韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19권 제4호. 2005. 11. 699-713

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 4, Nov. 2005. 699-713

여러 가지 평균과 부등식을 이용한 대학수학 학습

김 병 무 (충주대학교)

I. 서 론

대학수학에서 교양으로서 수학은 위기를 맞고 있다. 선택하려는 학생수의 감소와 다른 과목 교수들의 냉대에 더하여 학교 당국도 어려운 수학을 구태여 할 필요가 없으므로 시간수를 줄이는데 가세하고 있다. 이에 대한 대책은 수학에 종사하는 모든 사람이 협조하고 대책을 강구해야 하는 심각한 상황이다. 조금이라도 학생들의 주의를 끌고 수학에 가까이 하게 하려면 폭 넓게 이해할 수 있는 수업, 흥미를 끄는 수업, 감동과 자극을 줄 수 있는 수업이 되도록 하며, 또 숫자 속에서 미와 우아함을 느끼도록 접근해 보는 것도 한 방법이 될 것이다(김병무, 1997). 많은 연구가 이루어져 학생들이 수학수업에 자발적으로 참여하게 하면 좋겠지만 현실은 수학이 갖고 있는 특성 때문에 쉬운 일이 아니다.

수업욕구나 동기가 침체된 학생들에게 활력을 불어넣는 방법으로 한 가지 내용에 대해 다양한 접근을 통해 학생들은 배우고 싶어 한다(김병무, 1999). 대학수학에 대한 흥미를 불어 넣고 더 나은 학습 목표를 이루도록 도와주는 시도로 좌표에 대한 다양한 접근뿐만 아니라(Temple. H. Fay, 2000), 파이의 계산에 대한 다양한 접근(Osler and Wilhelm, 2000), 귀납법에 대한 증명과 연습(Don Hancock, 2000), 대학수학에서 Mathematica를 이용한 파이의 계산(김병무, 2001), 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근(김병무, 2002), 변의 길이가 특별한 길이를 이루는 삼각형(김병무, 2002), Journal "Mathemaics and Computer Education"의 내용들이 대학수학 수업에 흥미를 돋우기 위해 새로운 자료를 제공하고 있다. 대학수학(김병무, 2002) 강의를 통해 다루지 못하는 내용에 대해 보충형식으로 좋은 학습자료를 제시하는 예로 여러 가지 평균과 부등식의 관계(Ayoub B.Ayoub, 2002)와 산술-기하평균 부등식에 대한 다양한 증명방법(Edwin F.Beckenbach and Richard Bellman, 1965)을 소개하고 확장된 부등식에 관심을 기울여 사고의 폭을 넓히는데 도움을 주는 학교 교과목으로 수학을 대학과정에서 마지막으로 접하는 학생들에게 의미를 부여하고 수학을 통해서 문제해결 접근과정이 다양함을 알리려고 한다. 특히, 흥미를 갖게 하기위해 간단하지만 의미 있는 그림이나 도형, 그래프를 이용한 설명이 필요 없는 많은 증명이 평균과 관련하여 문헌에 제시되어 있지만 여기서는 간단히 조화, 기하, 산술, 근호-평균부등식(Sydney Kung, 1990)의 제시와 멱평균에 관련된 내용을 소개하

* ZDM분류 : I15
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 대학수학 학습, 여러 가지 평균과 부등식

고 대학수학에서 다루는 주제에 따라 보충연습으로서 제시되었으면 하는 문제로 산술-기하평균 부등식의 일반화 및 증명법에서 (ㄱ) 귀납적증명 관련 내용을 다룰 때 순귀납법, 역귀납법의 이용, (ㄴ) 이변수 이상의 함수에서 최대값, 최소값을 구할 때 이용하는 Lagrange 승수 증명법의 이용, (ㄷ) 함수방정식을 이용한 증명, (ㄹ) 그래프의 오목,볼록을 정의하고 도함수 관계를 다룰 때 참고적으로 convex 증명법의 이용, (ㅁ) 멱급수 취급에서 흥미를 주는 Sterling의 공식과 majorization 증명, (ㅂ) 적당한 등식을 이용하여 흥미를 끌 수 있는 Hurwitz가 증명, (ㅅ) Euler에 의한 증명, (ㅇ) 산술평균과 기하평균을 이용하는 대수적 관계에 기초한 흥미 있는 증명을 알아본다.

Ⅱ. 본 론

교재에서 접하기 어려운 여러 가지 평균의 도입과 부등식의 관계를 기하학적 방법으로 증명하여 시각적인 도움이 흥미를 불러일으키고 새로운 도전을 하도록 한다. 물론 주어진 그림으로 설명 없이 이해할 수 있지만 간단한 과정을 알아본다.

