

중학교 1학년 학생들의 농도 문장제 해결력에 대한 분석

박 정 아 (중화중학교)

신 현 용 (한국교원대학교)

I. 서론

수학에서 대수는 일종의 언어 체계로서 수학의 대부분이 이를 통해서 의사소통이 되고, 중학교 수학에서는 대수 영역이 교과서의 많은 부분을 차지하고 있다. 중학교 대수 영역에서는 패턴, 기호, 함수, 그래프 등을 탐구하여 실제 상황 및 수학적 상황을 수식으로 표현하고 변화를 분석하는 능력을 기르는 것을 강조하고 있다(NCTM, 1989; 2000). 또한 7차 수학과 교육과정에서는 '문자와 식' 영역의 학습을 통해 일상생활에서 일어나는 현상을 수학적 표현으로 형식화하는 능력을 기를 것을 강조하고 있으며, 교과서에서는 문장제가 이러한 기회를 제공하고 있다. 문장제는 수리적인 능력이 종합적으로 발휘되고 수리적인 사고력을 신장시킬 수 있는 중요한 문제 해결의 장이라고 볼 수 있으며(김동우, 1996), 문장제 해결 경험을 통해 학생들의 계산 기술을 발달시키는 동시에 수학적 이해를 도울 수 있다(Ballem & Cunningham, 1982).

문장제의 해결이 어렵다는 것은 학생들과 교사 모두 인정하는 사실이다. 학생들은 같은 수를 사용하더라도 계산 기술을 요구하는 문제는 쉽게 해결하지만 문장제의 해결은 어려워한다. 문장제를 해결하기 위해서는 문장에서 중요한 내용을 선택하고, 무엇을 미지수로 놓을 것인가를 결정하고, 문장의 내용에 맞게 방정식을 세울 수 있어야 한다. 그리고 방정식을 해결한 후에 문제에 맞는 적절한 답을 제시해야 한다. Mayer(1983)는 문장제 해결

은 두 단계를 거쳐 이루어지며 다섯 가지 지식이 필요하다고 하였다. 첫째 단계는 문장제 속의 단어들을 방정식으로 이르게 하는 표상 단계로서 언어적(linguistic) 지식, 의미적(semantic) 지식, 도식적(schematic) 지식을 필요로 하고, 두 번째 단계에서는 대수적, 산술적인 법칙을 적용하는 단계로서 절차적(procedural) 지식, 전략적(strategic) 지식을 필요로 한다. 여기서 언어적 지식은 문장 독해를 할 수 있는 단어에 대한 지식을, 의미적 지식은 세상에 대한 어떤 사실과 관련된 지식을, 도식적 지식은 문제의 형태나 구조에 대한 지식을, 절차적 지식은 연산을 순서적으로 수행할 수 있는 지식을, 전략적 지식은 문제 해결을 위하여 여러 형태의 유용한 지식을 활용하는 것에 대한 지식을 뜻한다.

Clement(1982)는 학생들이 문장제를 해결할 때 대수적 지식의 부족으로 오류가 발생하기도 하지만 문장을 대수적 방정식으로 나타낼 때 가장 많은 오류가 나타난다고 하였으며 그의 연구에서 학생들은 문장에서 제시된 단어 순서대로 대수적 방정식을 구성하는 오류를 범하였다. 따라서 문제를 이해하고 표상하는데 유용한 지식인 언어적 지식, 의미적 지식, 도식적 지식의 학습 지도에 신경을 쏟을 필요가 있다. Chaiklin은 학생들이 변수 사이의 관계를 나타내는 것을 어려워하며 문제 기술에서의 표면적인 약간의 차이로 인해 방정식을 구성하는 데 큰 영향을 받는다고 하였다(Kieran, 1992). 중학교에서 문자 기호가 도입되면서 학생들은 대수식이나 방정식을 계산 과정이나 절차가 아닌 그 자체를 대상으로 볼 수 있어야 하는데 문자 변수를 어떤 수로 생각하게 되어 문자식을 계산이 완료되지 않은 것으로 보게 되어 오류를 범하기도 한다. 이와 같은 대수 개념에 대한 불안정한 이해는 문장제를 해결하는데도 장애요인으로 작용할 수 있다.

이정은(1998)은 7-가단계의 일차방정식의 활용 단원에서 공통적으로 다루어지는 문장제를 유형별로 분류하

* 2005년 5월 투고, 2005년 11월 심사 완료.

* ZDM분류: O63

* MSC2000분류: 97C20

* 주제어: 정체성, 수학교실, 공동체, 사회적 관행, 정의적 영역.

여 각 유형에 따른 학생들의 문장제 해결력을 조사하였는데, 다른 영역에 비해 농도 문장제의 해결력이 현격히 낮게 나타났다. 김미정(2004)의 연구에서도 문자 기호를 사용하여 문장을 식으로 나타낼 때 여러 유형 중 농도 문장제의 성취도가 가장 낮게 나타났다. 실제 농도 문장제는 7-가 단계 수학 교과서에서 공통적으로 다루고 있고 과학 교과에서는 중학교 2학년때 퍼센트 농도를 소개하고 고등학교에서는 퍼센트 농도외의 몰 농도 등의 다양한 농도를 다루고 있다. 이와 같이 실생활과 관련된 중요한 소재를 포함하는 농도 문장제는 여러 가지 유형의 문장제 중에서 학생들이 특히 어려워하므로 이 문제에 집중하여 효과적인 교수-학습 방법을 마련하기 위해 어떤 점에서 학생들이 농도 문장제를 어려워하는지 조사할 필요가 있다.

