 수행할 수 있다.

5. 수치실험 및 분석

본 연구에서 제시한 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 수행도 평가를 위해서 공정중심이 이동되었을 때 관리도에 신호가 발생하는 시간 ATS를 기준으로 기준에 제안되었던 여러 가지 관리도와 비교하게 된다.

관리도의 수행도 평가를 위해서 공정이 관리상태의 경우 품질특성치가 정규분포를 따르는 것으로 가정하고 샘플 크기 n 을 4로 하였으며, ATS를 3σ 관리한계를 사용하는 Shewhart \bar{X} 관리도의 ATS와 동일하게 370.4가 되는 관리한계로 모든 관리도를 설계하였다. 공정의 품질특성치는 정규분포를 따르는 것으로 가정하고, ATS를 구하는 모든 과정은 전술한 통계적 과정을 통하여 이루어졌다.

먼저 통계적 설계에서 샘플크기 $n=1$ 과 4인 경우에 공정변동의 크기에 따른 ATS_1 의 값을 최소로 하는 다양한 최적모수를 구하여 <표 2>에 나타내었다.

<표 2> ATS_1 을 최소로 하는 관리모수(VSI, FSI)

case	n	δ	(d_1, d_2)	k	k'	L_{VSI}	L_{FSI}
1	1	1.00	(0.3,1.7)	2.5033	0.6648	20	19
			(0.1,1.9)	2.5033	0.6648	20	19
2	4	1.00	(0.3,1.7)	2.2941	0.6574	6	5
			(0.1,1.9)	2.2941	0.6574	6	5
3	1	1.50	(0.3,1.7)	2.3853	0.6611	10	8
			(0.1,1.9)	2.3853	0.6611	10	8
4	4	1.50	(0.3,1.7)	2.1642	0.6507	3	2
			(0.1,1.9)	2.3669	0.6604	9	2
5	1	2.00	(0.3,1.7)	2.2941	0.6574	6	5
			(0.1,1.9)	2.2941	0.6574	6	5
6	4	2.00	(0.3,1.7)	2.2606	0.6559	5	2
			(0.1,1.9)	2.5033	0.6648	5	2

본 연구에서 비교하고자 하는 계량치 관리도는 공정평균의 변동을 감지하기 위한 관리도로써 다음과 같은 4가지 관리도가 비교하게 된다.

- ① Shewhart \bar{X} 관리도
- ② \bar{X} -CRL 합성관리도

③ VSI \bar{X} 관리도

④ VSI \bar{X} -CRL 합성관리도

<표 2>에서 나타낸 6가지의 최적모수를 가지는 경우 4개의 관리도의 수행도를 ATS_1 측면으로 비교 분석하였다.

<표 3>~<표 8>의 결과를 보면 모든 경우에 대하여 본 연구에서 제안하는 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도가 가장 우수한 수행도를 보인다는 것을 알 수 있다.

이것은 공정평균의 이동량 δ 에 따라서 관리모수 L , k , k' 를 설정하지 않더라도 기존의 관리도보다는 공정변화를 감지하는데 우수한 수행능력을 가지고 있다는 것을 의미하는 것이다.

<표 3> VSI \bar{X} -CRL 관리도의 수행도 평가(case 1)

δ	\bar{X}	\bar{X} -CRL	VSI \bar{X} (d_1, d_2)		VSI \bar{X} -CRL (d_1, d_2)	
			(0.3,1.7)	(0.1,1.9)	(0.3,1.7)	(0.1,1.9)
0.00	370.398	370.542	370.398	370.398	370.546	370.546
0.50	155.224	109.365	144.533	141.479	102.042	100.049
1.00	43.895	20.060	33.566	30.615	15.676	14.421
1.50	14.968	6.489	8.735	6.954	3.993	3.265
2.00	6.303	3.225	2.818	1.822	1.549	1.062
2.50	3.241	1.992	1.189	0.603	0.783	0.434
3.00	2.000	1.442	0.655	0.271	0.498	0.226

<표 4> VSI \bar{X} -CRL 관리도의 수행도 평가(case 2)

δ	\bar{X}	\bar{X} -CRL	VSI \bar{X} (d_1, d_2)		VSI \bar{X} -CRL (d_1, d_2)	
			(0.3,1.7)	(0.1,1.9)	(0.3,1.7)	(0.1,1.9)
0.00	370.398	370.779	370.398	370.398	370.809	370.809
0.50	43.895	22.647	33.566	30.615	17.430	16.127
1.00	6.303	2.735	2.818	1.822	1.362	0.965
1.50	2.000	1.299	0.655	0.271	0.467	0.225
2.00	1.189	1.043	0.361	0.125	0.328	0.122
2.50	1.023	1.003	0.307	0.103	0.304	0.104
3.00	1.001	1.000	0.300	0.100	0.301	0.101