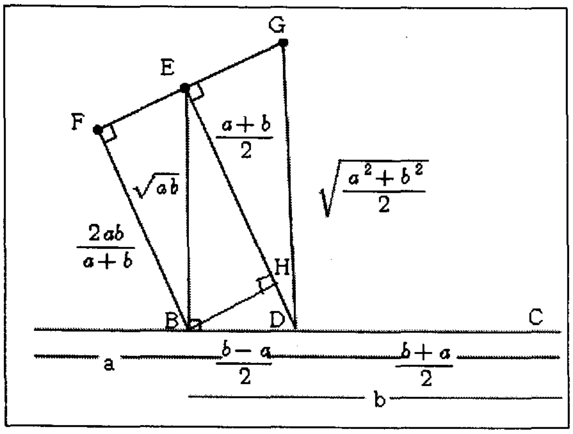
1. H<G<A<R의 기하학적 증명

조화평균, 기하평균, 산술평균, root 평균을 각각

$H=\dfrac{2ab}{a+b}$, $G=\sqrt{ab}$, $A=\dfrac{a+b}{2}$, $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 이라 하면 H<G<A<R임을 다음과 같이 기하학적으로 보일 수 있다. <그림 1>에서, $AB=a$, $BC=b$, $AD=DC=\dfrac{a+b}{2}$, $BE\perp AB$, $DE=AD$, $FE\perp ED$, $FB//ED$, $EG=BD=\dfrac{b-a}{2}$ 이다. AC의 중점 D를 중심으로 반지름의 길이 $\dfrac{a+b}{2}$ 인 반원을 그리고 B에서 AC에 수직인 직선과 반원의 교점을 E라 하면 $BE^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2=\dfrac{4ab}{4}=ab$ 에서, $BE=\sqrt{ab}$ 이고, $DE=\dfrac{a+b}{2}$ 이다. E에서 그은 접선에 B에서 내린 수선의 발을 F라 하면 $\triangle BDE$에서 B에서 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면 $ab=HE\cdot\dfrac{a+b}{2}$ 에서, $BF=HE=\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.

또, $EG=BD=\dfrac{b-a}{2}$ 되게 G를 정하면 $DG=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 이다.

따라서, <그림 1>의 직각삼각형에서 빗변의 길이가 나머지 변의 길이보다 크므로 $BF<BE<DE<DG$이다. 즉 $\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 이다.



$AB=a,\ BC=b$

$AD=DC=\frac{a+b}{2}$

$BE\perp AB,\ DE=AD$

$FE\perp ED,\ FB//ED$

$EG=BD=\frac{b-a}{2}$

<그림 1> proof without words

2. 멱평균(power mean)

기본적인 평균에 대한 여러 가지 확장이 있는데, 그 중의 하나가 멱평균이다. a, b가 양의 실수라면 이들의 멱평균은 $m(r)=\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$ 로 정의된다. $(r>0)$

이 평균의 주요 성질은 r의 증가함수가 된다는 것이다(Edwin F.Beckenbach and Richard Bellman, 1965).

여기서는 미적분을 이용하여 이 사실을 증명하려고 한다. 이 평균을 이용하여 여러 가지 평균과 관련을 짓고 멱평균의 다른 성질도 알아보려고 한다.

(1) $\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$ 은 실제로 a와 b의 평균이다. 즉, $a\le b$이면 $a\le\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\le b$이다.

i) $r>0$일 때 $a^r\le\frac{a^r+b^r}{2}\le b^r$을 보이면 된다.

ii) $r<0$일 때 $a^r\ge\frac{a^r+b^r}{2}\ge b^r$을 보이면 된다. (이들은 산술평균의 성질에 의하여 성립한다.)

(2) 산술평균과 조화평균은 멱평균의 특별한 경우이다.

$m(1)=\frac{a+b}{2}$ 이고, $m(-1)=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}=\frac{2ab}{a+b}$ 이기 때문이다.

(3) $m(0)$은 1^{∞}꼴의 부정형인 반면, 극한 $\lim_{r\to 0}\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}=\sqrt{ab}$이다.

왜냐하면, $\lim_{r\to0} e^{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}}$

$$= \mathrm{Exp}\left[\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)\right]$$

$$= \mathrm{Exp}\left[\lim_{r\to0}\frac{a^r\ln a+b^r\ln b}{a^r+b^r}\right] \text{ (로피탈의 정리 이용)}$$

$$= \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\right] = \mathrm{Exp}\,(\ln\sqrt{ab})$$

따라서, $\lim_{r\to0} m(r)=\sqrt{ab}$

$m(0)$을 $\lim_{r\to0} m(r)=\sqrt{ab}$로 정의하면, 함수 $m(r)$은 $r=0$에서 연속이되므로 $m(r)$은 모든 점에서 연속이다.