이를 위해 본 연구에서는 농도 문장제를 유형별, 단계별로 분류하여 중학교 1학년 학생들이 농도 문장제 해결에서 보이는 어려움과 그 어려움의 원인을 분석하고, 농도 문장제의 유형에 따른 농도 문장제 해결력을 비교, 분석하고자 한다.

본 연구를 위해 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

- 연구 문제 1. 농도 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 어려움은 무엇이며, 그것의 원인은 무엇인가?
 연구 문제 2. 농도 문장제 유형에 따른 학생들의 문제 해결력에는 어떤 차이가 있는가?

II. 문헌 검토

1. 방정식과 관련된 대수적 사고 요소

김성준(2004)은 방정식 단원과 관련된 대수적 사고 요소를 8가지로 설명하였는데 그 중 문장제와 관련된 사고요소에 대해서 살펴본다.

가. 양을 비교하는 양적 추론

양적인 추론으로 문제 상황에서 양이 서로 어떻게 관련되어 있는가를 인식하는 것은 방정식을 이용한 문제해결에서 미지의 양을 결정하는데 중요한 역할을 한다. 산술에서 양적인 추론은 일정한 값에 대해 사고하는 것으로 제한되지만 대수에서는 양을 대상으로 보고, 관계를

일반화하고, 변하는 양과 미지수를 사용하는 것 등에 적용된다. 양을 비교하는 활동으로 주어진 자료를 파악하고 문제 상황에 내재된 의미를 이해할 수 있다. 방정식을 세우는 활동은 같은 양을 등호를 이용해 나타내는 활동이므로 양을 비교하는 양적인 추론은 방정식에서 매우 중요하다.

나. 대칭성 확인하기

산술을 학습한 학생들은 등호를 하나의 과정으로 해석하는 경향이 있다. 산술에서 $2+5$ 는 그 자체가 대상으로 인식되기보다 7이라는 결과를 구하기 위한 과정으로 인식된다. 학생들은 $2+5$ 가 주어지면 $2+5=7$ 이라는 연산과정을 떠올려 두 수의 합이라는 하나의 대상으로 인식하기보다 두 수를 더하는 과정으로 인식하며, 이 과정에서 등호는 무엇을 하라는 명령이나 과정과 결과를 구분하는 기호로 받아들여진다. 그러나 대수에서는 동치 관계를 나타내는 기호로 이해되어야 한다. 등호 해석은 방정식에서 동치 개념에 대한 이해와 연결되는데, 방정식은 양변에 있는 서로 다른 형태의 대수식을 동치관계를 의미하는 등호를 사용하여 연결한 것이므로 대수식에서 동치 관계를 파악하는 것은 방정식 풀이에서 매우 중요하다. 따라서 등호가 계산 결과를 나타내는 표시가 아니라 동치관계를 나타내는 것임을 인식해야 한다.

다. 방정식을 문제해결 도구로 인식하기

문제 상황에 적합한 해결 전략을 선택하는 과정에서 방정식을 효과적인 문제해결 도구로 생각해야 할 수 있어야 하는데, 이것은 방정식을 세워서 문제를 해결하는 전략이 다른 문제해결 전략과 비교했을 때 더 효율적이라는 것을 인식시킴으로써 가능하다. 이를 위해서는 기본적으로 문제 상황을 문자 기호를 사용하여 방정식으로 전환하는 사고 능력이 갖추어져 있어야 한다.

라. 미지수

방정식에서 미지수는 방정식의 해를 나타내는 '자리지기'로 간주된다. 문제 상황에 대한 양적 추론을 바탕으로 미지의 양이 어떤 것인지 파악하여 x 등의 기호를 사용하여 적절한 식을 세울 수 있다면 미지수에 대한 이해 수준이 어느 정도 갖추어진 것으로 판단할 수 있다.

바. 관계 파악 능력

관계를 파악하는 능력은 조건이나 정보를 다양한 형태로 인식하는 능력을 말한다. 미지인 양과 주어진 양을 정확히 파악하여 같을 것으로 기대되는 두 양을 비교하는 활동을 통해 방정식을 세우기 위해서는, 문제 상황을 여러 각도에서 살펴보아야 한다. 주어진 양과 미지의 양 사이의 관계를 적절히 파악하기 위해서는 식을 대상으로 보는 능력, 관계를 서로 관련짓는 능력, 문제 상황을 표현하기 위해 관점을 바꾸는 능력, 문제를 결정하는 요소 간의 관련을 새로운 관점에서 보는 능력이 필요하다.

2. 문장제 문제 해결 단계 및 필요한 지식의 종류

Mayer(1983)는 문장제를 해결에는 크게 두 단계의 과정을 거치며 필요한 지식을 알고 있어야 한다고 하였다. 첫째는 문장제 속에 단어들을 방정식으로 이르게 하는 표상단계인데 언어적, 의미적, 도식적 지식이 여기에 속하며, 둘째로 대수적, 산술적인 법칙을 적용하는 단계로 방정식으로부터 알려지지 있지 않은 수 값으로 이르는 해결단계이다. 절차적 지식과 전략적 지식이 여기에 해당한다.

