韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 11. 제 44권, 제 4호, 627-651.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2005, Vol. 44, No. 4, 627-651.

초등학교 3학년 학생의 수학적 문제 해결에서의 표상과 표상의 정교화 과정 분석

이 양 미 (대전흥룡초등학교)
전 평 국 (한국교원대학교)

I. 서 론

교사와 학생 모두 '수학의 내용 영역'에 대해서는 중요성을 인식하면서도, '수학적 과정 영역'에 대해서는 중요성을 덜 인식하는 듯 하다(Fennell & Rowan, 2001). 수학의 내용을 이해하지 못해도 문제를 해결할 수 없지만, 수학적 과정을 사용하지 않고도 문제를 해결할 수 없다. 특히, 학생들이 수학적 표상이나 그들이 표상한 아이디어를 접하게 될 때, 수학적 사고력을 확장시킬 수 있는 강력한 도구를 가지게 될 것이다. 따라서, 학생들에게 수학적 문제를 창의적으로 다양하게 해결할 것을 강조하듯이, 표상도 그렇게 강조해야 할 것이다.

표상(representation)에 대한 정의나 관점은 여러 가지로 볼 수 있지만, '과정과 산출'을 모두 포함하여 이해하는 것이 일반적이다. 즉, 학습자의 인지적인 사고 과정과 그림, 식, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 둘 다 일컫는다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Pape & Tchoshanov, 2001). 따라서, 표상은 수학의 전 영역에 걸쳐 있으며, 수학 교수・학습의 많은 부분을 차지한다고 하겠다. 학생들이 사고를 조직하고 문제를 해결하며, 의사소통을 하는데 표상의 사용은 필수적이다. 학생들은 표상을 통하여 문제에 제시된 정보나 상황을 알기 쉽게 나타내고, 체계적으로 조직하며 추론해간다. 그렇기 때문에 Izsák와 Sherin(2003)은 수학적 내용이나 문제 해결 전략, 학생의 사고에 관한 연구는 학생의 표상을 분석함으로써 이루어져야 한다고 했다. 또한, 교사는 학생의 표상을 통하여 그들의 이해 수준과 사고 과정을 보다 잘 이해할 수 있다. 이처럼, 수학 교육에서 표상은 교사와 학생 모두에게 매우 중요한 요소이다. 특히, 수학적 개념을 이해하고 성공적으로 문제를 해결하는데 핵심적이며 본질적인 부분이라 하겠다(Goldin, 2002; Goldin & Shteingold, 2001; Lubinski & Otto, 2002; Perry & Atkins, 2002).

NCTM(2000) 규준집에서도 이전에는 의사소통의 한 부분으로 논의하던 '표상'을 수학적 과정 영역의 한 부분으로 따로 다루고 있다. Jones(2001)는 수학적 과정 영역에 표상을 새롭게 추가하게 된 이유를 밝히면서, 특히 수학적 문제 해결에서의 표상을 강조했다. 이는 표상을 의사소통의 도구로써 뿐만 아니라, 문제 해결을 위한 도구로써 강조하기 때문이다. 이에, NCTM(2000)에서는 표상에 대한 학습 목표를 다음과 같이 제시하고 있다. 첫째, 학생들은 수학적인 개념을 조직하고 기록하며 의사소통을 하는데 적절하게 표상할 수 있어야 한다. 둘째, 문제 해결에 적절하고 효율적인 표상을 선택하고 적용하며, 표상 체계들간에 유창한 변환을 할 수 있어야 한다. 셋째, 실생활 현상을 모델링하고 해석하기 위해서 표상을 활용할 수 있어야 한다.

여러 연구에서 표상은 학생의 수학적 개념 형성과 문제 해결을 이해하기 위하여 기본적으로 등장하는 주제라 하겠다(Hitt, 1998). 연구자들은 학생이 사용하는 표상과 그들의 수학적 이해 사이에 있는 강한 연결을 끌어내려고 노력해 왔다. 이렇게 표상이 수학 교육 특히, 수학적 문제 해결과 관련하여 핵심적인 요소로 논의되고 있지만, 실제 교육 현장에서는 표상에 대한 중요성을 인식하지 못하거나(Fennell & Rowan, 2001), 학생의 표상에 대

* 2005년 3월 투고, 2005년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : D52
* MSC2000분류 : 97D99
* 주제어 : 수학적 표상, 표상의 정교화 과정, 수학적 문제 해결.

하여 바르게 이해하지 못한 상태에서 지도가 이루어지는 경우(Dufour-Janvier et al., 1987; Seeger, 1997)가 많다.

Dufour-Janvier 등(1987)의 연구에 의하면, 학생들이 수업 시간에 표상을 배우고 교사가 가르친대로 표상하지만, 표상이 문제 해결을 돕는 도구라고 여기지는 않는 것으로 나타났다. 그들은 단지 표를 보고 그래프에 점을 찍거나 기계적으로 방정식을 계산하는 등 표준화된 절차만 따를 뿐, 다양한 표상을 효율적으로 사용하지 않았다고 보고했다. 그렇기 때문에 동일한 문제도 다른 표상 양식으로 제시하면, 서로 다른 문제로 여기고 틀리게 답하는 경우가 생기게 된다. 학생들은 표상을 선택할 때도 문제 해결에 유용한 표상을 선택하는 것이 아니라, 익숙하거나 눈에 띄는 표상을 선택한다며 문제점을 제기했다. 많은 학생들이 능숙하게 계산하고, 식이나 표로 나타낼 수는 있지만, 이를 성공적인 문제 해결로 연결하지 못하거나(Nelissen & Tomic, 1996; Pyke, 2003; Swafford & Langrall, 2000), 다중 표상을 유창하게 사용하고 이를 변환하는 것은 매우 어려워하는 경향이 있다(Pape & Tchoshanov, 2001; Preston et al., 2003). 그런데, 학교에서는 학생들의 이해 수준이나 표상에 대하여 고려하지 않은 채, 미숙한 표상 지도가 이루어지고 있다는 문제점을 제기할 수 있다(Dufour-Janvie, 1987). 따라서 표상이 문제 해결에 결정적인 요소이지만, 적절하지 못한 표상 지도는 학습에 도움이 되지 않으며, 오히려 표상에 대한 학생들의 부정적인 태도를 초래할 수도 있음을 유념해야 하겠다(Dufour-Janvie, 1987; Seeger, 1997).

교사가 학생들의 표상을 정확하게 이해하지 못한 상태에서 교과서에 제시된 표준화된 형태의 표상을 강조하는 경우가 많은데, 교과서 등은 학생의 사고 과정을 간과하고 수학적 기호를 쓰는 것에 너무 강조를 두고 있다는 견해가 많다(예, Kamii et al., 2001). 수업 시간에도 교사나 교과서에 의해서 표준화된 표상이 주어지고, 학생들이 자신의 표상을 구성하거나 탐구할 기회는 거의 없다는 것이다(김남균, 2002; Dufour-Janvie, 1987). 하지만 학생들은 수업 시간에 배운 표준화된 표상만 사용하는 것이 아니라 종종 비표준화된 표상도 사용하며, 이런 표상이 문제 해결에 도움이 되었다는 점에 주목할 필요가 있다(Swafford & Langrall, 2000). 따라서, 학생들이 자신의 표상을 구성하고 사용할 수 있도록 기회를 제공할 것을 권고하고 있다(장혜원, 1997; NCTM, 2000).

그러나 학생의 다양한 표상은 저절로 개발되는 것이 아니라, 기본적이고 간단한 표상일지라도 가르쳐야 한다(Seeger, 1997). 그렇다고 학생들에게 무조건 많은 표상을 제시하면서 사용하도록 강조만 해서는 안될 것이다. Raymond(1994)도 이에 대하여 다음과 같이 언급했다.

> 문제에 대한 효과적인 표상이 성공적인 문제 해결로 이끈다는 것과 그런 표상을 산출할 수 있다는 것은 매우 다 른 것이다. 문제 해결자가 더 훌륭하게 표상할 수 있도록 돕기 위해서 무엇을 가르쳐야 할까? 초보자에게 전문가가 하는 것처럼 표상하라고 말하는 것만으로는 불충분하다. 문제는 이것을 어떻게 할 수 있는가이다(p. 430).

여기서 우리는 표상의 중요성을 인식하고, 학생들이 의미 있는 표상을 하도록 바람직한 지도 방안을 생각해 볼 필요가 있다. 이를 위해서는 먼저, 학생의 표상을 구체적으로 바르게 이해할 필요가 있다. 그래야 학생의 수준이나 상황에 맞는 올바른 표상 지도를 할 수 있기 때문이다. 여러 선행 연구를 살펴보면, 식이나 그래프 등 특정 표상에서의 연구나 극소수 학생을 대상으로 한 것이 많다. 또는, 한 두가지 과제 수행이나 설문 결과에 초점을 둔 것이 많아서 더 구체적인 이해 자료가 필요하다 하겠다. 최근, 교실에서 상호작용을 고려한 연구가 늘고 있는데, 아직 표상에 관한 구체적인 연구는 미흡한 실정이다. Pyke(2003)도 학생들이 '어떻게 표상하고 어떻게 문제 해결에 적용하는지'의 과정에 관한 연구와 이해는 부족하다며, 학생의 수학적 이해와 과제에 대한 해석을 보여주는 표상에 관심을 기울여야 한다고 했다.

국내에서도 표상에 관한 여러 연구가 이루어져왔고, 간접적으로나 부분적으로 표상과 관련한 여러 연구들도 찾아볼 수 있다. 몇몇 표상에 관한 문헌 연구(예, 김선화, 1992), 장혜원(1997)의 표상 모델의 개발에 관한 연구, 김남균(2002)의 초등학교 1학년 학생의 상징화에 관한 연구 등을 들 수 있다. 하지만, 표상의 중요성에 비하여 수행된 연구는 많지 않으며, 특히 초등학생의 표상을 구체적으로 이해하기 위한 연구는 더욱 미흡한 실정이다. 제 7차 수학과 교육 과정(교육부, 1999)에서도 수학적 문제 해결과 수학적 힘의 신장을 강조하고 있지만,

이에 결정적인 요소라 할 수 있는 '표상' 지도에 관한 명시적인 자료는 찾아보기 어렵다. 따라서, 학생들의 표상을 구체적으로 바르게 이해하기 위한 연구가 필요하다 하겠다.

한편, 최근에는 학생들이 구성하는 표상과 상호작용 속에서 협상하여 나타나는 표상을 강조하고 있다(김남균, 2002; 장혜원, 1997; Cobb, 2000). Seeger(1997)도 표상에 관한 이해는 학생의 상호작용과 함께 고려되어야 한다고 주장했으며, 여러 연구에서 개개인의 표상이 상호작용 속에서 정교화되고 문제 해결에 효율적으로 사용될 수 있다는 가능성을 제기하고 있다. Voutsina와 Jones(2001)도 성공적인 문제 해결 전략이 어떻게 일어나는지 알아보기 위해서는 문제를 해결한 다음 정교화하도록 하는 것이 필요하다고 제안한다. 따라서 표상에 관한 연구는 학생들의 상호작용에서 나타나는 구체적인 과정의 기술과 수학적 힘을 신장시킬 수 있는 교수 방법을 마련할 수 있을 때 더욱 의미 있다고 하겠다(Goldin, 2002). 이에, 여러 학급의 개별 학생을 대상으로 일반적인 표상을 살펴보고, 소집단을 대상으로 상호작용 속에서 나타나는 표상을 구체적으로 살펴보기 위한 질적 사례 연구를 병행하는 것은 의미가 있을 것이다.

이 연구의 목적은 초등학교 3학년 학생들이 수학적 문제를 해결하는 과정에서 나타내는 표상과 소집단 협력학습을 통한 표상의 정교화 과정을 구체적으로 살펴봄으로써, 학생들의 수학적 표상을 바르게 이해하고 올바른 표상 지도를 위한 시사점을 얻는데 있다. 이러한 연구의 목적을 위하여 다음과 같이 연구 문제를 설정했다.

첫째, 수학적 문제를 해결할 때 학생들의 표상은 어떠한 형태로 나타나는가?

둘째, 수학적 문제를 해결할 때 학습자 개개인이 한 최초의 표상을 소집단 협력 학습을 통하여 정교화하는 과정은 어떠한가?

Ⅱ. 표상과 수학적 문제 해결

1. 표상의 개념

표상은 상당히 오랫동안 파악하기 어려운 개념이었다(Seeger, 1997). 수학적 표상에 관한 용어나 정의도 연구자나 관점에 따라서 미묘한 차이가 있다. Goldin(2002)은 표상의 일반적인 의미로, "어떤 방식으로 다른 어떤 것을 나타낼 수 있는 것(p. 208)"이라고 하였다. 예를 들면, 구체물을 글로 나타내거나, 물건의 양을 수로 나타내는 것이다. Seeger(1997)는 표상의 오랜 역사와 모호함에 대하여 서술하면서, 표상이 기본적으로 지니고 있는 의미를 4가지로 제시했다. 첫째, 광의의 개념으로, 특정한 내용에 대한 정신적인 상태이다. 이는 내적 표상인 정신적인 이미지를 뜻한다. 둘째, 협의의 개념으로, 이전의 정신적 상태에 대한 정신적인 재산출이다. 셋째, 구조적인 개념으로, 그림이나 상징, 기호를 통해서 나타내는 것이다. 넷째, 다른 어떤 것을 대신하는 것이다. 여기서 세 번째와 네 번째의 개념은 그림, 식, 그래프 등의 외적 표상과 구조적으로 같다고 볼 수 있다.

Jeon(1988)은 '표상'은 '내적 표상'을 의미하기 때문에, 식이나 표, 그래프, 다이어그램 등의 외적 표상은 '수학적 표현'이라고 하는 것이 적절하다고 한다. 장혜원(1997)도 그의 연구에서 정신적 구성물인 내적 표상은 '표상'이라는 용어를 사용했고, 표, 그림, 그래프 등의 외적 표상은 '수학적 표현'이라고 했다. 하지만, 표현과 표상의 상호작용을 강조했고, 이 둘을 포함하는 의미에서 '표상 모델'을 개발했다. 연구자들이 암묵적으로 내적 표상과 외적 표상으로 구분하여 이해하기도 하지만, 명확히 선을 그어 이분화하기보다는 둘의 상호작용을 고려하여 내적·외적 표상을 모두 일컫는 개념으로 '표상'을 사용하는 것이 일반적이라 하겠다. 이는 표상을 '과정과 산출'로 보는 NCTM(2000) 규준집의 정의에서도 찾아볼 수 있다. 즉, '과정'은 학습자의 정신적 사고 과정을 의미하는 내적 표상을 뜻하며, '산출'은 관찰 가능한 외적 표상을 뜻한다.