$m(r)$의 또 다른 극한도 흥미있다. 즉, $\lim_{r\to-\infty} m(r)=a$이고 $\lim_{r\to\infty} m(r)=b$이다.

$$\lim_{r\to-\infty} m(r)=\lim_{r\to-\infty}\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \lim_{r\to-\infty}\left[a^r\left(\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^r}{2}\right)\right]^{\frac{1}{r}} = \lim_{t\to\infty} a\left[\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{-t}}{2}\right]^{-\frac{1}{t}} = a$$

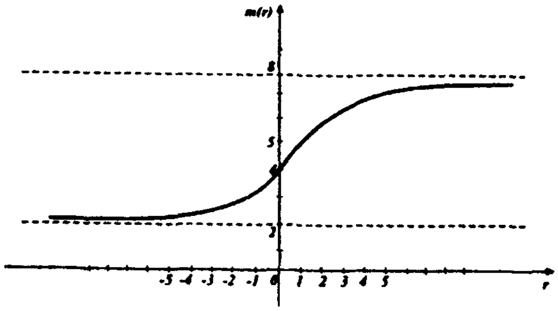
이고

$$\lim_{r\to\infty} m(r)=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to\infty}\left[b^r\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^r+1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \lim_{r\to\infty} b\left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^r+1}{2}\right]^{\frac{1}{r}} = b$$

이다.

$a=2,\ b=8$일 때 함수 $m(r)=\left(\frac{2^r+8^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$의 그래프를 그리면 <그림 2>와 같다.



<그림 2> $m(r)=\left(\dfrac{2^r+8^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$의 그래프

3. 주요 성질의 증명

$m(r)$이 r의 증가함수임을 보이기 위해 우선 $\ln m(r)$이 r의 증가함수임을 보일 것이다.

$m(r)=\left(\dfrac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$에서 $\ln m(r)=\dfrac{1}{r}\ln\left(\dfrac{a^r+b^r}{2}\right)$이고,

$$\frac{d}{dr}(\ln m(r))=\frac{1}{2}\,\frac{2(a^r\ln a+b^r\ln b)}{2(a^r+b^r)}-\frac{1}{r^2}\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{r^2(a^r+b^r)}\left[\frac{a^r\ln a^r+b^r\ln b^r}{2}-\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)\right]$$

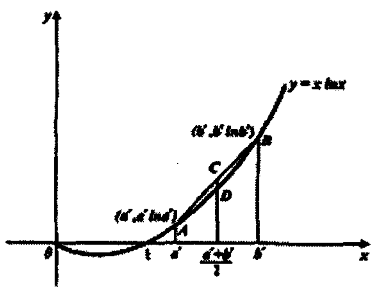
이 도함수가 양수임을 보이기 위해 $x>0$일 때 함수 $y=x\ln x$의 오목볼록을 이용할 것이다.

$y'=1+\ln x$이므로 $y''=\dfrac{1}{x}>0$, 따라서 $y=x\ln x$은 아래로 볼록이다.

두 점 $A(a^r, a^r\ln a^r)$와 $B(b^r, b^r\ln b^r)$가 $y=x\ln x$의 그래프 위의 점이라면 선분 AB의 중점 $C\left(\dfrac{a^r+b^r}{2}, \dfrac{a^r\ln a^r+b^r\ln b^r}{2}\right)$이다<그림 3>.

그래프는 아래로 볼록이므로 점 $D\left(\dfrac{a^r+b^r}{2}, \dfrac{a^r+b^r}{2}\ln\left(\dfrac{a^r+b^r}{2}\right)\right)$는 점 C 바로 수직으로 아래에 있다. 따라서,

$$\frac{a^r\ln a^r+b^r\ln b^r}{2}>\frac{a^r+b^r}{2}\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)$$이다.



<그림 3> 선분 AB의 중점 C

이것은 $\frac{d}{dr}(\ln m(r))>0$을 보인 것이므로 $\ln m(r)$은 증가함수임을 의미한다.

e^x 는 증가함수이므로 $e^{\ln m(r)}=m(r)$은 마찬가지로 증가함수이다.

이 결과를 적용하면, $m(-2)\le m(-1)\le m\left(-\frac{1}{2}\right)\le m(0)\le m\left(\frac{1}{2}\right)\le m(1)\le m(2)$이다.