본 연구에서는 농도 문장제 해결에서의 어려움을 Mayer가 말한 다섯 가지 지식 중에서 의미적 지식, 도식적 지식, 절차적 지식의 측면에서 분석할 것이다. 중학교 1학년 학생들은 언어적 지식은 이미 갖추고 있다고 판단되며 농도 문장제를 해결하기 위해서는 식 세우기 전략이 주로 사용되기 때문에 의미적 지식과 전략적 지식은 분석에서 제외하였다.

가. 의미적 지식

세상에 대한 사실과 수학적 사실에 대한 지식으로 농도 문장제에서의 의미적 지식은 소금물의 양은 물의 양과 소금물의 양의 합이라는 사실, 소금물에서 물이 증발하더라도 소금의 양은 변화가 없다는 사실, 퍼센트 농도를 구하는 것에 대한 지식 등을 뜻한다.

나. 도식적 지식

문제의 형태나 구조에 대한 지식으로 농도 문장제를 해결하기 위해 농도 문장제를 이해하고 논리적으로 문자

를 배열하여 식을 세우는 데 필요한 지식을 뜻한다.

다. 절차적 지식

수학적 연산을 순서적으로 수행할 수 있는 지식으로 계산을 하고 방정식을 풀기 위해 사용되는 산술적, 대수적 절차에 대한 지식을 뜻한다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 목적인 중학교 1학년 학생들이 농도 문장제 해결 과정에서 겪는 어려움을 알아보기 위하여 서울시 소재하고 있는 중량구 J중학교 1학년 2개 학급, 영등포구 Y중학교 2개 학급, 송파구 S중학교 1개 학급의 166명 학생들을 연구 대상으로 선정하였다.

2. 연구 방법

가. 조사 연구

본 연구에서는 농도 문장제를 유형별, 단계별로 분류하여 각 유형에 따른 중학교 1학년 학생들의 농도 문장제 해결력을 조사하고, 농도 문장제 해결 과정에서 학생들이 보이는 어려움과 그것의 원인을 분석하고자 한다. 이를 위하여 지필 검사를 통한 조사 연구를 실시하였다.

나. 면담

지필 검사만으로는 농도 문장제 해결과정에서 나타나는 어려움의 원인을 파악하는 것이 쉽지 않다고 판단하여 보다 심층적인 자료를 수집하기 위해 지필 검사의 결과를 바탕으로 면담을 실시하였다.

3. 검사 도구

본 연구에서 이용된 검사 도구는 '농도 문장제 검사 문항'과 '지식 검사 문항' 두 가지이다. '농도 문장제 검사 문항'은 제 7차 교육과정에 따른 수학 7-가 교과서의 일차방정식의 활용 단원에 수록된 농도 문장제를 분류하여 농도 문장제 8문항으로 구성하였는데 학생들의 농도 문장제에 대한 해결력과 해결 과정의 어려움을 분석하기 위함이다. '지식 검사 문항'은 '농도 문장제 검사 문항'의

8문항을 해결하는데 필요한 의미적 지식, 도식적 지식, 절차적 지식에 관한 문항으로 구성하였다. 이는 학생들의 농도 문장제 해결 과정에서 나타나는 어려움과 어려움의 원인을 세 가지 지식의 측면에서 분석하기 위함이다.

제작된 검사도구는 수학교육 전문가와 현직 교사의 검토를 받아 타당성을 검증 받았다. 검사 결과 신뢰도는 '농도 문장제 검사 문항'에 대한 Cronbach α 값은 0.85로, '지식 검사 문항'의 Cronbach α 값은 0.84로 검증 받았다.

4. 검사 실시

가. 예비 검사

예비 검사는 선정된 예비 검사용 문항의 적절성, 소요 시간, 검사 대상과의 적합성 여부 등을 파악하여 본 연구의 목적에 부합되는 검사 도구를 제작하기 위하여 실시하였다. 예비 검사는 서울 시내 J중학교 1학년 1개 학급을 대상으로 2004년 6월 말에 실시하였으며 예비 검사 실시 후 학생들의 성취도가 현격히 낮게 나타난 5개 문항을 '농도 문장제 검사 문항'에서 제외하였고 '지식 검사 문항'에서도 그에 따라 문항 수를 줄였으며 계산을 쉽게 하기 위해 숫자를 간단한 것으로 바꾸었다.

나. 본 검사

예비 검사를 통해 수정·보완된 검사지로 2004년 7월 초에 이들에 걸쳐 '농도 문장제 검사 문항'의 본검사를 먼저 실시하였고 그 다음 날에 '지식 검사 문항'의 본검사를 실시하였다. 검사 시간은 45분이었으며 본 검사는 예비 검사를 실시하지 않은 학생들을 대상으로 실시하였다. 이것은 예비 검사를 통해, 검사 내용의 사전 유출과 정보 누수를 방지하여 조사 결과의 정확성을 기하기 위함이다.