한편, 학습자의 능동적인 학습을 중요하게 여기는 구성주의는 수학을 '활동'으로 간주하여, '표상'에서 '활동'으로의 초점 변화를 가져왔다. Cobb(2000)은 이와 같은 맥락에서 '상징화(symbolizing)'라는 용어를 사용하여 표상을 '활동'으로써 강조하고 있다. 최근에는 학습자가 구성하는 학습과 상호작용을 강조하면서, 내적 표상과 외적 표상뿐만 아니라 협상되어 나타나는 공유된 표상을 중요하게 여긴다(Cobb, 2000; Greeno & Hall, 1997; Pape & Tchoshanov, 2001). 또한, Lesh와 Doerr(2000)는 문제 해

결과정에서 역동성과 상호작용을 강조하여 모델링을 정의함으로써, 표상과의 미묘한 차이를 설명하려 했다.

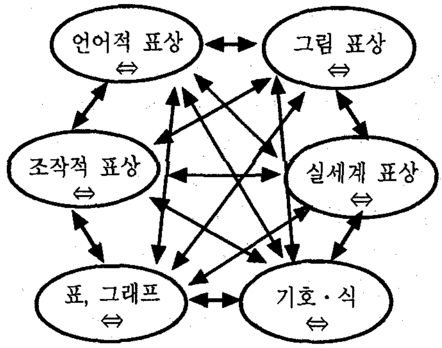
표상과 관련된 각 용어마다 약간의 차이를 두고 있으며, 연구자마다 강조하는 점이나 관점도 조금씩 다르다. 하지만, NCTM 규준집(2000) 등을 비롯하여 수학 교육에 관한 많은 연구에서 '표상'이라는 용어를 가장 보편적으로 사용하고 있다. 관찰 가능한 외적 표상만을 '표현' 등의 용어로 명확히 선을 그어 구분하기 어려운 경우가 있으며, 내적 표상과 외적 표상은 깊은 연관성을 갖고 상호작용한다고 하겠다. 따라서, 본 연구에서는 내적 표상과 외적 표상, 그리고 상호작용 속에서 협상되어 나타나는 공유된 표상을 포함하는 의미로 '표상'을 이해하는 것이 의미 있다고 보고, '표상'이라는 용어를 사용한다.

2. 표상 체계와 표상 양식

표상은 하나씩 독립적으로 존재하는 것이 아니라 하나의 체계를 이루고 서로 연관되어 있다. 동일한 개념이 여러 형식으로 표현될 수도 있으며, 한가지 표현이 여러 가지 의미로 해석될 수도 있다. 따라서 표상 체계에 관한 이해와 이들간의 변환을 고려해 볼 필요가 있다.

널리 알려진 표상 체계에 관한 이론으로 Bruner(1966)의 EIS((Enactive · Iconic · Symbolic representation) 이론을 들 수 있다. Bruner는 활동적 표상→영상적 표상→상징적 표상으로 제시했는데, 이 체계는 너무 광범위하고 활동적 단계에서 상징적 단계로 끝나는 위계적인 3단계라는 비판을 받기도 한다(Seger, 1997). 이에 대하여 Bruner(1966) 자신도 세 가지 표상간의 관계는 더 연구해야 할 과제가 있으며, 하나의 표상에서 다음 단계 표상으로의 변환이 어떻게 효과적인지도 논의의 여지가 있다고 했다. 이에, Tall(1994)은 이 세 가지 표상간의 상호작용을 고려하여 설명하고 있다. 즉, 상징적 표상인 글을 쓰기 위해서는 활동적 체계와 연결되고, 영상적 체계인 그림을 그리기 위해서는 활동적 체계와 연결된다.

내적 표상 체계의 발달에 관심이 많았던 Goldin(2002)은 5가지 내적 표상 체계를 개발하고 이를 강조했다. 하지만 내적 체계와 외적 체계가 깊이 연관되어 있기 때문에, 두 체계 모두에 관심을 가질 것을 제안한다(Goldin & Shteingold, 2001). 따라서, 표상 양식간의 변환을 고려한 표상 체계를 살펴볼 필요가 있다. 한 표상에서 다른 표상으로 변환하는 것은 매우 중요한 문제 해결 방법이기도 하다. Cramer(2002)는 대표적인 Lesh의 변환 모델을 (1)실세계 맥락, (2)그림, (3)구어적 기호, (4)문어적 기호, (5)조작적 도구로 제시했다. 초등학교에서의 수학의 개념이 이 체계의 다섯 가지 양식으로 표상될 수 있다고 제안하면서, 표상 양식간의 변환뿐만 아니라 표상 양식 내의 변환도 고려했음을 강조한다. 장혜원(1997)도 Lesh의 모델을 기초로 실제적 표상, 조작적 표상, 시각적 표상, 언어적 표상, 기호적 표상으로 분류하고, 이 전체를 표상 체계[1]로 본다. 본 연구에서는 Lesh와 장혜원의 표상 체계를 기초로 <그림 1>과 같이 제시한다. 각각의 다이어그램은 표상 양식을 뜻하며, 전체는 표상 체계이다.



<그림 1> 표상 체계와 표상 양식

3. 수학적 문제 해결과 문제 유형

수학적 문제 해결은 수학 교육에서 상당히 중요한 부분으로 강조되고 있는데, 수학적 문제 해결에 관한 그동안의 관점은 크게 3가지로 정리해 볼 수 있다. 첫째, Polya의 문제 해결 단계나 이와 비슷한 문제 해결 과정으로 보는 관점이다. 둘째, 문제 해결에서 메타인지를 강조하는 관점이다. 셋째, 최근의 실생활 문제 해결과 역동적인 상호작용을 강조하는 모델링 관점이다.

1) 장혜원은 내적 표상을 '표상'이라 하고, 외적 표상은 '표현'이라는 용어를 사용하여 '표현 체계'라고 했다. 본 연구에서는 내적 표상과 외적 표상을 함께 '표상'이라고 했기 때문에 일관된 용어 사용을 위하여 '표상 체계'라고 했음을 밝힌다.

여러 문제 해결 과정이나 전략에서 공통적으로 강조한 것은 '문제 표상'이다. 표상에 관한 여러 연구가 문제 해결 맥락에서 이루어지는 것도 표상이 수학적 개념이나 문제 해결 전략과 깊이 연관되어 있기 때문이라 하겠다. 물론 표상에 대한 관점의 변화에 따라서 문제 해결에 대한 관점도 변하고 있다. 예를 들어, Zawojewski 등(2003)은 이전의 전통적인 문제 해결에 관한 전략이 수학 학습에 대한 처방으로 사용될 때 학생들의 성취에 별 도움이 되지 못했다는 선행연구 결과에 주목하면서, 문제 해결전략을 재개념화했다. 한 예로, 전통적인 관점에서는 학생이 문제를 충분히 이해하지 못했을 경우, 틀린 그림을 그리고 문제를 해결하지 못할 수 있지만, 새로운 관점에서는 동료와의 상호작용 속에서 그림을 수정하게 되고 문제를 성공적으로 해결할 수 있다는 주장이다. 이는 문제 해결 과정이 기계적이고 선형적인 과정이 아니라, 역동적이며 상호작용이 중요한 과정임을 강조한 것이다.

또한, 여러 문제 해결 전략에 따라 문제 유형을 분류하기도 하는데, Lenchner(1983)는 12가지 전략 유형을 제시했다. 즉, (1)그림이나 다이어그램 그리기, (2)패턴 찾기, (3)체계적인 목록 만들기, (4)표 만들기, (5)문제를 단순화하여 풀기, (6)시행착오(추측하고 확인하기), (7)실험하기, (8)문제를 실행해보기, (9)거꾸로 풀기, (10)식 세우기, (11)연역법 사용하기, (12)관점 바꾸기이다. 본 연구에서는 이들 유형과 초등학교에서 다루는 표상 체계를 고려하여 6가지 유형으로 범주화하여 문제를 개발했다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

첫째, 수학적 문제를 해결할 때 학생들의 표상이 어떠한 형태로 나타나는지 알아보기 위하여 대전시와 경기도의 3학년 4개 학급 학생 151명을 대상으로 연구를 수행했다. 다만, 분석 과정에서 학습 장애로 거의 응답하지 않은 3명의 활동지는 제외했다. 이들이 다니는 학교는 모두 아파트 단지에 위치하였으며, 학생들의 학업 성취도는 해당 시도에서 중상위권에 해당된다. 학생들은 차분한 편이지만, 자신의 의견은 자유롭게 발표했다. 학부모의 교육에 대한 관심과 열의도 높은 편이었으며, 방과후에는 대부분 개인지도나 특기적성교육을 받고 있었다.

둘째, 학습자 개개인이 한 표상을 소집단 협력 학습을 통하여 어떻게 정교화하는지 알아보기 위하여 경기도 고양시의 C초등학교 3학년 2개 학급에서 각각 5명으로 구성한 2개 소집단을 대상으로 질적사례연구를 수행했다. 연구자의 예비 관찰과 담임 교사의 의견을 종합하고, 본인과 학부모의 동의를 얻어 학급별로 5명씩 모두 10명의 학생이 연구에 참여했다. 연구자는 2개 소집단을 서로 동일하게 구성하려고 노력했으며, 구성원의 학업 성취도와 성비는 일반 교실과 비슷하게 했다(상 2명, 중 2명, 하 1명; 남자 2명, 여자 3명). 다만, 연구의 목적을 위하여 의사 표현을 분명하게 하고 끈기있게 학습하며, 소집단 활동에 적극적인 학생으로 구성하려고 했다. 주택가에 위치한 C초등학교 학생들의 수학 학업 성취도는 중상위 수준으로, 수학적 문제 해결력은 그리 높지 않지만, 문제 해결을 위한 다양하고 독창적인 방법을 제안하고 시도했으며, 담임 교사 모두 이를 존중하며 지도했다.

2. 연구 방법 및 절차

가. 연구 방법

본 연구는 4개 학급 학생들이 수학적 문제를 해결하는 과제 수행에 대한 기술적 연구와 2개 소집단 활동에 대한 질적 사례 연구 방법이 적용되었으며, 양적 분석과 질적 분석이 함께 이루어졌다.

나. 수학적 문제 개발

문제 유형 및 문항 구성	
유형 1	· 그림이나 다이어그램이 주된 표상이 되고 식이나 수 등이 나타날 수 있는 문제로, 문제 상황을 그림이나 다이어그램으로 그려 해결하면 도움이 되는 문제
	1-1: 경마장 문제, 1-2: 등산 문제
유형 2	· 표나 그래프가 주된 표상이 되고 식이 나타날 수 있는 문제로, 문제 속의 정보나 자료를 체계적으로 조직하고 정리하여 해결하면 도움이 되는 문제
	2-1: 과일 조사 문제, 2-2: 동전 문제
유형 3	· 식이 주된 표상이 되고 그림, 기호 등이 나타날 수 있는 문제로, 식을 세워 해결하면 도움이 되는 문제
	3-1: 우유갑 탑 문제, 3-2: 동물 다리 문제
유형 4	· 조작이 주된 표상이 되고 그림이나 식 등이 나타날 수 있는 문제로, 정신적 · 신체적 조작을 통하여 규칙이나 변환을 찾아 해결하면 도움이 되는 문제
	4-1: 접힌 종이 문제, 4-2: 직사각형 문제
유형 5	· 표, 목록, 수형도가 주된 표상이 되고 그림이나 식이 나타날 수 있는 문제로, 여러 경우를 빠뜨리지 않고 체계적인 목록이나 조직으로 해결하는 문제
	5-1: 옷 입기 문제, 5-2: 과녁 문제
유형 6	· 네트워크나 변화표가 주된 표상이 되고 식 등이 나타날 수 있는 문제로, 정보들간의 상호관계나 변화를 네트워크나 변화표로 나타내면 도움이 되는 문제.
	6-1: 스티커 문제, 6-2: 시장 놀이 문제

<그림 2> 문제 유형과 문항별 구성

학생들이 해결할 문제를 특정 영역이나 동일한 유형에 한정하여 제시할 경우, 그들이 다양하게 표상하는 것을 제한할 수 있기 때문에, 6가지 유형으로 범주화하여 여러 문제 유형에서 학생들의 표상을 이해하고자 했다. 문제 유형은 Lenchner(1983)가 제시한 문제 해결 전략과 Lesh와 장혜원의 표상 체계를 바탕으로 범주화했다.

12가지 해결 전략은 나타나는 표상에 따라 (1)그림이나 다이어그램, (2)식 세우기, (3)체계적인 목록과 표 만들기, (4)그래프 그리기, (5)조작하기로 정리할 수 있다.

이를 초등학교 교육 과정에 나와 있는 표상 양식과 관련하여 <그림 2>와 같이 6가지 유형으로 범주화하고, 유형별로 2문제씩 12문제를 개발했다. 보조 삽화나, '표로 해결해 보시오'등과 같은 조건은 학생들이 선택하는 표상에 영향을 미칠 수 있기 때문에, 보조 삽화나 특정 표상을 사용하라는 조건은 제시하지 않았다. 개발한 문제는 2회의 예비 검사를 통하여 수정 · 보완하고, 전문가와 현직 교사의 검토를 통하여 타당도를 높였다.

다. 연구 절차

본 연구의 절차는 <그림 3>과 같이 나타낼 수 있다.