$a\le m(r)\le b$ 이므로 다음 부등식을 얻는다.

$$a\le ab\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\le\frac{2ab}{a+b}\le\frac{4ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$
$$\le\sqrt{ab}\le\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le b$$

$\sqrt{ab}$는 a와 b의 기하평균(geometric mean)일 뿐만 아니라, 마찬가지로 다음 각 쌍 $\left(ab\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$, $\left(\frac{2ab}{a+b},\frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{4ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2},\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right)$의 기하평균임을 유의해야 한다.

왜냐하면, $\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{a^{-r}+b^{-r}}{2}\right)^{-\frac{1}{r}}=\left(\frac{a^r+b^r}{a^{-r}+b^{-r}}\right)^{\frac{1}{r}}=ab$에서 $m(r)m(-r)=ab$이기 때문이다.

4. 가중 멱평균(weighted power mean)

a와 b의 가중 멱평균은 $\left(\frac{w_1a^r+w_2b^r}{w_1+w_2}\right)^{\frac{1}{r}}$과 같이 정의한다($w_1, w_2>0$, $a, b>0$).

$\frac{w_1}{w_1+w_2}+\frac{w_2}{w_1+w_2}=1$이므로 t와 $1-t$로 바꾸고 가중평균을 다음과 같은 꼴로 나타내도 된다. $m(r,t)=(ta^r+(1-t)b^r)^{\frac{1}{r}}$, $0<t<1$

평균에 이용된 기본적인 접근 방법을 이용하면, 다음을 보일 수 있다.

(1) $\lim_{r\to0}m(r,t)=a^tb^{1-t}$ (가중 기하평균)

왜냐하면, $\lim_{r\to0}m(r,t)=\lim_{r\to0}e^{\ln[ta^r+(1-t)b^r]^{\frac{1}{r}}}$

$$=\mathrm{Exp}\left(\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\ln[ta^2+(1-t)b^r]\right)$$
$$=\mathrm{Exp}\left[\lim_{r\to0}\frac{ta^r\ln a+(1-t)b^r\ln b}{ta^r+(1-t)b^r}\right]$$
$$=\mathrm{Exp}[t\ln a+(1-t)\ln b]=e^{\ln a^t}\cdot e^{\ln b^{1-t}}=a^tb^{1-t}$$ 이다.

(2) 고정된 t에 대해 $m(r, t)$는 r의 증가함수이다.

$m(1, t)=ta+(1-t)b$는 가중 산술평균이고 $m(-1, t)=\frac{ab}{(1-t)a+tb}$는 가중 조화평균이므로 $0<a\leq b$에 대해 $a\leq\frac{ab}{(1-t)a+tb}\leq a^t b^{1-t}\leq ta+(1-t)b\leq b$이다.

이 부등식에서 $t=\frac{1}{2}$이라 놓으면 부등식 (*)를 얻는다.

$$a\leq\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq b$$

5. 멱평균에 대한 산술-기하평균

두 양수 a와 b의 멱평균에 초점을 맞추었다.

이들 성질은 n개의 양의 실수에 대한 멱평균에 대해 성립한다.

즉, $\left(\frac{a_1^t+a_2^t+a_3^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$

$t=2$이면 제곱근 평균 $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{n}}$을 얻는다.

이 평균은 일련의 수의 표준편차를 계산하는데 이용됨을 이해해도 좋다. 이 경우 a_i가 모두 양수일 필요는 없다.

앞에서 다룬 것을 두 가지 측면에서 확장을 생각할 수 있다. 하나는 두 수 a, b를 n개의 수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$에 대해, 다른 하나는 산술-기하평균 부등식을 일반적인 산술-기하평균 부등식에 대한 것이다.

도함수의 성질과 오목볼록함수의 성질을 이용하여 n개의 수에 대한 일반적인 산술-기하평균 부등식을 알아보자.

임의의 양수값 $(x)=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $(\alpha)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$이고 임의의 실수 $t\neq 0$에 대해 비중 (α)를 갖는 값 (x)의 차수 t인 가중평균을

$M_t(x, \alpha)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$ 로 정의한다.

차수 -1, 1과 2의 평균을 각각 조화평균, 산술평균, 거듭제곱근평균이라고 한다.

로피탈의 정리를 이용하면 다음 기하평균을 얻는다. $\lim_{t\to 0}M_t(x, \alpha)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$

더욱이 $x_k=\max(x)$라면 $t>0$에 대해 $\alpha_k^{\frac{1}{t}}x_k \le M_t(x,\alpha) \le x_k$이 되고 $\lim_{t\to\infty} M_t(x,\alpha)=\max(x)$이다. 또, $M_{-t}(x,\alpha)=\dfrac{1}{M_t(\frac{1}{x},\alpha)}$ 이므로 $\lim_{t\to\infty} M_t(x,\alpha)=\min(x)$이다.