다. 학생과의 면담 실시

지필 검사에서 나타난 결과를 분석한 후에 문장제 해결에서 보이는 어려움의 원인을 심층적으로 분석하기 위해 개별 면담을 실시하였다. 면담 대상 학생들은 J중학교에서 5명을 선정하였는데, 지필 검사의 결과만으로 오답의 원인을 파악하기 어려운 학생을 대상으로, 수학 담

당 교사와 논의하여 면담 대상 학생을 선정하였다. 면담은 학생들이 '농도 문장제 검사 문항'에서 틀린 문제를 먼저 풀어보도록 하였고 그 후에 본검사에서 반응한 풀이 과정을 보여주고 실제 해결한 과정을 연구자가 질문하고 이에 학생이 대답하는 과정으로 진행하였다. 모든 면담 내용은 녹음을 하였고 면담자와 학생간에 이루어진 대화 내용은 타이핑을 통하여 문서화한 후에, 문서화된 자료와 면담 과정에서 학생이 문제를 풀 자료를 분석하였다.

선정된 학생들이 면담 과정에서 풀 문항을 다음과 같다.

학생 A : 문항 3, 4, 5, 6, 7, 8

학생 B : 문항 4, 6 학생 C : 문항 2, 6, 7

학생 D : 문항 6 학생 E : 문항 1, 3, 7, 8

5. 자료 분석

연구 문제 1을 해결하기 위해 자료 분석은 '농도 문장제 검사 문항'에서 학생들이 적은 풀이 과정과 정답을 보고 각 문항별로 학생들이 보이는 어려움을 정리하고 각 어려움의 유형에 해당하는 학생수를 퍼센트로 나타내었다. '농도 문장제 검사 문항'과 '지식 검사 문항'의 답을 비교하고 문서화된 면담 자료를 근거로 하여 어려움의 원인을 분석하였다.

연구 문제 2를 해결하기 위해 '농도 문장제 검사 문항'의 각 문항별 해결력을 정답 백분율로 나타내었다. 학생 답안을 근거로 제시하면서 농도 문장제 유형별 해결력을 비교하였다.

IV. 결과 분석

1. 농도 문장제 해결과정에서의 어려움과 그 원인

'농도 문장제 검사 문항'과 '지식 검사 문항'의 검사 결과와 문서화된 대화 내용을 토대로 각 문항별로 어려움과 그 원인을 분석하였다. 어려움의 원인은 Mayer(1983)가 말한 문장제를 해결하는데 필요한 지식 중 의미적 지식, 도식적 지식, 절차적 지식의 측면에서 분석하였다.

가. 문항 1, 2, 3

문항 1. 물 100g에 소금 25g을 넣어 만든 소금물의 농도는 얼마인가? 답 : 20%

문항 2. 140g의 물에 20g의 소금을 넣은 소금물과 180g의 물에 30g의 소금을 넣은 소금물 중에서 어느 것이 더 짜까? 답 : 180g의 물에 소금 30g을 넣은 소금물

문항 3. 4%의 소금물 750g에 녹아있는 소금의 양을 구하여라. 답 : 30g

문항 1은 농도의 개념과 공식을 설명할 때 처음으로 제시되는 문제이고 문항 2는 더 짙 소금물의 선택하기 위해 두 소금물의 농도를 구하여 그 농도를 비교해야 하는 문제이다. 문항 3은 주어진 농도와 소금물의 양으로 소금물에 녹아있는 소금의 양을 구하는 문제이고 학생들은 이 문제를 '소금물 × $\frac{\text{농도}(\%)}{100}$ '로 계산하거나 소금의 양을 미지수 x 로 놓고 ' $\frac{x}{\text{소금물의 양}} \times 100 = \text{농도}(\%)$ '로 식을 세워 답을 구하였다.

문항 1, 2, 3을 해결할 때 학생들이 보인 어려움의 유형과 그 퍼센트를 나타낸 결과는 다음 표와 같다.

<표 IV-1> 문항 1, 2, 3의 어려움에 대한 분석 결과

원인	어려움의 유형	문항 1	문항 2	문항 3
의미적 지식	농도에 대한 이해가 부족한 경우	28.3	42.8	25.3
	농도를 비교하지 못한 경우	-	2.4	-
	식이 틀린 경우	33.1	27.7	-
절차적 지식	농도를 구하는 식 소금의 양을 구하는 식	-	-	4.2
	계산과정의 오류	1.2	2.4	10.8
	계(%)	잘못된 계산식 %	잘못된 계산식 %	잘못된 계산식 %

이 세 문항에서는 어려움의 원인을 의미적 지식과 절차적 지식으로 분석하였는데 도식적 지식을 원인으로 분석하지 않은 것은 이 문항들은 전형적인 농도 문장제가 아니라 농도의 의미에 대한 기본적인 문제이기 때문이다.

1) 의미적 지식

문항 1, 2, 3에 필요한 의미적 지식에는 소금을 물에 넣어 만든 소금물의 양, 농도와 소금의 양을 구하는 식에 대한 이해, 농도는 0%이상 100%이하라는 사실, 농도가 소금물의 짙 정도를 나타내는 도구라는 사실 등이다. 다음은 문제를 해결하지 못한 이유가 의미적 지식에 해당하는 경우이다.