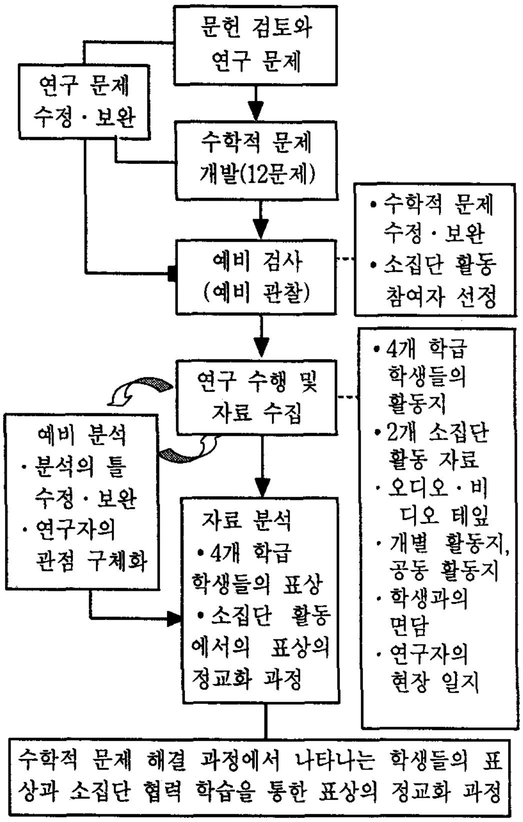
첫째, 문헌 연구와 연구 문제 설정 단계로, 연구자의 현장 경험과 학생의 수학적 표상에 관한 궁금증 및 필요성에서 출발하여 관련 문헌을 검토하면서 연구의 필요성과 목적을 정당화하고, 연구 문제를 설정했다.

둘째, 수학적 문제의 개발 단계로, 학생들의 표상을 구체적으로 이해하기 위하여 연구에 사용될 수학적 문제를 6가지 유형으로 범주화하여 12문제를 개발했다.

셋째, 예비 검사와 예비 관찰 단계로, 두 차례의 예비 검사를 통하여 문제를 수정 · 보완하고, 소집단 활동 참여자를 선정하기 위하여 수학 수업을 관찰했다. 연구자의 관찰 자료와 담임 교사의 의견을 종합하여 참여자를 선정하고, 본인과 학부모의 동의를 얻는 과정이었다.

넷째, 연구 수행과 자료 수집 단계로, 연구를 수행하고 관찰하면서 연구에 관련된 자료를 수집했다. 먼저 4개 학급 151명의 학생들이 문제를 해결한 활동지를 수집했으며, 질적 사례 연구에서 2개 소집단 참여자들의 다양한 자료를 수집하는 과정이었다.

다섯째, 분석 단계로, 자료 수집 과정에서 예비 분석을 통하여 연구자의 관점과 분석틀을 다듬고 구체화했으며, 이후 종합적인 분석이 이루어졌다. 분석한 내용은 현직 교사의 검토 과정을 거쳐 타당도를 높였다.



<그림 3> 연구 절차

3. 자료 수집

가. 문서 자료

수학적 문제를 해결할 때 나타나는 학생들의 표상 양식과 표상 형태를 알아보기 위한 중심 자료로 학생들이 문제를 해결한 활동지를 수집했다. 7월 3일부터 4일 동안 연구자가 대전시와 경기도의 4개 학급을 직접 방문하여 연구를 수행하고, 151명의 활동지를 수집했다. 또, 7월 8일부터 2주 동안 경기도 C초등학교의 2개 소집단을 대상으로 질적 사례 연구를 수행하고, 참여자 10명의 개별 활동지와 연습지, 소집단 공동 활동지를 수집했다. 소집단 활동에서 학생들은 하루에 2과제씩 수행했는데, 개별로 문제를 해결하여 개별 활동지에 나타낸 다음, 공동으로 해결하고, 최종적으로 공동 활동지에 나타냈다.

나. 관찰 자료

학생의 활동지에 나타난 것만으로는 표상의 정교화 과정을 구체적으로 정확하게 이해하기 어렵다. 따라서 2개 소집단의 활동 과정을 음성 녹음기와 캠코더로 녹음·녹화했다. 이를 컴퓨터 프로그램으로 저장하고 반복하여 들으면서 전사하여 자료로 수집했다. 또, 학생들이 소집단 활동을 할 때의 상황이나 시청각 매체에서 놓칠 수 있는 요소들을 보충하고 특정 상황을 상세하게 이해하기 위하여 연구자는 학생들의 활동 과정을 관찰하면서 현장 일지를 기록하고 자료화했다.

다. 면담 자료

면담 자료는 관찰이나 활동지에 나타나지 않은 정보를 제공해 주고, 활동지나 활동 과정에서 나타난 현상 중에서 궁금하거나 특이한 점을 심층적으로 이해하는데 도움이 된다. 이를 위하여 연구자는 소집단 참여 학생들과 연구 수행 전의 사전 면담, 소집단 활동일의 당일 면담, 연구 수행 후의 사후 면담을 실시했다. 면담 내용은 녹음하여 전사하거나 연구자가 간단히 기록하여 자료화했다. 각 면담의 초점과 형태는 <그림 4>와 같다.

구분	면담의 초점	형태
사전 면담	·소집단 협력 학습에 관한 내용 ·수학적 표상에 대한 내용	비구조적 면담
소집단 당일 면담	·활동 중에 나타난 특이한 사항 ·활동 중 이해하기 어렵거나 명확하지 않았던 내용	비구조적 면담
사후 면담	·개별 학생의 표상에서의 변화 ·동료의 표상에 대한 이해 정도 ·소집단 활동을 통한 표상 활동에 대한 견해	반구조적 면담, 설문지

<그림 4> 면담의 초점과 형태

4. 자료 분석

수학적 문제를 해결할 때 나타나는 학생의 표상 형태를 알아보기 위하여 148명 학생의 활동지를 주로 분석했으며, 개개인의 표상을 소집단 협력 학습을 통하여 공동의 표상으로 정교화하는 과정을 알아보기 위하여 2개 소집단의 사례 연구에서 수집한 모든 활동지와 관찰 자료, 면담 자료를 분석했다.

가. 수학적 문제를 해결할 때 나타나는 학생들의 표상 형태

4개 학급의 학생 151명의 활동지 중에서 학습 장애로 인하여 10% 미만 응답한 3명의 활동지는 제외하여 148명의 활동지를 분석했다. 활동지에 나타난 내용을 분석하여 학생들의 표상 양식(그림, 식, 표, 그래프 등)과 표상 형태(일반적인 표상과 특이한 표상, 표준화된 정도 등)를 알아보았다. 먼저, 148명 학생의 활동지를 문제 1-1부터 문제 6-2까지 과제별로 분류하고, 문제 유형별로 나타난 그림, 표, 그래프, 식, 조작, 언어적 묘사의 표상 양식 빈도수와 비율을 분석했다. 그 다음, 표상 형태를 더 구체적으로 분석하기 위하여 각 문항에 대한 148명의 활동지를 분석함으로써, '그림이나 다이어그램을 그리고 식으로 나타낸 경우, 표와 식으로 나타낸 경우, 식으로만 나타낸 경우' 등으로 범주화하여 각각에 해당하는 학생 수와 백분율을 구했다. 이를 바탕으로 문항별로 학생들이 나타낸 일반적인 표상이나 특이한 표상, 유추할 수 있는 해결 전략 등을 분석하여 기술했다.

나. 개개인의 표상을 소집단 협력 학습을 통하여 정교화하는 과정

자료를 수집하는 과정에서의 분석과 자료 수집이 끝난 다음의 분석을 통하여 학습자 개개인이 한 표상을 소집단 협력 학습을 통하여 어떻게 공동의 표상으로 나타내고 정교화하는지 살펴보았다. 이를 3가지 주제에 따라 (1)참여자 개개인의 표상이 변화된 상태(표상 양식과 표상의 수학적 세련됨), (2)표상의 정교와 과정(문제 이해, 구체적 방안, 공동의 표상으로 협상, 공동으로 해결, 검토및 정리 · 기록), (3)정교화 과정에서 나타나는 패턴(참여자 개개인의 표상, 협상되어 나타난 공동의 표상, 정교화 과정에서 나타나는 중심 현상)을 분석했다.

종합적인 분석 과정은 다음과 같이 이루어졌다. 첫째, 참여자 개인별로 12장의 개별 활동지에 나타난 개별 표상을 통하여 문제 해결에서 나타난 개별 표상의 특징이나 변화되는 내용을 분석했다. 둘째, 각 문항별로 소집단 구성원 5명의 개별 활동지와 연습지, 공동 활동지, 관찰과 면담 자료를 하나의 분석 단위에 대한 세트자료로 보고, 모두 24문제에 대한 활동 자료를 정리하여 표상의 정교화 과정에 대한 흐름과 내용 및 정교화 수준을 분석했다. 셋째, 24개 활동 자료로 표상의 정교화 과정을 분석함으로써, 공통적으로 나타나는 표상의 정교화 과정에 대한 메카니즘을 발견하고 도식화했다. 발견한 정교화 과정의 흐름에 따라 24개 활동 과정을 주제별로 코드화하고, 중심적인 내용을 분석했다. 넷째, 표상의 정교화 과정에서 나타나는 유형을 분석하기 위하여 예비 분석에서 마련한 틀을 자료 수집 후 <그림 5>와 같이 구체화하고, 이에 따라 분석했다. 정교화 과정의 패턴별로 (1)참여자 개개인의 표상, (2)협상되어 나타난 공동의 표상, (3)정교화 과정에서 나타난 현상에 대하여 분석했다.

분 류	유형이 나타나는 맥락의 특징
더욱 세련되고 발전하는 패턴	개별 표상과 문제 해결도 대체로 성공적이었는데, 논의가 활발히 일어나고 구성원들이 서로의 표상을 잘 이해하고 다듬어서, 더욱 세련되고 수학적으로 의미 있는 표상이 나타난다.
미흡했으나 발전하는 패턴	개별 표상은 미흡했거나 성공적으로 문제를 해결하지 못했는데, 소집단 협력 협력 학습 과정에서 문제를 성공적으로 해결하고, 세련되게 정교화한 표상이 나타난다.
개개인의 표상이 공존하는 패턴	하나로 종합되고 범위가 좁혀지기보다는 각자의 표상이 공존하여 문제 해결에 의미 있는 표상으로 나타난다.
전략 중심으로 정교화하는 패턴	표면적으로 깔끔하게 다듬어 나타내기보다는 발전적인 전략에 중점을 두어 정교화한 표상이 나타난다.
빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴	부분적인 참여로 협상이 이루어진 표상이거나, 수학적으로 덜 세련된 표상으로 나타난다.

<그림 5> 표상의 정교화 패턴 분석틀

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 문제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 표상

가. 문제 유형별로 나타난 표상 양식

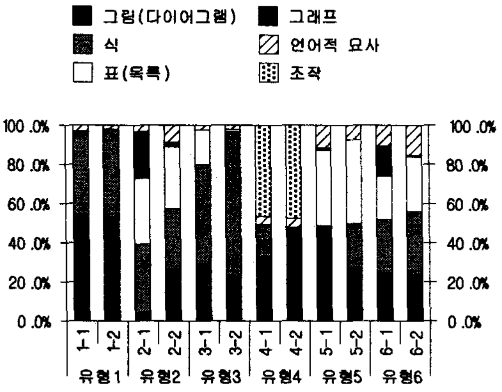
6가지 유형의 수학적 문제를 수행한 148명의 활동지

에 나타난 문제 유형별 표상 양식의 빈도수와 비율을 분석한 결과는 <표 1>과 <그림 6>과 같다.

<표 1> 문제 유형별로 나타난 표상 양식의 빈도수와 비율

표상 양식 \ 문제 유형		유형1		유형2		유형3		유형4		유형5		유형6		계
		1-1	1-2	2-1	2-2	3-1	3-2	4-1	4-2	5-1	5-2	6-1	6-2	
그림	횟수	145	142	12	51	79	44	90	132	93	53	68	62	909
	%	54.7	53.0	4.4	26.8	29.7	23.2	32.6	47.7	47.2	27.5	24.9	23.9	
식	횟수	106	121	95	58	134	140	46	0	3	43	73	83	819
	%	40.0	45.1	34.9	30.5	50.4	73.7	16.7	0	1.5	22.3	26.7	32.0	
표·목록	횟수	2	0	91	60	47	2	0	0	76	83	61	72	422
	%	0.8	0	33.5	31.6	17.7	1.1	0	0	38.6	43.0	22.3	27.8	
그래프	횟수	4	0	65	4	0	0	0	0	2	0	42	2	117
	%	1.5	0	23.9	2.1	0	0	0	0	1.0	0	15.3	0.7	
언어적 묘사	횟수	8	5	9	17	6	4	11	13	23	14	29	40	139
	%	3.0	1.9	3.3	8.9	2.3	2.1	4.1	4.7	11.7	7.3	10.6	15.4	
조작	횟수	0	0	0	0	0	0	129	132	0	0	0	0	261
	%	0	0	0	0	0	0	46.6	47.7	0	0	0	0	
N		265	268	272	190	266	190	276	277	197	193	273	259	2,667

* 횟수는 148명의 활동지에 나타난 표상 양식을 표상의 옳고 그름에 관계없이 센 수이며, N은 각 문항에 나타난 148명의 표상 양식의 합계임. * %는 횟수/N임.



<그림 6> 문제 유형별로 나타난 표상 양식의 비율

<표 1>과 <그림 6>에서처럼 전반적으로 그림과 식이 빈번하게 나타났지만, 일반적으로 한 가지 표상만 사용하기보다 2~3가지 표상을 사용하여 문제를 해결한 것으로 나타났다. 하지만, 학생들이 사용한 다중 표상이 효율적인 문제 해결로 연결되었다고 보기는 어려웠다. 왜냐하면, 문제 상황과 관련 없는 표상을 하거나 문제를 구조적으로 나타내지 않은 경우, 그림 등으로 바르게 표상하고도 식으로 적절하게 변환하지 못한 경우 등이 적지 않게 나타났기 때문이다.

유형 1과 유형 3의 문제에서는 90% 이상의 학생이 그림과 식을 사용했다. 유형 3에서는 [동물 다리 문제]보다 좀 복잡한 [우유갑 탑 문제]에서 그림이 빈번하게 사용된 것으로 보아, 문제의 복잡한 상황을 직접 식으로 나타내기보다 먼저 그림으로 시각화하는 것이 학생들에게 도움이 되었다고 볼 수 있다. 따라서 그림과 식은 3학년 학생들에게 매우 익숙한 표상으로 여겨졌으며, 식은 매우 표준화된 형태로 나타났다.

유형 2의 문제에서 나타난 표상 양식은 두 문제간에 큰 차이를 보였다. [과일 조사 문제]에서는 표와 그래프가 주된 표상이었지만, [동전 문제]에서는 40%의 학생만 표로 해결할 뿐, 식으로 해결한 학생이 많았는데, 대부분 정확한 식을 세우지 못했다. 이는 동일한 유형의 [과일 조사]문제에서 대부분 표로 자료를 정리하여 문제를 해결한 것과는 대조적이어서, 학생들이 자료를 정리하여 나타내는데는 표를 비교적 유용하게 사용하지만, 해결 전략으로는 쉽게 사용하지 않는 것으로 해석할 수 있다.