따라서, 다음과 같이 정의한다.

$$M_0(x,\alpha)=\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},\ M_{\infty}(x,\alpha)=\max(x),\ M_{-\infty}(x,\alpha)=\min(x)$$

양수 x_i에 대해, $-\infty<t<\infty$에서 $M_t(x,\alpha)$가 증가함수임을 보이려고 한다. 이것을 보이면 일반적인 산술-기하평균 부등식을 증명하는 것이 된다.

우선 볼록함수(convex function)에 대해 시작하자.

$f(x)$의 이차도함수가 $a<x<b$에서 $\dfrac{d^2f}{dx^2}>0$ — (11)이면 $f(x)$의 그래프는 구간 $[a,b]$에서 아래로 볼록이다. 값 $(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$이 모두 구간 (a,b)에 속하고 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$라 하면 $\bar{x}\in(a,b)$이고 평균값정리에 의해, $f(x_i)=f(\bar{x})+(x_i-\bar{x})f'(\bar{x})+\dfrac{(x_i-\bar{x})^2}{2}f''(\xi_i)$이 된다.

α_i를 곱하고 변변 더하면, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)=f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(x_i-\bar{x})^2}{2}f''(\xi_i)$이 되어 (11)에 의해 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\ge f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)$ — (12)가 성립한다. 등호는 모든 x_i가 같을 경우에만 성립한다. 특히, 함수 $f(x)=x\ln x$ $(x\ge 0)$에 대해 $\dfrac{d^2f}{di^2}=\dfrac{1}{x}>0$이므로 부등식 (12)에 의해 모든 양의 값 (x)에 대해 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\ln x_i \ge (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\ln\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$ — (13)이고 등호는 모든 x_i가 같을 경우에만 성립한다.

이제 계산은 $\dfrac{t^2}{M_t(x,\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\dfrac{dM_t(x,\alpha)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\ln x_i^t-(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t)\ln\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j^t$ 이므로 일련의 (x^t)의 값을 식(13)에 적용하여 $\dfrac{dM_t(x,\alpha)}{dt}\ge 0$을 얻는다.

x_i가 모두 같을 경우에만 등호가 성립한다.

따라서, x_i가 모두 같지 않다면 M_t는 t에 대한 증가함수이다.

6. 산술-기하평균 부등식의 다양한 증명방법

다음 정리에 대해 대학수학 수준에서 가능한 여러 가지 증명방법(증명1-증명8)을 소개한다. 우선

Cauchy가 증명한 고전적인 방법을 알아보자.

(정리) $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$**은 음이 아닌 실수이고** $n \geq 1$**이라면**

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad \text{— (1)}$$ **이 성립하고 등호는** x_i**가 모두 같을 때 성립한다.**

(증명1) y_1과 y_2를 임의의 음이 아닌 실수라 하면, $y_1^2+y_2^2 \geq 2y_1y_2$이 성립한다.

$y_1^2=x_1$, $y_2^2=x_2$라 놓으면, $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$ — (2) 이다. ($x_1=x_2$이면 등호 성립)

x_1을 $\frac{x_1+x_2}{2}$로, x_2를 $\frac{x_3+x_4}{2}$로 놓으면

식(2)에서

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}}$$

이 된다.

이와 같은 방법으로 계속하면 $n=1,2,4,\cdots$ 일반적으로 2^n에 대해 부등식이 성립함을 알 수 있다. 이것을 순귀납법(forward induction)이라고 한다.

이제 역귀납법(backward induction)을 이용하여 보자. 즉, n에 대해 부등식이 성립한다고 가정하고 $n-1$일 때 성립함을 보이는 것이다.

$n \geq 2$에 대해 $x_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$로 놓으면 부등식(1)에서

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

을 얻는다. 즉, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$이 되고

양변을 n제곱하고 정리하면 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$이 성립한다.

이것을 2^n에 대한 결과와 결합하면 모든 n에 대해 성립함을 보인 것이 된다.

이번에는 (정리)를 Lagrange 상수와 도함수의 성질을 이용하여 증명하여 보자.

(증명2) 조건 $x_1x_2\cdots x_n=1$을 만족하는 모든 음이 아닌 실수 x_i에 대해 함수 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$을 최소가 되게 하고 싶다. 극소값을 구하기 위해 Lagrange 상수를 이용

할 수 있다.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = x_1 x_2 \cdots x_n - \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}{x_i} - \lambda = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$ 이 되어

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$임을 알 수 있고, $x_i = \frac{1}{n} (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$일 때 유일한 최소점이 된다. 따라서, 부등식(1)이 성립한다.