가) 농도에 대한 이해가 부족한 경우

문항에 아무런 응답을 하지 않았거나 의미없는 식을 사용하여 답을 얻은 경우를 의미한다. 예를 들면, 문항 1

에서 농도를 구할 때 $\frac{100}{25} = 4\%$, $100+25=125\%$,

$100 \times \frac{1}{25} = 4\%$ 와 같이 문제에서 주어진 수를 사용하여

의미없는 방식으로 답을 구한 경우이다. 문항 2에서는 소금물의 양이 많은 것이 더 짜다고 하거나 '물의 양 × $\frac{\text{소금의 양}}{100}$ '과 같이 의미없는 식을 계산하여 그 값이 큰 것이 더 짜다고 판단한 것이 여기에 해당한다.

나) 농도 또는 소금의 양을 구하는 식이 틀린 경우

문항 1과 2에서 농도를 구하는 식의 분모에 소금물의 양 125g을 대입하여 농도를 구해야 하는데 학생들은 이때 물의 양인 100g을 대입하여 즉, 농도를

$\frac{25}{100} \times 100 = 25\%$ 로 답한 경우가 있었다. 학생들은

물과 소금을 섞어서 얻은 소금물의 양이 물의 양과 같다고 보는 것이다. 그 이유는 소금이 물에 녹는 물리적인 성질로 인해 소금의 양을 고려하지 못하기 때문이다. 학생들의 이러한 잘못된 생각은 '지식 검사 문항'의 4번 문항과 개별 면담 과정에서 확인할 수 있었다. 지식 검사 문항의 4번은 물 100g과 소금 25g을 섞었을 때의 소금물의 양을 구하라는 문제인데 이 문제의 정답률은 66.8%에 불과하였다. 이와 같이 학생들이 틀린 식으로 농도를 구하는 것은 소금물의 양과 물의 양을 같다고 보는 잘못된 생각에 기인한 것이다.

문항 3에서 소금의 양을 구하는 식이 바르지 못한 경우가 여기에 해당한다.

다) 농도를 비교하지 못한 경우

이 경우는 문항 2에만 해당하는 것인데, 2.4%의 학생들이 두 가지 소금물의 농도를 각각 구하여 그것을 비교하지 않고 등호로 연결함으로써 등식을 만들었다. 이 학생들은 식의 의미를 이해하지 못하고 평소에 농도 문장제에 대한 식을 세우는 방식 그대로 문제를 푼 것으로 보인다.

예를 들면 전형적인 농도 문장제는 잘 푼 학생은

$(140 + 20) \times \frac{x}{100} = (180 + 30) \times \frac{x}{100}$ 와 같이 식을 세워 문제를 풀었다. 이 식은 전형적인 농도 문장제를 해결할 때 세우는 식과 유사한 것으로 문항 2에서는 소금의 양이 다르기 때문에 이런 식으로 등식을 세울 수 없다.

2) 절차적 지식

농도, 소금의 양을 구하기 위한 식은 바르게 세웠지만 계산 과정에서 오류가 발생하여 틀린 답을 구한 경우를 말한다.

나. 문항 4, 5, 6, 7, 8

문항 4. 5%의 소금물 200g이 있다. 여기에 몇 g의 물을 넣으면 4%의 소금물이 되는가? 답: 50g.

문항 5. 농도가 3%인 소금물 200이 있다. 이것에서 몇 g의 물을 증발시키면 6%의 소금물이 되겠는가? 답: 100g.

문항 6. 4%의 소금물 100g에 물 100g을 더 넣어 만든 소금물의 농도를 구하여라. 답: 2%.

문항 7. 10%의 소금물 100g이 있다. 이것에 몇 g의 소금을 더 넣으면 25%의 소금물이 되겠는가? 답: 20g.

문항 8. 7%의 소금물 300g에 3%의 소금물 몇 g을 넣으면 5%의 소금물이 되겠는가? 답: 300g.

위 문제를 해결할 때 학생들이 보인 어려움의 유형과 그 퍼센트를 의미적 지식, 도식적 지식, 절차적 지식의 측면에서 나타낸 결과는 다음 <표 IV-2>와 같다.

<표 IV-2> 문항 4, 5, 6, 7, 8의 어려움에 대한 분석 결과

원인	어려움의 유형	문항	문항	문항	문항	문항
		4	5	6	7	8
의미적 지식	농도에 대한 이해가 부족한 경우	29.5	33.1	38.6	37.3	38.6
	넣거나 증발시킨 물의 양을 식에 나타낸 경우	5.4	4.8	-	-	-
	더 넣은 소금의 양을 식에 나타내지 않은 경우	-	-	-	14.5	7.2
	증가한 소금물의 양을 나타내지 못한 경우	3.6	4.2	0.6	16.3	9.6
	소금의 양을 구하는 식이 틀린 경우	1.8	1.8	1.2	0.6	2.4
	농도 구하는 것에 대한 이해가 부족한 경우	-	-	9.0	-	-
	농도 변화에 대한 이해가 부족한 경우	-	-	4.8	-	-
도식적 지식	식을 나타내지 못한 경우	1.2	1.2	3.6	1.8	5.4
절차적 지식	방정식을 푸는 과정에 오류가 있는 경우	5.4	4.2	1.2	6.6	4.2
계(%)		잘못된 계산 식	잘못된 계산 식	잘못된 계산 식.0	잘못된 계산 식	잘못된 계산 식

1) 의미적 지식

문항 4~8에서는 농도의 의미를 이해하고 소금의 양과 농도를 구할 수 있어야 하며 소금물에 물, 소금 또는 소금물을 넣었을 때의 농도, 소금의 양, 소금물의 양의 변화를 예상하고 구할 수 있어야 한다. 또한 대수 기호에 대한 의미 등을 알고 있어야 한다. 다음은 이러한 의미적 지식이 부족하여 문제를 해결하지 못한 경우들이다.