유형 4의 [접혀진 종이 문제]에서도 학생들은 보이지 않는 부분을 정확하게 표상하여 3묶음으로 나타내고도 다시 식을 세워 해결한 경우가 많았다. 이는 식을 세워 결과를 명확하게 확인하려는 것으로 볼 수 있다. [직사각형]문제에서는 공간에서 도형의 변환을 유연하게 하지 못하는 것으로 나타났다. 따라서 주어진 도형을 두 줄로 배열하려는 고정된 관점에서 사고의 전환을 하지 못하여 어려움을 겪은 것으로 유추할 수 있었다.

유형 5의 [옷 입기 문제]에서는 옷 그림을 그린 다음, 체계적인 목록이나 수형도로 나타낸 경우가 많았지만, [과녁 문제]에서는 대부분의 학생들이 몇 가지 경우만 표나 목록으로 제시했다. 이는 학생들에게 [과녁 문제]가 [옷 입기 문제]보다 더 어렵게 느껴지고, 시각화하는데도 용이하지 않았기 때문으로 해석된다. 따라서, [과녁]문제에서는 많은 학생들이 가능한 모든 경우를 고려하지 못하고 즉흥적으로 몇 가지 경우만 나타냈으며, 체계적이

지 않았다. 동일한 유형의 문제라도 문제의 난이도에 따라서 학생의 표상에 영향을 미친 것으로 보인다.

유형 6의 문제에서는 하나의 표상 양식이 두드러지게 나타나지 않고, 여러 표상 양식이 다양하게 나타났는데, 문제를 성공적으로 해결한 경우는 드물었다. 여러 사람의 거래 관계를 네트워크 등으로 알아보기 쉽게 표상하는 것이 특히 미흡했는데, 학생들은 여러 요소들간의 종합적인 관계를 표상하는 것에서 많은 어려움을 겪는 것으로 보인다. 이 경우 식이나 표를 사용하여 계산하려고 했으나, 계산 과정에서 실수나 오류를 범하였고, 결국 문제를 제대로 해결하지 못했다.

분석 결과, 학생들은 한 가지가 아닌 2~3가지 표상을 사용하여 문제를 해결한 것으로 나타났다. 문제를 해결하지 못한 경우에도 미숙한 여러 가지 양식을 시도했다. 그러나, 표상이 구조적이지 않거나 문제 상황에 적절하지 않아서, 효율적인 문제 해결로 연결하는데는 미흡한 것으로 나타났다. 이는 각 표상 양식의 특징이나 장점을 정확히 이해하지 못하거나, 문제의 수학적인 연결을 고려하지 않고 피상적으로 표상한 것이라 하겠다. 또한, 문제에 숫자가 제시될 때는 일단 식으로 나타내는 경우가 많았는데, 이 경우의 대부분은 문제에 있는 수를 임의로 조합하여 문제 해결에 도움이 되지 못했다.

나. 문제 유형에 따른 학생들의 표상 형태

학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 표상 형태를 표상 양식과 함께 문제 유형별로 분석했다.

1) 유형 1: 경마장 문제, 등산 문제

1-1 경마장 문제: 경마장에서 5마리의 말이 달리기를 하고 있습니다. 검은 말은 흰색말보다 4m 뒤에 있습니다. 회색말은 흰색말보다 9m 뒤에 있습니다. 갈색 말은 회색말보다는 2m 뒤에 있지만, 황색말보다는 5m 앞에 있습니다. 가장 앞에 있는 말과 가장 뒤에 있는 말은 각각 무슨 말이며, 서로 얼마나 떨어져 있습니까?

1-2 등산 문제: 경식이네 집에서 산으로 400m를 올라가면 약수터이고, 약수터에서 10m를 더 오르면 산의 정상입니다. 집에서 정상까지 가는 길은 이 길 밖에 없습니다. 경식이는 집에서 출발하여 약수터에서 물을 마시고 정상까지 올라갔습니다. 그런데, 깜빡 잊고 가방을 약수터에 놓고 와서 다시 약수터로 가서 가방을 가지고 정상으로 올라와 쉬다가 집에 돌아왔습니다. 경식이가 집에서 출발하여 정상까지 갔다가 다시 집에 돌아오기까지 걸은 거리는 모두 몇 m입니까?

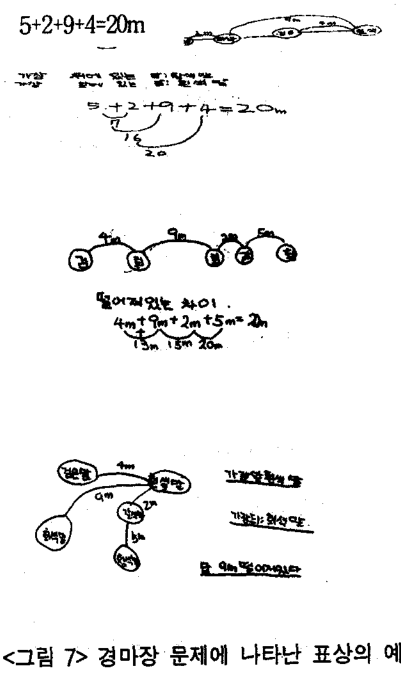
문제 해결에서 나타난 표상 결과는 <표 2>와 같다.

<표 2> 유형 1의 문제에 나타난 표상

과제 번호 / 나타난 표상	1-1 명(%)	1-2 명(%)
(1)그림이나 다이어그램+식	100(67.6)	103(69.6)
(2)그림이나 다이어그램	29(19.6)	24(16.2)
(3)식	8(5.4)	14(9.5)
(4)그림 · 다이어그램 · 표 · 식 중 한 두 가지+언어적 묘사	6(4.0)	4(2.7)
(5)기타, 무반응	5(3.4)	3(2.0)
계	148(100)	148(100)

유형 1의 두 문제 모두 문제 상황을 그리고, 식을 사용하여 해결한 경우가 70% 정도로 가장 일반적이었다. 학생들의 그림은 구조적인 그림과 사실적인 그림이 복합적으로 나타났는데, 문제 해결에 꼭 필요하지 않은 주변적인 요소까지 표상하는 특징이 있었다. 이는 Kamii 등(2001)의 해석처럼, 논리-수학적인 지식뿐만 아니라 물리적 지식이나 사회적 지식도 표상한 것으로 볼 수 있다.

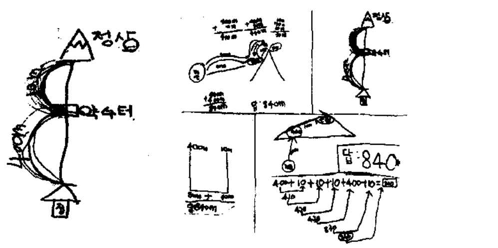
[경마장 문제]에서 학생의 그림이 문제 해결에 효율적으로 연결되지 않은 경우를 몇 가지로 분류할 수 있었다.



<그림 7> 경마장 문제에 나타난 표상의 예

그림은 바르게 그렸는데 식으로 정확하게 변환하지 못한 경우(<그림 7 첫번째>), 흰색말과 검은말의 위치를 잘못 표상하여 문제에 있는 수를 모두 더한 경우(<그림 7 두번째>), 다섯 마리 말의 순서나 거리를 구조화하지 못하고 두 마리씩 독립적으로 표상한 경우(<그림 7 세번째>)이다. 또한, 문제 해결과 관련 없는 그래프도 나타났는데, 이는 문제에 적절한 표상을 선택하지 못하고 자신이 경험한 표상을 임의로 시도한 것으로 해석할 수 있다.

[등산 문제]에서는 일반적으로 집, 약수터, 정상을 차례로 그리고, 각 구간을 표상하여 경식이가 걸은 경로의 순서에 따라 식을 세웠다. 경식이가 걸은 경로를 화살표나 선으로 정확하게 나타낸 경우(<그림 8 오른쪽>)는 개략적으로 그린 경우(<그림 8 왼쪽>)보다 문제 해결에 훨씬 성공적이었다. Diezmann과 English(2001)가 말한 것처럼 그림이나 다이어그램에서 위치나 움직임을 정확히 나타내는 것이 매우 중요함을 보여주는 결과이다.



<그림 8> 등산 문제에 나타난 그림 표상의 예

2) 유형 2: 과일 조사 문제, 동전 문제

2-1 과일 조사 문제: 3학년 1반 어린이 40명을 대상으로 제일 좋아하는 과일을 조사했습니다. 좋아하는 과일로는 복숭아, 수박, 포도, 참외, 바나나, 딸기가 나왔습니다. 복숭아를 좋아하는 어린이는 6명인데, 수박을 좋아하는 어린이 수와 같았습니다. 포도를 좋아하는 어린이는 복숭아를 좋아하는 어린이보다 3명 더 적었고, 참외를 좋아하는 어린이는 복숭아를 좋아하는 어린이 수의 2배였습니다. 딸기를 좋아하는 어린이는 복숭아를 좋아하는 어린이 수와 포도를 좋아하는 어린이 수의 합과 같았습니다. 6가지 과일을 좋아하는 어린이 수는 각각 몇 명씩이며, 가장 많은 어린이가 좋아하는 과일은 무엇입니까?

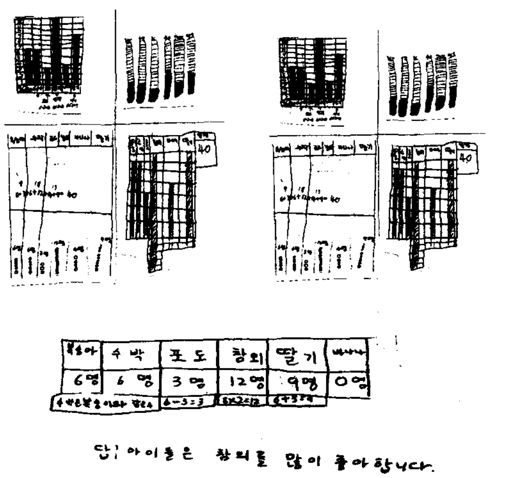
2-2 동전 문제: 철수와 진호는 모두 100원짜리 동전만 가지고 있습니다. 두 사람이 가지고 있는 동전을 합해서 1,000원이 되려면, 두 사람이 각각 얼마씩 가질 수 있는지 알아 보시오. 이 중에서 철수가 진호보다 200원 더 많이 가지게 되는 경우는 철수와 진호가 각각 얼마씩 가지고 있을 때입니까?

문제 해결에서 나타난 표상 결과는 <표 3>과 같다.

<표 3> 유형 2의 문제에 나타난 표상

과제 번호 / 나타난 표상	2-1 명(%)	2-2 명(%)
(1)표+식, 표+그래프+식, 표+그래프+식+그림	79(53.4)	27(18.2)
(2)표나 그래프 중 한 가지, 표+그래프	37(25.0)	28(18.9)
(3)식	9(6.1)	40(27.0)
(4)그림이나 다이어그램	9(6.1)	26(17.6)
(5)그림·표·식 중 하나+언어적 묘사	6(4.1)	14(9.5)
(6)기타, 무반응	8(5.4)	13(8.8)
계	148(100)	148(100)

[과일 조사 문제]에서는 표를 만들고 식을 세워 해결하거나, 여기에 그래프를 추가한 경우가 70% 이상으로 가장 일반적이었다. 표로 문제를 해결한 경우, 이를 그래프로 알아보기 쉽게 나타내는 경향이 있었는데, <그림 9>와 같이 표와 그래프는 비표준화된 형태가 많았다. 표에서는 문제에 필요한 자료의 값만 나타내고 항목을 표시하지 않거나, 식·그림 등을 덧붙이는 경우가 많았고, 그래프는 그림처럼 나타내거나 단위를 정확히 나타내지 않았다. 이는 수학적 규약에 따라 표상하기보다 문제 해결에 편리하게 임의적으로 표상한 것으로 볼 수 있다.



<그림 9> 과일 문제에 나타난 비표준화된 표와 그래프

[동전 문제]는 표만으로도 해결할 수 있는데, 식을 세우거나 단순히 예상하여 해결한 경우가 더 많았다. 많은 학생들이 문제의 조건을 정확히 이해하지 못했거나, 검토하지 않은 것으로 보였다. 32.4%의 학생이 문제에서 '철수가 진호보다 200원 더 많이 가지게 되는 경우'를 진호가 철수에게 200원을 주는 것으로 표상했기 때문이다. 이들은 대부분 식이나 그림으로 나타낸 다음, '철수: 500+200=700원, 진호: 500-200=300원'이라고 답했다. 문제에 숫자가 제시될 경우 표를 해결 전략으로 떠올리기보다는 일단 식으로 나타내려는 시도로 볼 수 있다.

3) 유형 3: 우유갑 탑 문제, 동물 다리 문제

3-1 우유갑 탑 문제: 경수네 반에서는 미술 시간에 빈 우유갑으로 9층 탑을 쌓으려고 합니다. 모은 우유갑은 모두 130개였습니다. 1층부터 3층까지는 각각 20개씩 쌓고, 4층과 5층에는 각각 15개씩 쌓으며, 6층과 7층에는 각각 10개씩 쌓고, 8층과 9층에는 각각 5개씩 쌓으려고 합니다. 이렇게 탑을 쌓으려면 모은 우유갑은 남습니까, 부족합니까? 남는다면 몇 개가 남으며 부족하다면 몇 개가 부족합니까?

3-2 동물 다리 문제: 강아지 3마리와 닭 5마리가 농장에서 놀고 있습니다. 이들 강아지와 닭의 다리 수를 세면 모두 몇 개입니까?

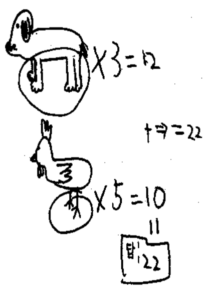
문제 해결에서 나타난 표상 결과는 <표 4>와 같다.

