〈 논문 〉

등제한조건을 이용한 목적함수에 대한 최적민감도

신정규* · 이상일** · 박경진†

(2005 년 10 월 6 일 접수, 2005 년 11 월 2 일 심사완료)

Optimum Sensitivity of Objective Function Using Equality Constraint

Jung-Kyu Shin, Sang-Il Lee and Gyung-Jin Park

Key Words : Optimum sensitivity(최적민감도), KKT condition(카루시-쿤-터커조건), Lagrange multiplier(라그랑지 승수), Equality constraint(등제한조건)

Abstract

Optimum sensitivity analysis (OSA) is the process to find the sensitivity of optimum solution with respect to the parameter in the optimization problem. The prevalent OSA methods calculate the optimum sensitivity as a post-processing. In this research, a simple technique is proposed to obtain optimum sensitivity as a result of the original optimization problem, provided that the optimum sensitivity of objective function is required. The parameters are considered as additional design variables in the original optimization problem. And then, it is endowed with equality constraints to penalize the additional variables. When the optimization problem is solved, the optimum sensitivity of objective function is simultaneously obtained as Lagrange multiplier. Several mathematical and engineering examples are solved to show the applicability and efficiency of the method compared to other OSA ones.

1. 서 론

설계자는 최적설계를 수행하고 나서 최적설계에서 고정한 파라메터의 변화가 최적해(목적함수나 설계변수)에 어떤 영향을 미치는가에 관심이 있을 수 있다. 예를 들어 제한조건에 사용된 허용응력의 변화가 목적함수인 무게나 설계변수인 단면에 미치는 영향은 설계자에게 유용한 정보가 된다. 파라메터의 변화에 대한 최적해의 변화를 최적민감도(optimum sensitivity)라 하고, 이를 구하는 과정을 최적민감도해석(optimum sensitivity analysis; OSA)이라 한다.[1]

최적민감도에 대한 필요성은 1959 년에 Satty[2]의 논문에서 찾을 수 있다. Satty 는 선형계획문제의 계수가 파라메터로 이뤄지는 선박하역문제(ship-unloading problem)를 예로 들면서 최적민감도에 대한 연구가 필요함을 지적하였다. 1976 년에 Fiacco 는 최적화알고리듬으로 SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique)를 이용할 경우에 최적민감도해석 방법을 제안[3]하고 몇 가지 수학문제를 풀어보았다.[4] 1980 년에 McKeown[5]은 KKT 조건을 이용하는 최적민감도해석 방법을 제안하였다. 1982 년에 Sobieszczanski-Sobieski 등[6]은 이 방법에 대한 최적민감도의 해의 존재여부에 대해 논하고 3 부재 문제, 10 부재 문제 그리고 박스-빔 문제에 적용하였다. 아울러 Fiacco[3]의 연구도 정리하였다. 1984 년에 Schmit 와 Chang[7]은 원래 최적설계문제를 근사화하고 이에 대한 쌍대문제를 정의하여 최적민감도를 구하는 식을 유도하고 10 부재 문제와 날개상자(wing-box)문제에 적용하였다 한편 1985 년에 Vanderplaats 와 Yoshida,[8] Vanderplaats 와 Cai[9]는 유용방향개념을 도입하는

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부
E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5246 FAX : (031)400-0755
* 한양대학교 최적설계신기술연구센터
** 한양대학교 대학원 기계설계학과

최적민감도해석을 제안하였다.

앞선 연구의 공통점은 최적민감도해석이 후처리(post-processing) 과정이라는 것이다. 즉 원래 최적설계문제를 풀고 나서 최적민감도해석을 수행한 결과로 최적민감도를 얻게 된다. 본 연구에서는 목적함수에 대한 최적민감도가 필요한 경우에 대하여 원래 최적설계문제의 해로서 최적민감도를 도출할 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

2 장에서는 대표적인 기존의 최적민감도해석을 소개하고 3 장에서는 등제한조건을 이용하여 목적함수에 대한 최적민감도를 구하는 방법을 제안한다. 이 방법을 최적민감도해석의 하나인 KKT 조건을 이용하는 방법과 수학적으로 비교하고 그 특징을 정성적으로 살펴보았다. 4 장에서는 수학예제와 공학예제를 통하여 다른 방법과 비교하여 본 연구에서 제안한 방법의 타당성을 살펴보았다.

2. 기존의 최적민감도해석 방법

최적민감도를 구하는 가장 쉬운 방법은 현재의 파라메터에 대해 최적설계를 수행하고, 변화된 파라메터에 대해 다시 최적설계를 수행하여 파라메터의 변화에 대한 최적해의 변화를 살펴보는 방법이다. 다시 최적화를 수행하는 이런 방법은 사용이 간단하지만 일반적으로 고가이며 파라메터의 증분량에 민감하다.[6] 따라서 다시 최적설계를 수행하지 않고 최적민감도를 구하는 노력이 있는데 그 대표적인 방법은 KKT 조건을 이용하는 방법[6]과 유용방향(feasible directions) 개념을 이용한 방법[8,9]이 있다.