가) 농도에 대한 이해가 부족한 경우

문항 4~8에 아무런 응답을 하지 않았거나 의미 없는 식을 적어 놓은 경우를 말한다.

나) 더 넣거나 증발시킨 물의 양을 식에 나타낸 경우

이 경우는 소금물에 물을 더 넣거나 증발시키는 문항 4~6 해당하는 것인데, 더 넣는 물의 양을 x 라고 놓고

(문항 4의 답안 예) $\frac{5}{100} \times 200 + x = \frac{4}{100} (200 + x)$

와 같이 물의 양 x 를 식에 나타낸 경우를 말한다. 소금의 양이 같다는 것으로 등식을 세워야 하기 때문에 이 식은 등식이 되지 않는다. 이 경우의 학생들은 문제의 문장 순서대로 식을 세우고 있으며, 대수 기호인 +기호는 물을 더 넣는 행동을 의미하는 것으로, 등호는 그 행동의 결과를 나타내는 것으로 사용하였다. 또한 소금물에 물을 더 넣어도 녹아있는 소금의 양이 변하지 않는다는 사실을 알지 못하였다. 즉, 양의 변화를 예상하고 양 사이의 관계를 파악하여 식을 세운 것이 아니라 문장의 기술 순서대로 식을 세움으로써 문제를 해결하지 못하였다.

다) 더 넣은 소금의 양을 식에 나타내지 않은 경우

이 경우는 소금물에 소금이나 소금물을 더 넣는 문항 7, 8에 해당하는 것인데, 소금의 양이 같다는 것으로 등식을 세울 때 증가한 소금의 양을 식에 나타내지 않음으로써 바른 등식을 세우지 못한 경우이다. 예를 들면, 문항 7에서 더 넣는 소금의 양을 x 라고 놓고 $\frac{10}{100} \times 100 = \frac{25}{100} \times (100 + x)$ 와 같이 식을 세워 답을 구한 경우를 말한다. 이 학생들은 소금물에 소금을 더 넣었을 때 소금이 녹기 때문에 소금물의 양은 변하지 않는다고 생각하였고 자신이 쓴 식이 좌변과 우변의 식이 어떤 양을 의미하는지 알지 못한 채 식을 세우고 있었다. 실제 면담 과정에서 학생들이 식의 좌, 우변은 소금물의 양을 의미하고 소금물의 양이 같기 때문에 위의 식이 등식이라고 생각하고 있음을 확인하였다. 이와 같이 식이 나타내는 의미를 해석하지 못하고 소금물에 소금을 넣었을 때의 양적 변화를 파악하지 못하기 때문에 문제에 맞는 바른 식을 세우지 못한 것이다.

라) 증가한 소금물의 양을 나타내지 못한 경우

소금물에 더 넣는 물, 소금, 소금물의 양을 x 로 놓고 x 를 사용하여 증가한 소금물의 양을 바르게 나타내지 못한 경우를 말한다. 예를 들면, 문항 7에서 100g의 소금물에 소금 g 을 넣은 소금물의 양을 $(100 + x)$ 가 아닌 $(100 - x)$, 100으로 표현한 경우이다. '지식 검사

문항'의 13번 문제를 통해 학생들이 증가한 소금물의 양을 구할 수 있는가를 확인하였는데, 소금물 400g에 물 200g을 넣어 만든 소금물의 양을 바르게 구한 학생은 40.3%이었고 소금물 400g에 소금 30g을 더 녹여 만든 소금물의 양을 바르게 구한 학생은 34.9%에 불과하였다. 물과 소금을 더 넣은 문항에서 정답률의 차이가 나는 것은 소금이 물에 녹는다는 성질로 인해 소금의 양을 고려하지 못하기 때문인 것으로 보인다.

마) 소금의 양을 구하는 식이 틀린 경우

등식의 양변에 소금의 양을 나타낸 식이 틀린 경우이다.

바) 농도 구하는 것에 대한 이해가 부족한 경우

이것은 문항 6에만 해당되는데 물을 더 넣은 소금물의 농도를 주어진 소금물에 녹아있는 소금의 양에 더 넣는 물의 양을 더한 값으로 생각하여 $\frac{4}{100} \times 100 + 100 = 104\%$ 와 같이 식을 세워 문제를 푼 경우를 말한다.

사) 농도 변화에 대한 이해가 부족한 경우

이 경우 역시 문항 6에만 해당된다. 소금물에 물을 더 넣으면 소금물의 농도는 4%보다 낮아지는게 이러한 사실을 인식하지 못하여 농도가 변하지 않는 것으로 생각하고 문제를 푼 경우를 말한다.