<표 4> 유형 3의 문제에 나타난 표상

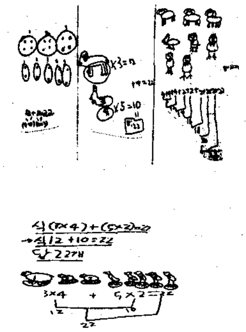
과제 번호 / 나타난 표상	3-1 명(%)	3-2 명(%)
(1)식, 목록+식	60(40.5)	98(66.2)
(2)그림이나 다이어그램+식	69(46.6)	35(23.6)
(3)그림이나 다이어그램	10(6.8)	7(4.7)
(4)식이나 언어적 묘사+표	5(3.4)	5(3.4)
(5)기타, 무반응	4(2.7)	3(2.0)
계	148(100)	148(100)

유형 3의 두 문제 모두 90% 이상의 학생이 식을 세워 해결했으며, 대부분 성공적으로 문제를 해결했다.

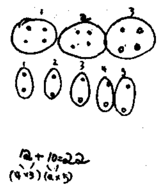
다만, [우유갑 탑 문제]에서 [동전 문제]보다 그림이 더 많이 나타났는데, 이는 한 번에 식으로 해결하기 어려운 복잡한 문제였기 때문으로 해석할 수 있다.



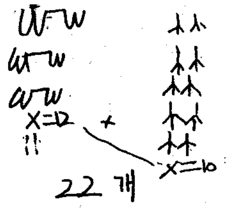
문제 해결에 필요한 자신의 특유한 표상 구성



사실적인 그림으로, 대상 전체를 표상함 (물리적 지식)



구조적인 그림 (논리-수학적 지식이 두드러짐)



문제 해결에 필요한 대상의 부분만 표상 (물리적 지식)

<그림 10> 동물 다리 문제에 나타난 그림과 식

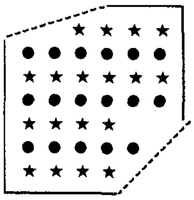
처음부터 하나의 식을 세우지 않고 단계별로 몇 개의 식을 세운 다음 하나의 식을 제시했으며, 계산도 앞에서부터 순서대로 하는 경향이 있음을 발견했다. [우유갑 탑 문제]에서 사용한 전략은 두 가지 식으로 나타났는데, 덧셈 전략(130-(60+30+20+10)=10, 130-120=10)과 뺄셈전략(130-60-30-20-10=10,130-60=70-30=40-20=20-10=10)이다. 뺄셈이 문제 해결에 더 효율적이라고 할 수 있지만, 대부분이 덧셈에 더 익숙한 것으로 나타났다.

[동물 다리 문제]에서 그림과 식으로 표상한 경우, <그림 10>과 같이 그림에 물리적인 지식을 함께 표상하거나 자신의 특유한 표상을 구성한 것을 볼 수 있다.

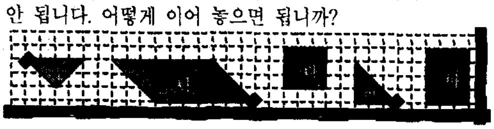
4) 유형 4: 접힌 종이 문제, 직사각형 문제

4-1 접힌 종이 문제: 직사각형 모양의 종이에 ★모양과 ●모양의 스티커가 오른쪽 그림과 같이 규칙적으로 가득 붙어 있습니다. 그런데, 왼쪽 위와 오른쪽 아래가 뒤로

접혀져서 일부는 보이지 않습니다. 원래 직사각형 모양의 종이에 가득 붙어 있는 스티커 전부를 3사람에게 똑같이 나누어 주면, 한 사람이 ★모양과 ●모양의 스티커를 각각 몇 개씩 가지게 됩니까?



4-2 직사각형 문제: 다음 도형을 모두 한 번씩만 사용해서 커다란 직사각형을 하나 만들어 보시오. 단, 삼각형 가와 라는 모양과 크기가 서로 같은 도형입니다. 각 도형을 돌리거나 뒤집어도 되지만, 두 도형을 겹치게 놓으면 안 됩니다. 어떻게 이어 놓으면 됩니까?



문제 해결에서 나타난 표상 결과는 <표 5>.와 같다.

<표 5> 유형 4의 문제에 나타난 표상

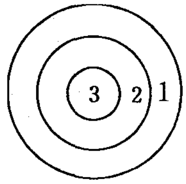
과제 번호 / 나타난 표상	4-1 명(%)	4-2 명(%)
(1)조작, 그림이나 다이어그램+조작	89(60.1)	123(83.1)
(2)식, 식+그림이나 조작	47(31.8)	0(0.0)
(3)그림이나 조작+언어적 묘사	6(4.1)	11(7.4)
(4)언어적 묘사	3(2.0)	1(0.7)
(5)기타, 무반응	3(2.0)	13(8.8)
계	148(100)	148(100)

[접힌 종이 문제]에서 학생들은 보이지 않는 부분을 정확하게 표상해서 나타냈다. 하지만, 대부분이 직관적으로 답을 구하지 않고 식으로 계산했다. 이는 식이 익숙한 표상이며, 식을 통해서 결과를 명확하게 확인하려 했기 때문으로 유추할 수 있다. [직사각형 문제]는 5개의 도형을 일렬로 배열하는 통찰이 일어난 경우는 성공적으로 해결했으나, 대부분이 제대로 해결하지 못했다. 도형의 공간적인 변환을 유연하게 못하고, 각 도형을 두 줄로만 배열하려는 고정된 사고가 큰 원인이라 하겠다.

5) 유형 5: 옷 입기 문제, 과녁 문제

5-1 옷 입기 문제: 민수는 노란색 바지와 파란색 바지를 각각 1개씩 가지고 있고, 빨간색, 하얀색, 초록색, 보라색 윗옷을 각각 1개씩 가지고 있습니다. 민수가 바지와 윗옷을 입을 수 있는 방법은 모두 몇 가지이며, 각각의 경우에 무슨 색 바지와 무슨 색 윗옷을 입게 됩니까?

5-2 **과녁 문제**: 어린이들이 과녁 맞추기를 하는데, 한 사람이 두 번씩 던져서 맞춘 곳의 점수를 더하면 자기 점수가 됩니다. 3번 원을 맞추면 3점, 2번 원을 맞추면 2점, 1번 원이나 나머지 바깥쪽을 맞추면 1점입니다. 미혜가 화살을 두 번 던졌을 때, 어디와 어디를 맞출 수 있는지 모든 경우를 구하시오. 각각의 경우에 미혜는 각각 몇 점씩을 얻게 됩니까?



문제 해결에서 나타난 표상 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6> 유형 5의 문제에 나타난 표상

과제 번호 / 나타난 표상	5-1 명(%)	5-2 명(%)
(1)표나 목록, 표나 목록+식,	36(24.3)	90(60.8)
(2)그림이나 다이어그램+표나 목록	56(37.8)	12(8.1)
(3)그림이나 다이어그램	21(14.1)	6(4.1)
(4)그림 · 다이어그램 · 표 · 목록 중 한 두 가지+언어적 묘사	18(12.1)	10(6.8)
(5)식	5(3.4)	9(6.1)
(6)언어적 묘사	5(3.4)	3(2.0)
(7)기타, 무반응	7(4.7)	18(12.2)
계	148(100)	148(100)

[옷 입기 문제]와 [과녁 문제]에서 동일한 표상이 나타날 것으로 예상했으나, 실제 나타난 표상 양식간에는 큰 차이가 있었다. [옷 입기 문제]에서는 50% 이상의 학생이 그림, 표, 순서쌍, 수형도 등을 사용하여 가능한 모든 경우를 체계적으로 나타냈다. 그러나 [과녁 문제]에서는 순서쌍이나 표로 나타냈어도 가능한 모든 경우를 고려하지 않고 몇 가지 예만 제시했으며 체계적이지 않았다. [옷입기 문제]에서는 <그림 11>과 같이 수형도로 나타낸 경우에도 일단 윗옷과 바지를 그리고, 선을 긋거나 목록을 만드는 경향이 있었다. 이처럼 학생들은 대상을 구체적으로 시각화할 때 문제 해결에 도움이 되는 것으로 해석할 수 있다. 교과서에서는 '2×4'처럼 식을 유도하여 해결하기를 바라지만, 이렇게 식을 세워 해결한 학생은 2명뿐이었다. 아직 체계적으로 식을 세워 해결하기보다 자유롭게 시각화하는 것에 더 익숙하다고 하겠다.

<그림 11> 옷 입기 문제에 나타난 표상의 예

6) 유형 6: 스티커 문제, 시장 놀이 문제

6-1 스티커 문제: 처음에 미선, 진아, 철민, 정석이는 스티커를 각각 10개씩 가지고 있었습니다. 4명이 가위바위보를 하여 4등 한 사람이 1등 한 사람에게 스티커를 1개씩 주었습니다. 미선이는 철민이와 정석이에게 각각 1개씩 주었습니다. 진아는 정석이와 미선이에게 각각 2개씩 주었습니다. 철민이는 진아에게 3개를 주었지만, 미선이로부터 2개를 받았습니다. 정석이는 미선, 진아, 철민이에게 각각 1개씩 주었습니다. 누가 누구에게 스티커를 몇 개씩 주고 받았는지 알아보기 쉽게 나타내 보시오. 또, 4명의 어린이는 각각 스티커를 몇 개씩 가지게 됩니까?

6-2 시장 놀이 문제: 민우, 혜경, 현우, 종수는 처음에 각각 1000원씩 가지고 시장 놀이를 하였습니다. 민우는 혜경이에게 300원어치, 현우에게 200원어치를 팔았습니다. 혜경이는 현우에게 450원어치, 종수에게 300원어치를 팔았습니다. 종수는 민우에게 700원어치를 팔고, 혜경이에게 100원어치를 팔았지만, 현우네서 200원어치를 사왔습니다. 누가 누구에게 얼마어치를 팔고 샀는지 잘 알아볼 수 있도록 나타내 보시오. 또, 4명의 어린이는 각각 돈이 얼마씩 남았습니까?

문제 해결에서 나타난 표상 결과는 <표 7>과 같다.

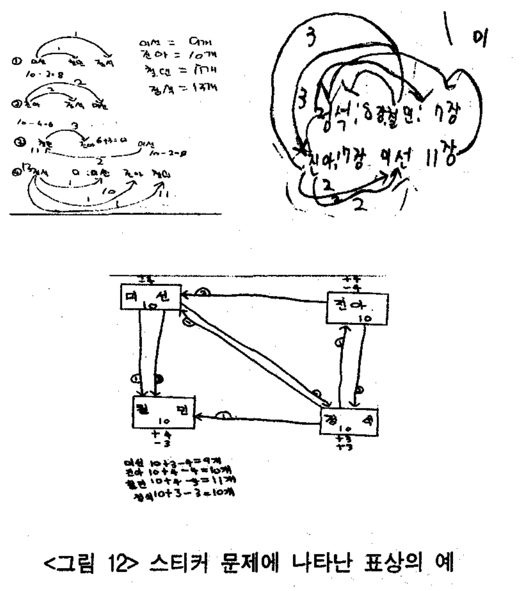
<표 7> 유형 6의 문제에 나타난 표상

과제 번호 / 나타난 표상	6-1 명(%)	6-2 명(%)
(1)표, 표+식	36(24.3)	75(50.7)
(2)식, 식+다이어그램	56(37.8)	27(18.2)
(3)표나 그래프, 표나 그래프+식	21(14.2)	6(4.1)
(4)그림이나 다이어그램	18(12.2)	10(6.8)
(5)언어적 묘사	5(3.4)	12(18.1)
(6)식·표·그래프 중 한 가지+언어적 묘사	5(3.4)	3(2.0)
(7)기타, 무반응	7(4.7)	15(10.1)
계	148(100)	148(100)

유형 6에서는 문제 상황의 전체적인 관계도 표상하고, 변화되는 수도 계산해야 하기 때문에 매우 어려워 한 것으로 나타났다. 학생들은 여러 표상을 시도한 흔적은 있었지만, 대부분 정확히 해결하지 못했다. 임의로 몇 가지 표상을 시도하거나 식으로 계산하려고 했지만, 계산 과정도 정확하지 못했고 검토한 흔적을 찾기 어려웠다.

[스티커 문제]에서 사용한 해결 전략과 표상은 크게 3가지로 분류해 볼 수 있었다. 첫째, 스티커 수의 변화에 따라 네 사람 각각에 대한 식을 세운 경우이다. 즉, '미선: 10-1-1+2-2+1=9'와 같이 식으로 해결하려고 했다. 둘째, 네 명이 가지고 있던 스티커를 그림이나 동그라미(○)로 그래프를 그리고, 문제의 조건에 따라 첨삭한 경우이다. 셋째, 표를 사용하여 수와 기호로 표상하고 변화하는대로 계산한 경우인데, 12%의 학생만 종합적인 관계를 네트워크로 잘 나타냈고(<그림 12 아래>), 대부분 단편적으로 표상하거나 구조화하지 못했다(<그림 12 위>).

[시장 놀이 문제]에서도 비슷한 표상이 나타났는데, 계산 과정이나 정확성에서 [스티커 문제]보다 더 미흡했다. 이는 학생들이 동일한 문제라도 큰 수를 다루게 될 경우에는 더 어려워하는 것으로 해석할 수 있다.



<그림 12> 스티커 문제에 나타난 표상의 예

2. 소집단 협력 학습을 통한 표상의 정교화 과정

소집단 구성원의 개별 활동지와 연습지, 소집단의 공동 활동지, 관찰 자료와 면담 자료를 종합하여 3가지 주제에 따라 (1)참여자 개개인의 표상 변화, (2)표상의 정교화 과정에 대한 메카니즘, (3)표상의 정교화 과정에서 나타나는 패턴을 분석했다.

가. 참여자 개개인의 표상 변화

참여자들이 각 학급에서 전체적으로 문제를 해결했을 때 나타낸 표상과 소집단에서 개별로 해결했을 때의 표상에서 변화한 상태를 분석한 결과는 <표 8>과 같다.

<표 8> 처음 한 개별 표상이 소집단 활동을 통하여 변화한 상태

구분 횟수(비율)	동일하거나 비슷한 표상 양식					다른 표상 양식으로 변화함	처음의 개별 표상 형태보다 못해짐	N
	완전 동일	거의 비슷	세련되고 구조화됨	다른 표상 양식을 추가	깔끔하고 자세해짐			
횟수	30	15	26	13	15	13	8	120
백분율	25.0	12.5	22.7	10.8	12.5	10.8	6.7	100
(%)	37.5		45.0			10.8	6.7	100

* N=2개 소집단 참여자 수(10명)× 문제 수(12 문제)=120
* %는 횟수/N임.