(정리)의 증명을 함수방정식을 이용하여 접근하려고 한다.

(증명3) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, $x_i \geq 0$인 조건에서 $x_1 x_2 \cdots x_n$을 최대로 하는 문제를 갖고 시작한다. $a \geq 0$, $n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 최대값을 $f_n(a)$로 나타낸다. 함수 $f_n(a)$와 $f_{n-1}(a)$의 관계를 얻기 위해 x_n이 뽑혔다고 하면, 조건 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a - x_n$, $x_i \geq 0$에서 $x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1}$을 최대로 하기 위해 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$으로부터 고르는 것이 된다.

$$f_n(a) = \max_{0 \leq x_n \leq a} [x_n f_{n-1}(a - x_n)] \quad (n = 2, 3, \cdots, f_1(a) = a) \text{ — (3)}$$ 이다.

변수를 $x_i = a y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$로 바꾸면 $f_n(a) = a^n f_n(1)$이 된다.

식(3)을 이용하면 $f_n(1) = f_{n-1}(1) \left[\max_{0 \leq y \leq 1} y(1-y)^{n-1} \right] = \frac{f_{n-1}(1)(n-1)^{n-1}}{n^n}$

$f_1(1) = 1$이므로 $f_n(1) = \frac{1}{n^n}$이 되고 이것은 (1)과 동치이다.

그래프의 오목볼록을 이용하여 (정리)를 증명하려고 한다.

(증명4) 곡선 $y = \log x$ <그림 4>를 이용하려고 한다. 이 곡선은 아래로 오목(위로 볼록)하므로

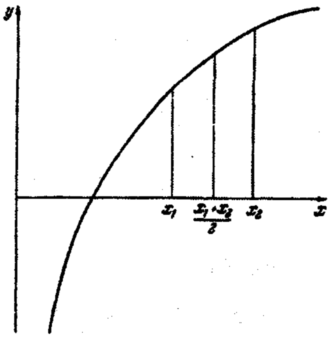
$x_1, x_2 > 0$에 대해 $\log\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2}{2}$

이다. 즉, $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$ 이다.

같은 이유로 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$에 대해

$$\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots \log x_n}{n}$$

이 성립하고, 따라서



<그림 4> 곡선 $y = \log x$

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$이다. 일반적으로 $x_i \geq 0$, $\lambda_i > 0$에 대해

$\log \dfrac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \geq \dfrac{\lambda_1 \log x_1+\lambda_2 \log x_2+\cdots+\lambda_n \log x_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$이 성립하는데 이것은 (정리)보다 더 강한 결과처럼 보인다.

(정리)의 또 다른 흥미있는 증명은 Sterling의 공식과 majorization의 개념을 이용하는 Bohr의 다음 증명이다.

(증명5) majorization의 개념 소개로 시작한다.

$f(y)$, $g(y)$를 $n \geq 0$에 대해 $a_n, b_n \geq 0$인 멱급수라 하자.

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$$

$n \geq 0$에 대해 $a_n \geq b$이면 $f(y) \geq g(y)$라 할 수 있다.

$f_1(y) \geq g_1(y)$이고 $f_2(y) \geq g_2(y)$이면 $f_1(y) f_2(y) \geq g_1(y) g_2(y)$이다.

$N=1,2,\cdots$ 와 $x, y \geq 0$에 대해 $e^{xy} > \dfrac{x^N y^N}{N!}$이 성립하고

$e^{y\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq \dfrac{(x_1 x_2 \cdots x_n)^N y^{nN}}{(N!)^n}$이 된다.

$e^{y^{nN}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nN}} \geq \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{nN}}{(nN)!} \cdot y^{nN}$에서 모든 자연수 N에 대해

$\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nN}}{(nN)!} \geq \dfrac{(x_1 x_2 \cdots x_n)^N}{(N!)^n}$ 또는 $\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^n}{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \left[\dfrac{(nN)!}{(N!)^n}\right]^{\frac{1}{N}}$ — (4) 이다.

$k \to \infty$일 때, $k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$ (Sterling's Formula)이므로

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{(nN)!}{(N!)^n}\right]^{\frac{1}{N}} = n^n \text{ — (5)}$$

(4)와 (5)에서 $\dfrac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$이 성립한다.

다음의 증명은 1891년에 발표된 것이지만 Hurwitz에 의해 적당한 등식을 이용하여 흥미 있게 증명한 것이다.

(증명6) n변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 함수 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 대해 $Pf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$을 x_i의 모든 가능한 $n!$순열의 수로부터 나온 $n!$양만큼 위에서부터 f의 합으로 나타내자.