2) 도식적 지식

문항 4~8은 등식을 세울 때 소금의 양이 같다는 것으로 식을 세우게 된다. 문항 4의 경우에는 (물을 넣기 전의 소금물에 녹아있는 소금의 양)=(물을 넣은 후의 소금물에 녹아있는 소금의 양)으로 식을 세우게 되는데 이와 같은 도식을 알지 못하는 경우를 말한다. '지식 검사 문항'에서 각 문항에 대한 의미적 지식은 알고 있는 것으로 확인되지만 바른 식을 세우지 못한 경우로써 면담 과정에서 연구자의 큰 도움없이도 문제를 잘 해결하는 학생들을 도식적 지식이 부족한 것으로 분류하였다.

3) 절차적 지식

방정식을 해결하는 과정에 오류가 발생하여 옳은 답

을 구하지 못한 경우를 말한다. 괄호를 풀어 전개할 때 인수를 하나의 항에만 곱하여 분배법칙을 바르게 적용하지 못한 경우, 분수 계수를 가지고 있는 동류항을 간단히 하지 못하는 경우, 산술 계산의 오류 등이 있었다.

2. 농도 문장제 유형에 따른 문제 해결력 비교

'농도 문장제 검사 문항'의 각 문항에 대한 학생들의 해결력을 정답 백분율로 나타낸 결과는 다음 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3> 각 문항에 대한 정답 백분율

유형 문항 번호	유형 1			유형 2			유형 3	유형 4	계
	1	2	3	4	5	6	7	8	
정답률 (%)	37.3	24.7	59.6	53.0	50.6	36.1	22.9	32.5	39.7

유형 1은 농도 개념에 관한 기본적인 문제, 유형 2는 주어진 소금물에 물을 더 넣거나 증발시키는 문제, 유형 3은 소금물에 소금을 넣는 문제, 유형 4는 소금물에 소금물을 넣는 문제이다. 8개의 문항에 대한 학생들의 정답 백분율은 3 → 4 → 5 → 1 → 6 → 8 → 2 → 7의 문항 순으로 나타났으며 그 중 소금의 양을 구하는 간단한 문제인 3번 문항이 59.6%로 가장 높게 나타났고 7번 문항이 22.9%로 가장 낮게 나타났다.

유형 1은 농도 문장제를 풀기 전에 소개되는 농도 개념과 관련된 기본적인 문제들이다. 이 중에서 소금물의 양과 농도를 이용해 소금의 양을 구하는 문항 3의 해결력은 높게 나타난 반면, 소금과 물의 양으로 농도를 구하는 문항 1과 2의 해결력은 문항 3과 22.3%, 34.9%의 큰 차이를 보이며 낮게 나타났다.

또한 문항 1과 2는 유형 2의 문항 4와 5의 해결력보다도 낮았는데 이것은 전형적인 농도 문장제를 풀 수 있는 학생들조차 농도 개념에 대한 이해가 부족함을 드러낸다. 그러나 유형 2의 문항 6은 농도를 구하는 문제로써 문항 1과 해결력이 비슷하였다.

유형 3은 농도 문장제 중에서 해결력이 가장 낮았다. 그런데 유형 2에서 문제의 문장 기술 순서대로 식을 세

워 의미적 지식의 부족에 속한 학생들은 오히려 유형 3과 유형 4에서는 식을 바르게 세웠다. 이 학생들은 식을 바르게 세워 문제는 해결하였지만 그와 관련된 지식들을 갖추고 있다고 볼 수는 없다. 따라서 학생들이 농도 문장제를 풀었다고 모든 지식이 갖추고 있다고 판단하고 넘어갈 것이 아니라 주어진 양에 대한 변화를 바르게 예상할 수 있으며 또한 그 관계를 명확히 파악할 수 있는가를 확인해 보는 것이 필요하다.

학생들 중에는 미지수를 포함하는 방정식을 이용하지 않고도 농도 문장제를 해결하는 학생들이 있었다. 이러한 특징을 보이는 학생들은 모두 유형 4를 풀지 못하였다. 유형 4에는 세 가지의 소금물이 있는데 이 중 두 가지 소금물을 미지수로 나타내어야 하기 때문이다. 농도 개념을 이용하여 농도 문장제를 해결할 수 있더라도 앞으로의 대수 학습을 위해 방정식을 유용한 문제 해결 도구로 인식시키는 것이 필요하다.

유형 2, 3, 4의 차이는 소금물에 물, 소금, 소금물을 넣는다는 것이다. 이러한 차이는 학생들의 문제 해결력에 영향을 주는 것으로 나타났다. 문제 해결력은 유형 2 → 유형 4 → 유형 3 순으로 유형 3의 해결력이 가장 낮게 나타났다. 이것은 소금의 양과 관련된 잘못된 생각과 식의 의미를 해석하지 못하기 때문이었다. 실제로 <표 IV-3>에서 의미적 지식에 대한 어려움의 유형을 살펴보면 소금물에 더 넣는 물질의 양을 고려하지 못한 경우가 다른 문제에 비해서 소금인 경우에 높게 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 따라서 농도 문장제를 지도하기 전에 농도 개념을 이해하는 것과 더불어 다양한 상황에서 물, 소금, 소금물에 대한 양적 추론을 통해 양 사이의 관계를 파악하는 능력을 기르는 것이 필요하다. 또한 식을 세우고 난 뒤 식을 검토하기 위해서 식에 대한 해석 능력도 갖추고 있어야 한다.