첫째, 동일하거나 비슷한 표상 양식 내에서의 변화를 발견할 수 있었다. 완전히 동일한 경우는 처음에 한 표상과 나중에 한 표상이 표상 양식과 내용, 구조까지 완전히 같은 경우이다. 거의 비슷한 경우는, 표상의 구조나 수준에 영향을 미치지 않을 정도로 동일한 표상 양식을 사용하여 거의 같은 경우이다. 세련되고 구조화된 경우는 동일한 표상 양식으로 나타냈지만, 수학적으로 세련되게 나타내거나 체계적으로 표상한 경우이다. 예를 들어, 표면적인 정확성에 초점을 둔 그림에서 구조적인 그림으로 발전하거나, 표나 그래프를 표준화된 형태로 표상한 경우이다. 다른 표상 양식을 추가한 경우는 이전에 나타낸 표상 양식 외에 다른 표상 양식을 추가하여 나타낸 경우이다. 예를 들어, 그림으로만 문제를 해결했다가 식을 함께 나타낸 경우이다. 깔끔하고 자세해진 경우는, 표상의 수준이나 구조적인 세련됨에는 큰 차이가 없지만, 깔끔하고 알아보기 쉽게 나타낸 경우이다.

둘째, 다른 표상 양식으로 변화한 경우이다. 이는 처음에 한 표상 양식으로 나타내지 않고 다른 양식으로 시도한 경우이다. 예를 들어, 처음에는 표로 문제를 해결했는데 나중에는 그림이나 식으로 해결한 경우이다.

셋째, 처음의 표상보다 못해진 경우이다. 이는 표상 양식의 변화와 관계없이 처음에 한 것보다 수학적으로 덜 세련되거나, 문제 해결에 도움이 되지 않은 경우이다. 면담 결과, 이런 경우의 학생들은 표상의 적절성을 고려하여 바꾼 것이 아니라 '그냥' 시도한 것으로 나타났는데, 이는 임기응변식으로 표상한 것이라 할 수 있다.

개별 학생들의 처음 표상이 소집단 활동을 거친 다음 변화한 상태를 분석한 결과, 완전히 다른 표상 양식으로 변화한 경우는 많지 않았다. 그보다 수학적으로 더 세련되고 정확하게 표상함으로써, 문제 해결에 도움이 되는 쪽으로 변화한 경우가 많았다. 즉, 동일 표상 양식 내에서 세련되고 깔끔하게 변화한 경우가 45%로 가장 많았다(<그림 8>). 이는 개개인이 선호하는 표상 양식이나 수학적 이해 수준이 조금씩 변화했을지라도 단시간에 큰 변화를 가져오기는 어렵기 때문으로 해석할 수 있다.

이런 변화 내용은 학생들과의 면담이나 설문지, 연구자의 관찰 자료에서도 찾아볼 수 있었다.

<발췌문 1: 소집단 활동 후의 면담>

연구자: 소집단 활동을 하면서 내가 문제를 해결할 때 변한 점이 있었어?
정이: 예전에는요, 식으로만 하려고 그랬는데요, 지금은요, 그림으로도 하고 표로도 하고, 수직선으로도 하고.
지이: 예전에는 식으로만 했는데요, 무조건요. 애들이랑 하니까 그림으로도 하게 되요.
준이: 저는요, 그림이나 식으로도 많이 바뀌었어요.

<발췌문 2: 소집단 활동 후 설문 답변>

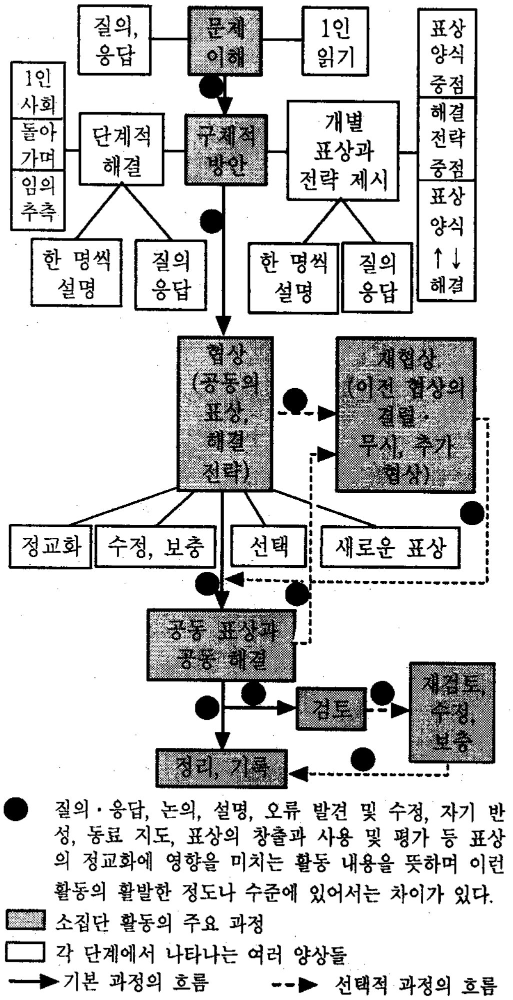
1. 소집단 활동을 한 다음에 문제를 풀 때, 나에게 달라진 점이 있었으면 무엇인지 써 보세요.
- 처음에는 그래프로 많이 했는데, 요즘에는 식으로도 많이 한다. (양희)
- 표를 좀더 깔끔하게 했다.(정이)
- 표에 칸을 치고 합계 이런 것도 썼다.(태희)
- 전에는 무조건 식으로만 했는데, 그림이나 다른 표 같은 것도 하려고 했다.(지이)

학생들이 여러 사람의 표상을 접하게 됨으로써 자연

스럽게 다중 표상에 노출하게 됨으로써, 다양한 표상과 문제에 적절한 해결 전략을 시도하게 되었다고 할 수 있다. 동료와의 상호작용과 자기 반성 및 검토가 그들의 표상 변화에 주 요인으로 작용했음을 알 수 있었다.

단순히 소집단 활동 자체를 변화의 요인으로 보기는 어렵지만, 여러 사람의 표상을 보고 논의하면서 자연스럽게 다중 표상에 노출된 점, 동료의 해결 전략이나 표상을 통해 배우게 된 점, 자기 반성과 오류 수정, 의사소통을 통한 정교화 등을 변화의 요인으로 분석할 수 있다.

나. 표상의 정교화 과정에 대한 메카니즘



<그림 13> 표상의 정교화 과정에 대한 메카니즘

한 소집단에서 하나의 과제를 해결하여 공동의 표상으로 나타내기까지의 소집단 활동을 하나의 하위 분석 단위로 보고, 24개의 사례를 분석했다. <그림 13>과 같이 표상의 정교화 과정에 대한 메카니즘을 발견할 수 있었다. 짙은 직사각형은 사례들간에 공통적으로 나타나는 기본 과정을 나타낸 것이고, 실선 화살표는 이 기본 과정의 흐름을 나타낸 것이며, 점선 화살표는 사례에 따라 강조되기도 하고 생략되기도 한 과정을 나타낸 것이다. 각 기본 과정에는 A로 나타낸 작은 순환 과정이 존재했다. 이 과정에서 질의·응답과 설명, 자기 반성 및 오류 수정, 동료의 표상에 대한 해석과 평가 등이 끊임없이 일어나면서 표상을 정교화했다. 이 메카니즘은 선형적인 단계를 기계적으로 밟아 가는 것이 아니었다. 어느 과정은 생략되기도 하고, 어느 과정은 더욱 강조되고 반복되기도 했으며, 나선형적이고 역동적인 과정으로 나타났다. 다음은 각 과정의 흐름에 따른 분석이다.

가) 문제의 이해

문제를 이해하는 과정에서 나타난 양상은 2가지로 분석할 수 있었다. 첫째, 구성원 중 한 사람이 제시된 문제를 그대로 읽거나 요약하여 말한 다음, 함께 문제를 이해하는 경우이다. 둘째, 구성원 중 한 명이 문제에 관련한 제안이나 질문을 함으로써, 자연스럽게 질의·응답이 오가며 문제를 이해하는 경우이다. 한 명이 문제를 그대로 읽고 문제를 이해하는 양상은 소집단 활동 초기나 어려운 과제에서 주로 나타났는데, 점차 질의·응답을 통한 문제 이해 방식으로 바뀌어 가는 경향이 있었다. 이는 한 사람이 문제를 그대로 읽는 것보다 수학적으로 세련된 방식이라 할 수 있으며, 문제를 정확하게 이해하는데도 도움이 되는 것으로 나타났다.

나) 구체적 방안

이 과정에서 학생들은 문제를 해결하기 위한 전략이나 적절한 표상에 대한 구체적인 방안을 제시하고 논의했다. 이 과정에서 문제의 해결 단계에 따라 단계적으로 해결하는 경우와 각자의 해결 방법이나 표상을 먼저 제시하고 논의하는 경우가 나타났다.

첫째, <발췌문 3>처럼 다같이 문제의 해결 단계에 따라 차례로 문제를 해결하는 경우이다. 한 명이 제안을 하자 지이가 단계적으로 질문을 하고, 구성원들이 자연스럽게 응답한다. 여기서 구체적인 설명을 요구한 지이

의 역할은 의견을 정당화하게 하는 한 요소라 하겠다.

<발췌문 3: 단계적 해결 방안>[2)]
2109 지이: 그러면, 수박을 좋아하는 어린이는?
2110 현이: 6명!
2111 지이: 어떻게 알아?
2112 나머지:…수박을 좋아하는 어린이 수는 복숭아를 좋아하는 어린이 수와 같다고 했어.
2113 지이: 그러면 포도는?
2114 경이: 포도를 좋아하는 어린이는 복숭아를 좋아하는 어린이보다 3명이 적다고 했으니까

둘째, 개별 표상과 문제 해결 전략을 제시하는 경우이다. 소집단에서 문제를 해결할 때, 각자의 전략과 표상을 제시하고 함께 논의하며 평가했다. 이 과정에서 문제를 해결하기 위하여 각자의 해결 전략을 제시하는 경우와 해결 전략에 앞서 어떻게 표상할 것인지 표상 양식과 형태에 중점을 두어 제안하는 경우를 볼 수 있었다.

다) 협상

구성원들간에 협상이 이루어지는 과정은 특히 여러 차례에 걸쳐 이루어졌다. 협상을 한 뒤에도 문제를 해결해 가는 과정에서 또 다른 협상이 일어나기도 하고, 협상이 결렬되어 재협상이 되기도 했다. 공동의 표상으로 협상되는 과정에서는 (1)개별 표상을 더욱 정교화하여 협상하는 경우, (2)개별 표상에서 오류를 수정하거나 보충하여 협상하는 경우, (3)한 사람의 전략과 표상을 선택하는 경우, (3)개별 표상과 다르게 새로운 표상을 구성하여 협상하는 경우로 나타났다고 분석할 수 있다.

<발췌문 4: 개별 표상을 정교화하여 협상>
1254 지이: 나는 그냥 식으로만 쓰는 것보다, 그림을 그려서 알아보기 쉽고 빨리 풀면 시간도 절약할 수…
1256 준이: 그리고 여기다가 이 식이 왜 나왔나 쓰는 게 좋겠어. 10×3 이렇게…
1279: 나머지: 그래. 그게 좋겠다.
<발췌문 5: 수정・보충하여 협상>
1153 경이: 그런데, 모양은 다른 사람이 알아보기 어렵잖아.
1154 준이: 모양을 하고서, 그 안에다가 말의 이름을 써 넣으면 어떨까?
1155 나머지: 그래. 그게 좋겠다.
<발췌문 6: 한 사람의 표상이나 전략을 선택하여 협상>
4216 하희: 그런데 나는 나희 것을 칭찬해주고 싶어. 우리는 다 하나밖에 안 했지만, 나희는 개수도 잘 맞게 했고, 여러 가지 방법으로 했잖아.
4217 양희: 음, 그리고 또 깔끔하게 했다!
<발췌문 7: 새로운 표상을 구성하여 협상>
5159 준이: 그럼 대신 동그라미로 하고 안에 글씨를 쓰자.
5161 경이: 둘 다 쓰자. 왜냐하면…
5163 지이: …간단히 동그라미로 하자. 이렇게 해도 알아볼 수 있잖아.

라) 공동의 표상과 공동 해결

문제 해결 전략과 공동의 표상이 협상됨으로써, 공동으로 문제를 해결하며 표상하는 과정이다. 학생들은 지금까지 문제에 대하여 논의하고도, 협상된 전략과 표상으로 처음부터 다시 문제를 읽으며 해결하려는 경향이 있었다. 이 과정은 다함께 문제를 이해하고 해결하여 문제와 문제와 해결 방법을 확실히 하고 검토하는 기회를 제공했다고 볼 수 있다(협상되어 나타난 공동 표상의 몇 예는 정교화 패턴을 분석한 부분 참조).

마) 검토

학생들은 공동으로 문제를 해결한 다음 의례적으로 처음부터 다시 검토하는 경향이 있었다. 자신들이 나타낸 표상 양식이나 과정에서 틀린 것이 없는지, 빠뜨린 것이 없는지 검토하는 활동은 소집단 활동에서 문제 이해와 표상의 정교화에 매우 유용했다.

바) 정리, 기록

공동으로 문제를 해결하면 공동 활동지에 기록했는데, 처음부터 검토하는 과정을 또 거쳤다. 기록은 구성원들이 고르게 했는데, 협상된 표상에 가장 가깝게 표상한 학생이 기록하는 경향을 엿볼 수 있었다. 다른 학생들도 이를 지지하고 그 동료가 기록하는 것을 당연한 권리나 책임으로 암묵적인 동의를 했다.

다. 표상의 정교화 과정에서 나타나는 패턴

소집단 협력학습을 통하여 문제를 해결하는 과정과 개개인의 표상에서 공동의 표상으로 나타난 활동지를 (1)

---

2) 구성원의 진술 앞에 있는 수는 문제 유형과 진술 번호를 나타내며, 중간에 빠진 번호는 지면 관계상 생략한 부분이다 (예, 1124: 1-1번 문제를 해결하는 과정에서 24번째 진술).

학습자 개개인의 표상, (2)협상되어 나타난 공동의 표상, (3)활동 과정에서 나타난 현상으로 분석하여 제시했다. 각 패턴이 나타난 비율은 <표 9>와 같다.