$Px_1^n=(n-1)!\,(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n), \qquad Px_1x_2\cdots x_n=n!\,x_1x_2\cdots x_n$ — (6)

함수 $\Phi_k(k=1,2,\cdots,n-1)$를 다음과 같은 방법으로 얻는다.

$\Phi_1=P[(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})(x_1-x_2)]$,

$\Phi_2=P[(x_1^{n-2}-x_2^{n-2})(x_1-x_2)x_3]$,

$\Phi_3=P[(x_1^{n-3}-x_2^{n-3})(x_1-x_2)x_3x_4]$,

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\Phi_{n-1}=P[(x_1-x_2)(x_1-x_2)x_3x_4\cdots x_n]$,

$\Phi_1=Px_1^n+Px_2^n-Px_1^{n-1}x_2-Px_2^{n-1}x_1=2Px_1^n-2Px_1^{n-1}x_2$

같은 방법으로,

$\Phi_2=2Px_1^{n-1}x_2-2Px_1^{n-2}x_2x_3$,

$\Phi_3=2Px_1^{n-2}x_2x_3-2Px_1^{n-3}x_2x_3x_4$,

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\Phi_{n-1}=2Px_1^2x_2x_3\cdots x_{n-1}-2Px_1x_2\cdots x_n$

이들을 더하면, $\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_{n-1}=2Px_1^n-2Px_1x_2\cdots x_n$ 또는

(6)에서 $\dfrac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}-x_1x_2\cdots x_n=\dfrac{1}{2n!}(\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n)$ — (7) 이다.

$\Phi_k=P[(x_1^{n-k}-x_2^{n-k})(x_1-x_2)x_3x_4\cdots x_{k+1}]$

$\quad=P[(x_1-x_2)^2(x_1^{n-k-1}+\cdots+x_2^{n-k-1})x_3x_4\cdots x_{k+1}]$ — (8) 이므로

$x_i\geq 0$에 대해 함수 $\Phi_k(x)\geq 0$이다.

(7)에서 좌변은 음수가 아니다. 따라서 (정리)가 성립한다.

Euler에 의한 증명을 알아보자.

(증명7) $x_1x_2\cdots x_n=1$, $x_i\geq 0$에 대해 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n$임을 보임으로서 (정리)를 증명하려고 한다.

n에 대해 성립한다고 가정하고 $x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}=1$이라 하자.

$x_1\geq 1$이고 $x_2\leq 1$인 성질을 갖는 x_i중의 둘을 x_1, x_2라고 하면

$(x_1-1)(x_2-1)\leq 0$ 또는 $x_1x_2+1\leq x_1+x_2$가 된다.

따라서, $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}\geq 1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}$

$\geq 2+x_1x_2x_3+x_4+\cdots+x_{n+1}\geq 3+x_1x_2x_3x_4+x_5+\cdots+x_{n+1}$

$\geq$ - - - - - - - - - $\geq 1+n$ 이다.

$n=1$에 대해 성립하므로, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ 이다.

산술평균과 기하평균을 연결하는 대수적 관계에 기초한 증명이 많이 있다. 다음 증명이 흥미 있는 예가 될 것이다.

(증명8) 다음 식으로 시작하자.

$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n\right] \text{ (단, } A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \text{)}$$

$z \geq 0$와 $n \geq 1$에 대해 부등식 $z^n - nz + n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z - n + 1)$

$z = \frac{G_n}{G_{n-1}}$ 이라 하면 $A_n \geq \frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} - (n-1) + \frac{nG_n}{G_{n-1}}\right]$을 얻거나

간단히 $A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1})$을 얻는다.

$A_n - G_n \geq 0$이 귀납적으로 따라 나온다.

따라서, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ 이 성립한다.