V. 결론 및 제언

여러 가지 유형의 문장제 중 농도 문장제는 학생들이 가장 어려워하는 문제이다. 교사는 이 문제를 해결할 때 학생들이 어떤 점에서 어려워하는지 알아야 학생들을 도울 수 있다. 이런 측면에서 작은 주제이지만 구체적이고 유용한 학생에 대한 자료를 얻기 위해 8개 문항의 농도

문장제를 4가지 유형으로 분류하여 문제 해결 과정에서의 어려움과 그 원인을 분석하고 유형별 해결력을 비교하였다. 이러한 연구 결과를 통해 학생들의 문제 해결력을 향상시키는 효과적인 교수 학습 방안에 대한 논의를 하고자 한다.

첫째, 농도 문장제를 지도하기 전에 농도 개념에 대한 이해를 위해 충분한 시간을 확보해야 한다. 농도에 대한 기본적인 지식을 필요하는 문항 1과 2의 정답률이 농도 문장제 4, 5의 정답률보다 낮게 나타났다. 문장제는 해결할 수 있지만 농도를 구하거나 농도가 소금물의 잔 정도를 나타내는 도구라는 것을 모르는 학생이 많은 것이다. 가장 전형적인 문장제를 해결할 수 있다고 해서 농도 개념을 잘 이해하는 것은 아닌 것이다. 농도 개념에 대한 이해와 다양한 상황에서 소금의 양, 소금물의 양, 농도의 변화를 예상해보면서 양 사이의 관계를 파악하는 학습 지도가 필요하다. 물에 소금을 녹였을 때의 소금물의 양을 물의 양과 같다는 잘못된 생각은 문장제 해결에 장애가 요인이 되기 때문이다.

둘째, 대수식의 의미를 해석하는 지도가 필요하다. 학생이 세운 식이 등식이 아닌 경우에 그 식의 좌변과 우변의 대수식이 같은 양을 의미하는 것이 아니라는 것을 알아야 다시 한번 식을 세울 수 있다. 이때 대수식의 표현이 어떤 양을 나타내는지 해석할 수 있어야 하는데 학생들은 그 의미를 정확히 알지 못하였다. 따라서 식을 세우고 난 후에 대수식을 해석해 보면서 식을 바르게 세운 것인지 확인하도록 평소에 강조하는 것이 중요하다.

셋째, 대수 기호의 개념에 대한 지도를 병행해야 한다. 문장의 기술 순서대로 식을 세우는 학생들은 계산 기호인 + 기호와 등호와 같은 대수 기호를 바르게 사용하지 못하였는데, + 기호는 행동의 과정을 나타내고 등호는 그 행동의 결과를 나타내는 것으로 사용하였다. 대수에서는 + 기호로 연결된 식을 과정으로 볼 수도 있지만 동시에 대상으로 볼 수도 있어야 하며 등호는 대칭 관계를 나타내는 기호로 인식해야 한다. 산술에서 대수로의 이행기 단계에 있는 중학교 학생들은 대수 기호에 대한 개념이 확립되지 않은 경우가 많다. 이런 점을 농도 문장제를 지도하는 과정에서 구체적인 양을 사용하여 대수 기호의 바른 사용을 지도할 필요가 있다.

넷째, 방정식을 문제해결의 도구로 인식하도록 지도

해야한다. 미지수 x 를 사용하여 방정식을 세우지 않고 답을 구하는 학생들이 있었는데 앞으로의 대수 학습을 위해 방정식이 문제 해결 도구로써 유용하다는 것을 인식시켜주는 학습 지도가 필요하다.

참 고 문 헌

- 김동우 (1996). 문제의 제시 방법에 따른 6학년 아동의 문장제 해결력 수준 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 김미정 (2004). 산술적 지식과 대수적 지식 사이의 이행 과정에서 나타난 연결과 단절 현상에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 김성준 (2004). 대수적 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위논문.
- 이정은 (1998). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.
- Ballew, H. & Cunningham, J. W. (1982). Diagnosing strengths and weaknesses of sixth-grade students in solving word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), pp.202-210.
- Caldwell, J. H. & Goldin, G. A. (1987). Variables affecting word problem difficulty in secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(3), pp.187-196.
- Clement, J. (1982). Algebra word problems solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), pp.16-30.
- NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- _____. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Mayer, R. E. (1983). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* : A

project of National Council of Teachers of Mathematics (pp.390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

An Analysis of Density Word Problem Solving Ability of Seventh Graders

Park, Jeong ah

Jungwha middle school, Seoul, Korea

E-mail: wow8408@naver.com

Shin, Hyunyoung

Korea National University of Education, Chungbuk, Korea

E-mail: shin@knue.ac.kr

The purpose of this study is to analyze difficulties in the density word problem solving process of seventh graders and to search for the way to increase their problem solving ability in the density word problem. The results of this study could help teachers diagnose students' difficulties involved in density word problem and remedy the understanding of the concept of density, algebraic expressions, and algebraic symbols.

* ZDM Classification: C63

* 2000 Mathematics Subject Classification: 97C20

* Key word: identity, mathematics classroom, community, social practice, affect.