<표 9> 정교화 패턴의 유형별 비율

표상의 정교화 패턴	계(백분율)
(1)더욱 세련되고 발전하는 패턴	9(37.5)
(2)미흡했으나 발전하는 패턴	6(25.0)
(3)개개인의 표상이 공존하는 패턴	3(12.5)
(4)전략 중심으로 정교화하는 패턴	4(16.7)
(5)미흡하고 부분적으로 협상하는 패턴	2(8.3)
N	24(100)

* N = 12 (문제 수) × 2 (소집단 수) = 24

1) 더욱 세련되고 발전하는 패턴

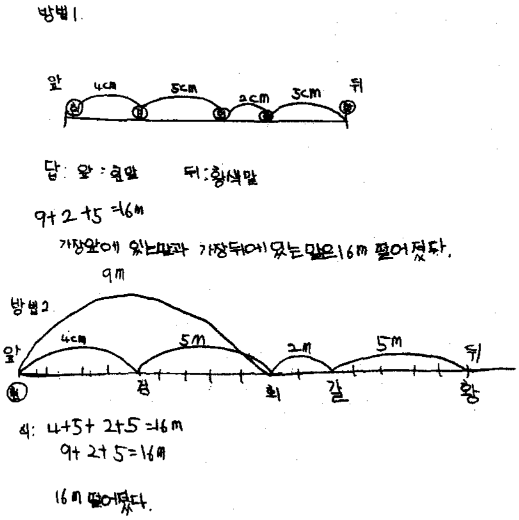
개별 표상과 문제 해결도 대체로 성공적이었는데, 더욱 정교화된 공동의 표상으로 발전하는 패턴이다. 이 패턴에서는 대체로 논의가 활발히 일어나고, 다른 사람의 의견에 적극적인 반응을 보이며, 서로의 표상에 대한 질의 · 응답과 평가도 활발히 일어난다.

가) 학습자 개개인의 표상[문제 1-1: 경마장 문제]

- 준이는 '앞, 뒤'를 표시하고, 동그라미로 말을 정확하게 표상하여 식 없이 두 말의 거리를 14m로 나타냈다.
- 현이는 경마장을 사실적으로 그리고, 말을 동그라미로 부정확하게 표상하여 다섯 마리 말의 등수만 나타냈다.
- 지이는 각 여러 도형으로 말을 표상하고, 식을 세웠다.
- 정이는 글자로 말을 표상하고, '9+2+7=16'로 나타냈다.
- 경이는 문제에 나오는 글자의 순서대로 검은말을 제일 앞에 그려서, '4+9+2+5=20m'라는 식으로 나타냈다.

나) 협상되어 나타난 공동의 표상

공동의 표상은 <그림 14>와 같이 각 말을 동그라미와 글자로 구조화하고, 2가지 식으로 나타났다. 개별 표상에서 정확하지 않거나 미흡했던 요소를 정확하게 표상하고 구조적으로 나타냈다. 또, '앞'과 '뒤'를 표시하여 어느 말이 가장 앞에 있는지 알아보기 쉽게 했다.



<그림 14> 경마장 문제의 공동 표상(B소집단)

다) 활동 과정에서 나타난 현상

문제의 이해 과정에서부터 함께 문제를 보며 해결에 중요한 요소를 확인해갔다. 지이가 질문을 시작했지만, 발표 기회가 자연스럽게 분배되면서 문제를 효율적으로 해결하기 위한 표상을 논의했는데, 한 사람의 것을 비평이나 논의 없이 무조건 따라하지 않았다. 질의 · 응답을 통해 오류를 발견과 자기 반성을 한 점, 구성원들간의 긍정적인 상호작용이 중요하게 작용했다고 하겠다. 서로의 전략이나 표상을 격려하고, 훌륭한 아이디어를 인정함으로써 표상을 정교화하는데 크게 기여했기 때문이다.

2) 미흡했으나 발전하는 패턴

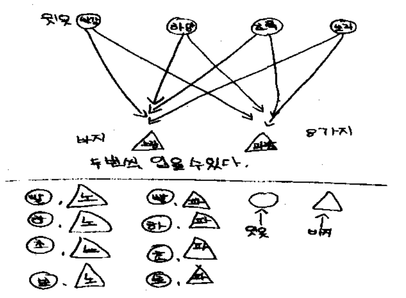
참여자의 개별 표상은 미흡했으나, 소집단 협력 학습 과정에서 세련된 표상으로 정교화하고, 문제를 효율적으로 해결하기 위한 표상으로 발전했다. 이 패턴에서는 미흡하지만 개개인의 표상을 진지하게 논의하고, 그 과정에서 자연스럽게 자기 반성을 하게 되었으며, 동료가 스스로 오류를 수정하고 새로운 아이디어를 떠올리도록 하는 비계 설정이 존재하는 경우가 많았다.

가) 학습자 개개인의 표상[문제 5-1: 옷 입기 문제]

· 준이는 그림과 순서쌍으로 4가지 경우만 나타냈다.
· 현이는 2개의 옷 그림과 2가지 경우만 나타냈다.
· 지이는 표로 옷을 입는 8가지 경우를 목록화했다
· 정이는 윗옷 4개와 바지 2개를 화살표로 연결했다.
· 경이는 그림을 그리고, 선으로 연결하여 순서쌍으로 나타냈지만, 윗옷끼리도 연결하고 체계적이지 못했다.

나) 협상되어 나타난 공동의 표상

처음에는 참여자 대부분이 가능한 모든 경우를 체계적으로 고려하지 않고, 몇 가지 경우만 나타냈다. 그러나, 미흡했던 개별 표상과 문제 해결에서 <그림 15>와 같이 체계적인 해결 전략과 표상으로 발전했다.



<그림 15> 옷 입기 문제의 공동 표상(B소집단)

다) 활동 과정에서 나타난 현상

각자가 자신의 해결 방법이나 표상을 설명하고 의견을 교환하는 과정에서, 스스로 오류를 발견하고 반성하는 것을 관찰할 수 있었다. 자기 설명이 오류 발견이나 수정에 매우 중요한 활동임을 보여주는 예라 하겠다.

지이가 어떻게 하면 빠뜨리지 않고 모든 경우를 다 구할 수 있는지 물음으로써, 구성원들은 아무렇게나 몇 가지를 추측하지 않고 체계적인 방법을 생각하게 되었다. 이 때, 자신의 방법을 강요하거나 한 사람이 주도하지 않았으며, 동료의 학습을 돕고 동료의 제안이나 주장에 매우 긍정적으로 반응하며 정교화하는 것으로 나타났다.

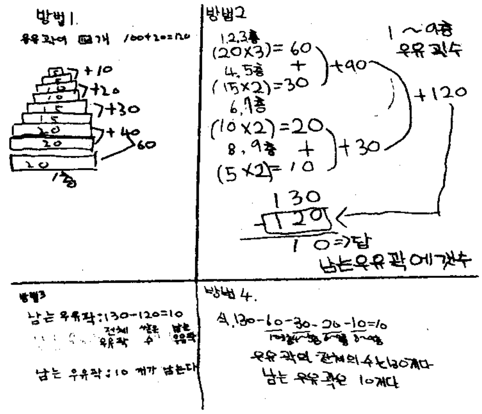
3) 개개인의 표상이 공존하는 패턴

여러 사람의 다양한 의견이나 표상을 쉽게 수용하고 종합하기도 하지만, 다양한 표상이 논의를 통하여 정당화됨으로써 공동의 표상으로 존재하게 되었다. 이런 경우는 어느 한 사람의 표상이나 해결 전략이 논의없이 선택될 위험도 있었지만, 구성원들 각각의 표상이 우위를 가리지 않고 문제 해결에 기여했다고 할 수 있다.

가) 학습자 개개인의 표상[문제 3-1: 우유갑 탑 문제]

· 관희는 층별로 우유갑의 수를 목록화하고, 식을 세워 해결했다($1 \to 3=(20 \times 3)=60$, $4 \to 5=(15 \times 2)=30$, $6 \to 7=(10 \times 2)=20$, $8 \to 9=(5 \times 2)=10$, $130-120=10$).
· 양희는 층별 우유갑 수를 쓰고, 뺄셈으로 해결했다.
· 나희는 관희와 동일한데, 세로셈으로도 나타냈다.
· 태희는 탑과 우유갑을 그리고, 덧셈으로 나타냈다.
· 하희는 태희와 같으나 더 개략적인 그림으로 나타냈다.

나) 협상되어 나타난 공동의 표상



<그림 16> 우유갑 탑 문제의 공동 표상(A소집단)

그림, 덧셈식과 뺄셈식 등 구성원 개개인의 표상이 공존하는 형태로 나타났지만, 의미 없이 한데 모아진 것이 아니라, 문제 해결에 적절한 표상으로 논의하고 받아들인 표상으로 볼 수 있었다.

다) 활동 과정에서 나타난 현상

문제를 해결하기 위한 구체적인 방안을 논의하는 과정에서 구성원들은 식이 적절한 표상이라는데는 모두 동의했다. 태희는 정확하게 계산하기 위해서 덧셈이 적절하다고 했으며, 나희는 반복되는 더하기를 곱셈으로 하는 것이 효율적이라고 했다. 유일하게 양희가 뺄셈 전략을 제안했는데, 덧셈에 익숙한 학생들에게 처음에는 뺄셈이 설득력이 없었다. 그러나 양희가 다시 정당화함으로써 구성원들을 설득하게 되고, 의미 있는 표상으로 협상하여 모두 공존하게 되었다.

4) 전략 중심으로 정교화하는 패턴

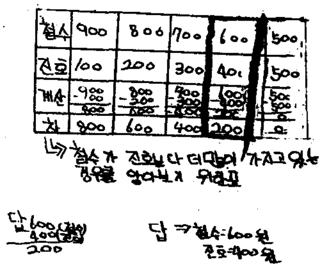
소집단 활동 과정에서 훌륭한 해결 전략으로 문제를 효율적으로 해결해도, 기록하는 과정에서는 해결 전략보다 표면적인 깔끔함이나 정확성에 초점을 둘 가능성이 있다. 하지만, 이 패턴에서는 구성원의 효율적인 전략이 제기되고, 이 전략을 중심으로 정교화하여 나타냈다.

가) 학습자 개개인의 표상[문제 2-2: 동전 문제]

· 관희는 머릿속으로 생각하여 답만 제시했다.
· 양희와 나희는 동그라미로 동전을 그리고, 식을 세워서 해결했는데, '철수:700원, 진호:300원'으로 나타냈다.
· 태희는 표로 두 사람이 가진 돈의 합이 1000원이 되는 모든 경우를 구하여 문제를 해결했다.
· 하희는 그림, 표, 식을 모두 사용했지만, 면담 과정에서도 이를 제대로 설명하지 못했다.

나) 협상되어 나타난 공동의 표상

처음 개별 표상에서 관희와 태희를 제외하고는 모두 문제를 성공적으로 해결하지 못했다. 그런데 효율적인 전략으로 나타낸 공동의 표상은 <그림 17>과 같다. 태희의 전략에 '진호가 철수보다 더 많이 가지고 있는 경우는 필요 없다'는 나희의 제안이 결정적인 역할을 했다.



<그림 17> 동전 문제의 공동 표상(A소집단)

다) 활동 과정에서 나타난 현상

함께 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 자신이 문제를 잘못 이해했으며, 해결도 틀렸다는 것을 깨달았다. 이 때, 태희가 표를 그려서 해결한 전략을 제안하고 이를 공동의 표상으로 논의하였다. 이에 나희가 발전적인 해결 전략을 생각해냈다. 즉, 구하라고 하는 것이 진호가 200원 더 많이 가지고 있을 때이므로, 진호가 더 많이 가지고 있는 경우는 고려하지 않아도 된다는 것이었다. 따라서 태희의 표를 바탕으로 하고, 나희의 발전적인 전략으로 해결하여 협상하는 발전을 볼 수 있었다.

5) 빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴

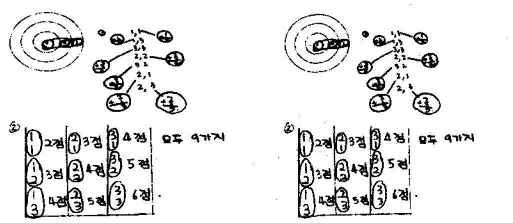
공동의 표상으로 발전시켜 나가는 과정에서, 어느 요인에 의해서 비효율적이거나 구조적이지 못한 표상이 협상되기도 한다. 특히, 협상할 때 부분적인 참여로 이루어지거나 서로의 표상을 이해하지 못하여 덜 세련된 공동의 표상으로 협상할 경우에 나타나는 패턴이라 하겠다.

가) 학습자 개개인의 표상[문제 5-2: 과녁 문제]

· 관희는 그림과 목록, 식으로 6가지 경우를 나타냈다.
· 양희는 표로 7가지 경우를 제시했다.
· 나희는 표에 O표를 하여 6가지 경우를 제시했다.
· 태희는 과녁과 화살을 그리고 6가지 경우만 나타냈다.
· 하희는 표와 순서쌍으로 일관성없이 4가지만 나타냈다.

나) 협상되어 나타난 공동의 표상

활동지에 나타난 표상만 본다면, 9가지 경우를 모두 고려하여 나타냈다고 할 수도 있다. 그러나 상대방의 표상을 이해하지 못하고 정확하게 해석하지 못함으로써, 처음에는 깔끔한 관희의 표상으로 협상했다가 나중에 몇 명에 의해서 협상한 표상으로 나타냈다(<그림 18>).



<그림 18> 과녁 문제의 공동 표상(A소집단)

다) 활동 과정에서 나타난 현상

구성원들은 문제에 대한 이해 과정에서부터 어려워했으며, 각자의 미흡한 표상을 제안하고 논의하게 되었다. 이 과정에서 효율적인 문제 해결 전략은 떠올리지 못했지만, 각자의 표상이 미흡하거나 틀렸다는 것은 깨닫는 것을 관찰했다. 이때, 갑자기 양희가 효율적인 전략을 떠올려서 제안했지만, 구성원들이 이해하지 못하여 깔끔하고 이해하기 쉬운 관희의 틀린 표상으로 협상했다(<그림 18 왼쪽>). 동료들이 양희의 표상을 바르게 해석하고 이해했다면, '미흡했지만 정교화하는 패턴'으로 발전할

수 있었을 것이다. 학생들은 협상한 관희의 표상에서도 오류를 발견하고, 결국에는 2명만 이해한 양희의 표상으로 나타내게 되었다(<그림 18 오른쪽>).