<표 5> VSI \bar{X} -CRL 관리도의 수행도 평가(case 3)

δ	\bar{X}	\bar{X} -CRL	VSI \bar{X} (d_1, d_2)		VSI \bar{X} -CRL (d_1, d_2)	
			(0.3,1.7)	(0.1,1.9)	(0.3,1.7)	(0.1,1.9)
0.00	370.398	370.850	370.398	370.398	370.583	370.546
0.50	155.224	117.344	144.533	141.479	107.747	100.049
1.00	43.895	21.150	33.566	30.615	16.256	14.421
1.50	14.968	6.057	8.735	6.954	3.764	3.265
2.00	6.303	2.817	2.818	1.822	1.408	1.062
2.50	3.241	1.784	1.189	0.603	0.732	0.434
3.00	2.000	1.345	0.655	0.271	0.479	0.226

<표 6> VSI \bar{X} -CRL 관리도의 수행도 평가(case 4)

δ	\bar{X}	\bar{X} -CRL	VSI \bar{X} (d_1, d_2)		VSI \bar{X} -CRL (d_1, d_2)	
			(0.3,1.7)	(0.1,1.9)	(0.3,1.7)	(0.1,1.9)
0.00	370.398	370.737	370.398	370.398	370.701	370.843
0.50	43.895	27.438	33.566	30.615	20.031	15.190
1.00	6.303	3.000	2.818	1.822	1.430	0.975
1.50	2.000	1.261	0.655	0.271	0.460	0.224
2.00	1.189	1.029	0.361	0.125	0.328	0.121
2.50	1.023	1.002	0.307	0.103	0.305	0.103
3.00	1.001	1.000	0.300	0.100	0.301	0.101

<표 7> VSI \bar{X} -CRL 관리도의 수행도 평가(case 5)

δ	\bar{X}	\bar{X} -CRL	VSI \bar{X} (d_1, d_2)		VSI \bar{X} -CRL (d_1, d_2)	
			(0.3,1.7)	(0.1,1.9)	(0.3,1.7)	(0.1,1.9)
0.00	370.398	370.779	370.398	370.398	370.809	370.809
0.50	155.224	123.098	144.533	141.479	113.453	111.367
1.00	43.895	22.647	33.566	30.615	17.430	16.127
1.50	14.968	6.233	8.735	6.954	3.850	3.198
2.00	6.303	2.735	2.818	1.822	1.362	0.965
2.50	3.241	1.700	1.189	0.603	0.703	0.410
3.00	2.000	1.299	0.655	0.271	0.467	0.225

<표 8> VSI \bar{X} -CRL 관리도의 수행도 평가(case 6)

δ	\bar{X}	\bar{X} -CRL	VSI \bar{X} (d_1, d_2)		VSI \bar{X} -CRL (d_1, d_2)	
			(0.3,1.7)	(0.1,1.9)	(0.3,1.7)	(0.1,1.9)
0.00	370.398	370.737	370.398	370.398	370.779	370.546
0.50	43.895	27.438	33.566	30.615	17.998	14.421
1.00	6.303	3.000	2.818	1.822	1.364	1.062
1.50	2.000	1.261	0.655	0.271	0.464	0.226
2.00	1.189	1.029	0.361	0.125	0.327	0.119
2.50	1.023	1.002	0.307	0.103	0.304	0.103
3.00	1.001	1.000	0.300	0.100	0.301	0.100

관리도 운용에 있어서 운영되고 있는 공정에 이상원인이 발생하는 경우 어떤 정도의 공정평균이 변화를 가지는지를 알고 있다는 것은 매우 어려운 일이고 예상치 못한 이상원인이 발생할 수도 있다. 만약 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도가 δ 에 따라서 가장 최적인 모수에서만 다른 관리도보다 수행도가 좋다면 이상원인의 형태에 따라서 관리모수들을 재설정해야 하는 어려움이 있는 것이다. 따라서 <표 3>~<표 8>의 결과는 아주 중요한 것을 의미하는 것으로 어떠한 L 값을 설정하더라도 기존의 관리도보다 공정의 감시에 좋은 결과를 가져올 것이다.