Ⅲ. 결 론

피타고라스의 증명방법이 많다고 중학교 시절 10여개 정도가 소개되었을 것이다(지금까지 알려진 것은 약 260여 가지-Elisha Scott Loomis, 1968). 피타고라스의 증명을 배운 이후 다양한 증명방법을 제공하는 구체적인 예를 접하기 힘들었던 학생들에게 산술평균과 기하평균에 대한 증명 8가지는 의미 있는 사건이 될 것이다. 이것은 하나의 문제에 구체적인 해결방법이 여러 가지일 수 있다는 것을 대학수학에서 보여주는 좋은 예가 될 것이다. 수학의 문제 해결방법이 수학이외의 분야에서도 다양하게 쓰일 수 있음을 알려 수학에 흥미를 갖게 하고 수학의 중요성을 일깨우는데 한 몫을 할 것이라 생각된다. 대학에서 교양으로 수학을 마지막으로 배우는 학생들에게 여러 가지 증명의 기술을 보여줌으로써 수학에 대하여 좋은 느낌을 갖게 하며 지적호기심과 창의력 함양에 수학이라는 도구를 이용하여 동참할 기회를 갖게 한다. 인간의 생각의 폭이 상당히 넓음을 인식하는데 수학이 중요함을 강조하는 계기를 마련하는 것이다. 한 단계, 한 단계 오를수록 시야가 넓어지듯 대학수학 내용의 깊이를 더해갈 수록 새로운 명제 또는 기존 명제에 대한 증명의 방법도 다양해질 수 있다. 새로운 도전에 새로운 이론이 도움을 줄 수 있음을 알 기회를 제공한다.

여기서 제시된 것 이외에 평균의 종류도 더 다양하고, 그들 사이의 관계도 더 복잡하며, 흥미로운

증명도 50여 가지 이상이 문헌(America Mathematical Monthly, College Mathematics Journal, Mathematics Magazine, International Journal of Mathematics and Sciences in Technology, Mathematics and Computer Education, PRIMUS등)에 제시되어 있다. 이들을 대학수학 수업을 듣는 학생들의 수준에 맞게 흥미를 끌며 도전할 수 있는 문제로 변환하여 제시하는 것은 지면을 생각하여 다음 기회로 미루고 여기서 제시한 일부 내용이 대학수학에서 다루지 못한 내용이 훨씬 많고 교재에 제시된 내용에 더하여 발전시키고 다듬어야 할 것이 많이 있음을 알려 학생들이 문제를 보는 관점과 시각을 넓혀 줄 것이다. 대학에서 다루는 각 주제마다 구체적인 유용성을 밝히는 것은 또 하나의 연구분야가 될 수 있다.

참 고 문 헌

김병무 (1997). 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업 자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **36(2)**, pp.127-133.

김병무 (1999). 대학수학 수업모델의 방향과 평가방법, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 제**8**집, pp257-264.

김병무 (2001). 대학수학에서 Mathematica를 이용한 파이의 계산, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 제**11**집, pp.307-319.

김병무 (2002). 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(1)**, pp.91-100.

김병무 (2002). 변의 길이가 특별한 길이를 이루는 삼각형, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(2)**, pp.203-213.

김병무 (2002). 공업수학을 위한 미분적분학의 이해, 서울: 신성출판사.

Ayoub B.Ayoub (2002). Power Mean and Related Inequalities, *Mathematics and Computer Education* **36**, No.1, Winter, pp.37-42.

Don Hancock (2000). Divisibility of a near-product : an exercise in pattern discovery and proof by induction, *Mathematics and Computer Education 34,* No. **1**, Wint. pp.68-73.

Edwin F. Beckenbach & Richard Bellman (1965). *Inequalities*, Spring-Verlag, Berlin-New York, pp.16-19.

Sydney Kung (1990). Harmonic, Geometric, Arithmetic, Root Mean Inequality, *College Mathematics Journal*, Vol. **21**, No. **3**, pp.227.

Nicholas D. Kazarinoff (1961). *Analytic Inequalities*, Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, pp.63-67.

Elisha Scott Loomis (1968). *The Pythagorean Proposition*, The National Council of Teachers of

Mathematics, Inc. Washington, D. C.

Osler, Thomas J. & Wihelm, Michael (2001). Variation on Vieta's and Wallis' Products for pi, *Mathematics and Computer Education*, Vol. 35, No.3, Fall, pp.225-232.

Temple H. Fay (2000). An Introduction to Curves in Elliptic Coordinates, *Mathematics and Computer Education*, Vol. 34, No.2, Spring, pp.169-176.

Teaching Diverse Proofs of Means and Inequalities and Its Implications

Kim, Byung Moo

Dept. of General Arts, Chungju National University, Chungju-Shi, Chungbuk, 380-702, Korea

E-mail: bmkim6@hanmail.net

In this paper, we attempted to find out the meaning of several means and inequalities, their relationships and proposed the effective ways to teach them in college mathematics classes. That is, we introduced 8 proofs ofarithmetic-geometric mean equality to explain the fact that there exist diverse ways of proof. The students learned the diverseproof-methods and applied them to other theorems and projects. From this, we found out that the attempt to develop the students' logical thinking ability by encouraging them to find out diverse solutions of a problem could be a very effective education method in college mathematics classes.

* ZDM classification : I15

* 2000 Mathematics Classification : 97D40

* key word : College Mathematics Learning, Several Means and Inequalities