이처럼 개개인의 표상이 소집단 협력 학습을 통하여 대부분 세련되고 효율적인 공동의 표상으로 발전되었다고 볼 수 있다. 하지만, 어느 요인에 의해서 빈약한 표상을 선택하거나 부분적인 참여로 협상하는 패턴처럼, 덜 세련된 표상을 선택할 수도 있음을 유의해야 한다. 따라서, 표면적인 논의가 활발히 일어났다고 해서 모두 세련된 공동의 표상으로 이어진다고는 할 수는 없었다.

V. 결 론

본 연구 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 초등학교 3학년 학생들은 수학적 문제를 해결할 때 하나의 양식만 고집하기보다는 둘 이상의 표상을 사용하지만, 이를 문제 해결에 효율적으로 연결하고 유창하게 변환하는데는 능숙하지 않다고 할 수 있다. 학생들은 대부분 2~3가지 표상을 시도하여 문제를 해결하려고 한 것으로 나타났다. 그러나 여러 학생들이 문제를 구조적으로 표상하지 못하거나, 정확하게 표상하고도 이를 다른 표상으로 바르게 변환하지 못하여 문제를 효율적으로 해결하지 못했기 때문이다. 이는 이전의 여러 연구 결과와도 일치한다(Pape & Tchoshanov, 2001; Preston et al., 2003). 따라서, 교사는 학생들이 다중 표상을 사용하여 문제를 해결하기를 강조하기 전에 다중 표상을 경험하여 각 표상의 장단점을 알고 이를 문제 해결에 적절하게 연결할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다고 본다.

둘째, 학생들이 문제를 해결할 때 사용한 여러 표상 양식 중에서 식은 매우 표준화된 형태였으나, 다른 표상 양식들은 비표준화된 형태이거나 여러 양식을 혼합한 형태가 많다고 할 수 있다. 학생들은 문제 해결 과정에서 식을 빈번하게 사용했으며, 정확한 기호와 규약에 따라 표상했다. 반면, 표는 필요한 정보만 기록하고 각 항목을 나타내지 않거나, 그림이나 설명 등을 임의적으로 덧붙여 나타낸 경우가 많았다. 그래프도 가로축과 세로축을 나타내지 않고 그림처럼 그리거나, 정확한 수치를 읽기 어려운 형태가 많았다. 여러 표상 양식 중에서 식이 특히 표준화된 것은 여러 연구에서도 보고되었다(예, Hitt, 1998). 연구자들은 이를 교과서나 수업에서 식을 지나치게 편중하여 강조하기 때문이라고 해석하였다.

셋째, 3학년 학생들은 상징적 표상보다 영상적 표상에 익숙하며, 문제의 주변적인 요소까지 표상하여 나타내는 경향이 있다고 할 수 있다. 문제 해결 전반에 걸쳐 그림 표상이 빈번하게 나타났으며, 다른 표상 양식에도 그림을 덧붙이는 경우가 많았다. 이는 고학년을 대상으로 한 연구에서 학생들이 그림을 거의 사용하지 않고 식이 우세하게 나타났다는 연구와는 상반되는 결과이다. 따라서 학년의 발달 수준에 따른 표상 지도도 신중하게 고려해야 할 요소라 하겠다.

넷째, 학생들은 소집단 협력 학습을 통하여 개별 표상을 공동의 표상으로 정교화했으며, 개개인의 표상에서도 변화를 보였다고 할 수 있다. 하지만, 소집단 활동에서 보인 정교화가 단기간에 개별 학생에게 내면화되어 발전하는데는 어려움이 있으며, 처음에 한 표상과 완전히 다른 표상으로 변화한 경우보다는 동일 양식 내에서 수학적으로 세련되어진 경우가 많았다. 미흡했던 개별 표상도 구성원들간의 활발한 의사소통, 긍정적인 상호작용, 다양한 표상과 전략 제안, 상대방의 표상에 대한 이해와 평가, 자기 반성과 수정 등의 과정을 통하여 세련된 공동의 표상으로 나타났으며, 개별 학생들도 점차 다양하고 발전적인 형태의 표상을 시도하려고 노력했다.

Zawojewski 등(2003)은 미흡했던 개별 그림도 소집단에서 효율적인 문제 해결과 표상의 정교화에 기여했다고 보고했으며, 장혜원(1997)도 미흡한 표상이 소집단의 상호작용 속에서 정교화될 수 있다는 가능성을 제기했다. 본 연구의 소집단 활동에서 나타난 표상의 정교화 과정은 '문제 이해, 구체적 방안 논의, 문제 해결 전략과 표상 협상, 공동의 표상과 해결 전략으로 문제 해결, 검토, 정리'로 나타낼 수 있다. 각 과정은 구체적인 표상과 전략, 의사소통에 따라 여러 형태의 하위 과정으로 나타났다.

다섯째, 소집단 협력 학습을 통한 표상의 정교화 과정은 어느 한 요소에 의해서 단순하게 이루어지지 않고, 여러 요소들이 복합적으로 작용하는 역동적인 과정으로 나타났다. 외적으로는 공통적인 과정을 찾을 수 있지만, 구체적인 과정과 활동, 상호작용의 질, 표상의 수학적 세련됨 등은 미묘한 차이를 두고 다양하게 나타났다.

Metz(1993)도 개개인의 표상이 어떻게 정교화되며 새로운 표상이 어떻게 문제 해결로 연결되는가는 외적으로 나타나는 표현과 언어만으로 이해하기는 어렵다고 했다. 본 연구에서, 동일한 과제도 소집단에 따라 다르게 정교화되었으며, 동일한 소집단에서도 과제나 난이도, 구성원들의 상호작용 등에 따라 다른 유형의 정교화가 나타났다. 충분한 논의 없이 다른 사람의 표상을 따라하거나 서로의 표상을 이해하지 못하다가도 재검토 과정에서 미흡하고 틀린 점을 발견하여 수정해가는가 하면, 불필요하거나 표면적인 요소에 치중하여 재검토하기도 했으며, 동일한 표상을 서로 다른 것으로 여기고 제안했다가 다른 사람의 설명을 듣는 과정에서 이를 수정하기도 했다. 따라서, 소집단 협력 학습을 통한 표상 지도에서 교사는 문제의 난이도, 개별 학생의 표상 수준과 형태, 협상 과정, 수학적 용어 사용, 학생의 정서적인 면 등을 고려하고 활동 과정을 통찰력 있게 관찰해 볼 필요가 있다.

여섯째, 소집단 협력 학습을 통한 표상의 정교화 과정을 몇 가지 유형의 패턴으로 범주화할 수 있었으며, 활발한 소집단 활동뿐만 아니라 서로의 표상에 대한 이해가 어느 정도 선행되고, 적절한 수학적 용어로 설명하고 논의하며, 긍정적인 상호작용과 자기반성, 검토 등이 효율적으로 일어날 때 더욱 발전적이라고 분석할 수 있다.

마지막으로 표상에 대한 교수·학습과 후속 연구를 위하여 몇 가지 제언을 한다.

첫째, 수학 교육에서 표상은 교사와 학생 모두에게 중요한 역할을 한다. 특히 수학적 문제를 해결할 때 어떻게 표상하는가는 매우 중요한 요소라 하겠다(장혜원, 1997). 따라서 교육 현장에서는 학생의 표상에 관심을 갖고 바람직한 지도를 하려는 의도적인 노력이 요망된다. 이러한 노력이 학생의 표상에 대한 교사들의 바른 이해와 인식을 토대로 이루어진다면 더욱 바람직할 것이다.

둘째, 표상은 학습자나 수학적 문제 해결과 별개로 존재하는 것이 아니라 학습자, 수학적 개념, 문제 해결 등과 밀접하게 연결되어 있다. 따라서 표상 자체를 독립적으로 이해하고 지도하는 것이 아니라 학습자가 스스로 구성하고 상호작용을 통하여 더욱 발전시킬 수 있는 수학적 활동으로 지도하는 것이 의미 있다 하겠다. 이를 위하여 수학적으로 세련된 표상뿐만 아니라 수학적 의사소통이 활발히 일어나는 수업 분위기를 조성해야 하겠다.

셋째, 본 연구는 학생의 표상에 관한 구체적인 이해를 얻고자, 교사가 적극 개입하지 않은 상태에서 학생의 표상과 문제 해결 활동을 연구했다. 하지만, 교사는 학생의 표상에 영향을 주는 주요 요인 중 하나이므로, 교사의 표상이 학생의 표상과 어떻게 상호작용하며, 구체적으로 어떤 영향을 주고받는지 연구해볼 필요가 있다.

넷째, 본 연구는 초등학교 3학년 학생을 대상으로 연구자가 개발한 과제를 가지고 수행되었다. 후속 연구에서는 여러 학년이나 여러 과제에 적용해 볼 필요가 있다. 이러한 후속 연구들은 학년 간 연계성 있는 지도와 학생의 발달 수준에 맞는 표상 지도를 위하여 기초 자료를 제공해 줄 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1999). 초등학교 교육 과정 해설(IV)-수학, 과학, 실과-, 서울: 대한교과서 주식회사.

김남균 (2002). 초등학교 수학 교수-학습에서의 수학적 상징화에 관한 연구, 한국교원대학교 박사학위논문.

김선화 (1992). 표현의 문제에 대한 수학 교육적 고찰: 함수 영역을 중심으로, 서울대학교 석사학위논문.

장혜원 (1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로, 서울대학교 박사학위논문.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*, Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University Press.

Cobb, P. (2000). From representations to symbolizing: Comments on semiotics and mathematical learning. In P. Cobb, K. McClain, & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* pp.17-36, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cramer, K. (2002). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. In M. D. Helen & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism* pp.449-463, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Diezmann, C. M. & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco(Ed.), *The roles of representation in school mathematics* pp.77-89, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N. & Belanger, N. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* pp.109-122, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Fennell, F. & Rowan, T. (2001). Representation: An important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics* **7(5)**, pp.88-292.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* pp.197-218, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Goldin, G. A. & Shteingold, N. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* pp.1-23, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Greeno, J. G. & Hall, R. P. (1997). Practicing representation. *Phi Delta Kappan* **78(5)**, pp.361-367.

Hitt, F. (1998). Working group on representations and mathematics visualization, *Teaching and Learning of Mathematics* **16(4)**, pp.10-20.

Izsák, A. & Sherin, M. G. (2003). Exploring the use of new representations as a resource for teacher learning. *School Science and Mathematics* **103(1)**, pp.18-27.

Jeon, P. K. (1988). *Geometry problem solving of Korean middle school students: An analysis of representation and transfer*, Unpublished doctoral dissertation, The University of Pittsburgh.

Jones, A. D. (2001) The fifth process standard: An argument to include representation in standards 2000. (http://www. math. umd. edu/users/dac/ 650old/ jonespaper.html)

Kamii, C.; Kirkland, L. & Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. In A. A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* pp.24-34, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Lenchner, G. (1983). *Creative problem solving in school mathematics*, Boston, MA: Houghton Mifflin Company.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2000) Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, K. McClain, & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* pp.361-383, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lubinski, C. A. & Otto, A. D.(2002). Meaningful mathematical representations and early Algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics* **9(2)**, pp.76-80.

Metz, K. E. (1993). Preschoolers' developing knowledge of the pan balance: From new representation to transformed problem solving. *Cognition and Instruction* **11(1)**, pp.31-93

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nelissen, J. M. C. & Tomic, W. (1996). Representation and Cognition. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 402 012)

Pape, S. J. & Tchoshanov, N. A. (2001). The role of representations in developing mathematical understanding, *Theory into Practice* **40(2)**, pp.118-127.

Perry, J. A. & Atkins, S. L. (2002). It's not just notation: Valuing children's representations. *Teaching Children Mathematics* **9(4)**, pp.196-201.

Preston, R. V.; Garner, A. S. & Lambdin, D. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School* **9(1)**, pp.38-43.

Pyke, C. L. (2003). The use of symbols, words, and diagrams as indicators of mathematical cognition: A causal model. *Journal for Research in Mathematics Education* **34(5)**, pp.406-432.

Raymond, S. N. (1994). The teaching of thinking and problem solving. In E. C. Carterette, & M. P. Friedman (Series Eds.) & R, J. Sternberg (Vol. Ed.), *Handbook of percepion and cognition: Thinking and problem solving* (2nd ed., pp. 409-449). San Diego, CA: Academic Press, Inc.

Seeger, F. (1997). Representations in the mathematics classroom: Reflections and constructions. In J. Voigt (Ed.), *The culture of the mathematics classroom* pp.308-343, NY: Cambridge University Press.

Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education* **31(1)**, pp.89-112.

Tall, D. (1994). A versatile theory of visualization andsymbolization in mathematics. *Paper presented at the Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Ensignement des Mathématiques.* Toulouse, France, July.

Voutsina, C. & Jones, K. (2001) The micro-developmen of young children's problem solving strategies when tackling addition tasks. *Psychology of Mathematics Education* **25(4)**, pp.391-399.

Zawojewski, J. S.; Lesh, R., & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism* pp.317-336, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

An Analysis of Third Graders' Representations and Elaborating Processes of Representations in Mathematical Problem Solving

Lee, Yang Mi
Daejeon Heungryong Elementary School, Gayang 2-Dong, Dong-Gu, Daejeon, 300-092, Korea
ed-aloha@hanmail.net

Jeon, Pyung Kook
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, 363-791, Korea
jeonpk@knue.ac.kr

This study was conducted to attain an in-depth understanding of students' mathematical representations and to present the educational implications for teaching them. Twelve mathematical tasks were developed according to the six types of problems. A task performance was executed to 151 third graders from four classes in DaeJeon and GyeongGi. We analyzed the types and forms of representations generated by them. Then, qualitative case studies were conducted on two small-groups of five from two classes in GyeongGi. We analyzed how individuals' representations became elaborated into group representation and what patterns emerged during the collaborative small-group learning. From the results, most students used more than one representation in solving a problem, but they were not fluent enough to link them to successful problem solving or to transfer correctly among them. Students refined their representations into more meaningful group representation through peer interaction, self-reflection, etc.. Teachers need to give students opportunities to think through, and choose from, various representations in problem solving. We also need the in-depth understanding and great insights into students' representations for teaching.

* ZDM Classification : D52
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D99
* Key Word : mathematical representations, elaborating process of representations, mathematical problem solving.