6. 결 론

통계적 공정관리의 여러 가지 기법들에 대한 일반적인 연구 추세는 초기 개발단계에서 이루어졌던 가정들에서 설정한 제약을 완화하거나 혹은 보다 공정의 변동을 빠른 시간에 감지하고자 하는 것에 초점을 맞추고 있으나, 이러한 방법들은 현실에서 잘 들어맞지 않는 경우가 많은 것이다.

본 연구에서 통계적 공정관리의 도구로써 제시하고 있는 관리도설계의 목적은 안정상태에서의 오보확률은 작게하고 이상상태에서의 검정력은 크게 할 수 있는 관리도를 개발하는데 있다. 이러한 목적으로 최근에 개발된 Wu와 Spedding(2000)이 제시한 \bar{X} -CRL 합성관리도에 VSI 관리도의 기본개념을 적용함으로써 새로운 VSI \bar{X} -CRL관리도를 설계하

게 되었다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 통계적 수행도 측면을 비교하기 위해서 기준에 개발되어 있는 3개의 관리도와 비교해본 결과, 공정이 정규분포를 따르는 경우에 개발된 관리도의 통계적 수행도측면에서는 CRL/S 관리도의 관리한 계 L 값에 관계없이 공정평균의 이동을 감지하는 능력은 제안된 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도가 가장 우수하게 나왔다.

둘째, 제안된 관리도의 ATS를 (d_1, d_2) 조합을 $(0.3, 1.7), (0.1, 1.9)$ 로써, 실험해 본 결과 VSI \bar{X} -CRL관리도는 d_1 과 d_2 의 비가 큰 경우일수록 관리도의 검정력이 좋게 나왔다.

본 연구에서 두 가지 조합에서 기존의 관리도와 비교한 결과, d_1 과 d_2 의 비에 관계없이 기존 관리도보다 우수한 수행도를 보였다.

본 연구의 결과에 의해 VSI \bar{X} -CRL관리도는 통계적인 부분에 있어서 기존의 관리도와 비교할 때 우수한 수행도를 가져오므로 생산현장에서 적용함에 있어서 유용한 SPC 도구가 될 수있는 것이다.

추후연구방향으로 본 연구에서 제시된 관리도의 정상상태(steady-state)에 대한 평가가 진행 중이다.

참 고 문 헌

- [1] Albin, S. L., Kang, L. and Shea, G.(1997), "An X and EWMA Chart for Individual Observations," *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 41-48.
- [2] Bourke, P. D.(1991), "Detecting a Shift in Fraction Nonconforming Using Run-Length Control Charts with 100% Inspection," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23 , pp 225-238.
- [3] Champ, C. W. and Woodall, W. H.(1987), "Exact Results for Shewhart Control Chart with Supplementary Runs Rules," *Technometrics*, Vol. 29, pp. 398-399.
- [4] Costa, A. F. B(1994), " \bar{X} Charts with Variable Sample Size", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No. 3, pp 401-407.
- [5] Costa, A. F. B.(1997), " \bar{X} Chart with Variable Smple Size and Sampling Intervals", *Journal of Quality Technology*, Vol. 29 No. 7, pp 401-407.
- [6] Glushkovsky, E. A.(1994), "On-Line G-Control Chart for Attribute Data", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 10, pp. 217-227.
- [7] Kaninsky, F. C., Benneyan, J. C. and Davis, R. D.(1992), "Statistical Control Charts Based on a Geometric Distribution", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, pp. 63-69.
- [8] Ncube M. M.(1990), "An Exponentially Weighed Moving Average Combined Shewhart Cumulative Score Control Procedure", *International Journal of Quality and Reliability Management*, Vol. 7, pp. 29-35.
- [9] Nelson, L. S.(1984), "The Shewhart Control Chart-Tests for Special Causes", *Journal of Quality Technology*, Vol 16, pp. 237-239.
- [10] Nelson, L. S.(1994), "A Control Chart forarts-per-Million Nonconforming Items", *Journal of Quality Technology*, Vol 26, pp. 239-240.
- [11] Reynolds, M. R. and Amin, R. W. and Arnold, J. C. and Nachlas, J. A.(1988), " \bar{X} Charts with Variable Sampling Interval", *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, pp. 181-191.
- [12] Shamma, W. E. and Shamma, A. K.(1992), "Developmaent and Evaluation of Control Charts Using Double Exponentilly Weighed Moving Averages", *International Journal of Quality and Reliability Mana- gement*, Vol. 7, pp. 18-25.
- [13] Zhang, W. and Trevor A. S.(2000), "A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mena", *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, pp. 32-38.