2.1 KKT 조건을 이용한 방법

식 (1)의 최적설계문제를 고려하자.

Given $\mathbf{p}$ (1a)

find $\mathbf{b}$ (1b)

to minimize $f(\mathbf{b},\mathbf{p})$ (1c)

subject to $\mathbf{g}(\mathbf{b},\mathbf{p}) \le \mathbf{0}$ (1d)

여기서 $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = [b_1 \ \cdots \ b_{nb}]$, $\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = [p_1 \ \cdots \ p_{np}]$, $\mathbf{g}^{\mathrm{T}} = [g_1 \ \cdots \ g_{ng}]$이고 nb, np, ng 는 각각 설계변수($\mathbf{b}$), 파라메터($\mathbf{p}$) 그리고 제한조건($\mathbf{g}$)의 개수이다.

식 (1)의 최적설계문제를 풀고 그 해가 식 (2)의 KKT 조건을 만족한다고 하자.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{2a}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{2b}$$

편의상 ng 개의 제한조건이 모두 활성화되었다고 가정하고 라그랑지승수는 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = [\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_{ng}]$이다. 설계변수에 대한 목적함수와 제한조건의 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial b_1} & \frac{\partial f}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial b_{nb}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial b_1} & \frac{\partial g_2}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial g_{ng}}{\partial b_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial b_2} & \frac{\partial g_2}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial g_{ng}}{\partial b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial b_{nb}} & \frac{\partial g_2}{\partial b_{nb}} & \cdots & \frac{\partial g_{ng}}{\partial b_{nb}} \end{bmatrix}$$

임의의 파라메터 p_k 의 변화에 대하여 식 (2)가 만족한다면 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dp_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\boldsymbol{\lambda}\right) = \mathbf{0} \tag{3a}$$

$$\frac{d}{dp_k}(\mathbf{g}) = \mathbf{0} \tag{3b}$$

식 (3)에 미분의 연쇄법칙을 적용하면 식 (4)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\left(\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{b}}\right)\frac{d\mathbf{b}}{dp_k} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial p_k} + \left(\frac{\partial \mathbf{a}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{b}}\right)\frac{d\mathbf{b}}{dp_k} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dp_k} = \mathbf{0} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial p_k} + \frac{\partial \mathbf{g}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{b}}\frac{d\mathbf{b}}{dp_k} = \mathbf{0} \tag{4b}$$

여기서 $\mathbf{a}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{ng}\frac{\partial g_i}{\partial b_1}\lambda_i & \sum_{i=1}^{ng}\frac{\partial g_i}{\partial b_2}\lambda_i & \cdots & \sum_{i=1}^{ng}\frac{\partial g_i}{\partial b_{nb}}\lambda_i \end{bmatrix}$$

식 (4)를 행렬로 나타내면 식 (5)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\left(\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{b}}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{a}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{b}}\right) & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}^{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{b}}{dp_k} \\ \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dp_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}\right) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial p_k} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial p_k} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{5}$$

식 (5)를 최적민감도 방정식(optimum sensitivity equation)[6]이라 하고 이 식의 해가 바로 임의의 파라메터 p_k 에 대한 최적설계변수의 최적민감도이다. 파라메터 p_k 에 대한 목적함수의 최적민감도는 목적함수 f 를 p_k 에 대해 전미분하여 구한다.

$$\frac{df^{opt}}{dp_k}=\frac{\partial f}{\partial p_k}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^T\frac{d\mathbf{b}}{dp_k} \tag{6}$$

식 (5)는 목적함수와 제한조건이 설계변수나 파라메터에 대해 2 차 미분을 요구하므로 계산이 고가인 단점이 있다. Barthelemy 와 Sobieszczanski-Sobieski[1]는 파라메터의 변화에 대한 목적함수의 최적민감도를 간단하게 구할 수 있는 식을 유도하였다. 최적해에서의 KKT 조건인 식 (2a)의 양변에 $d\mathbf{b}/dp_k$ 를 내적하면 식 (7)과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^T\frac{d\mathbf{b}}{dp_k}+\boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)^T\frac{d\mathbf{b}}{dp_k}=0 \tag{7}$$

파라메터 p_k 의 변화에 대해 활성화제한조건이 여전히 만족한다는 가정으로 얻은 식 (4b)를 고려하면 식 (7)은 식 (8)과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^T\frac{d\mathbf{b}}{dp_k}-\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial p_k}=0 \tag{8}$$

식 (8)을 식 (6)에 대입하면 식 (9)를 얻는다.

$$\frac{df^{opt}}{dp_k}=\frac{\partial f}{\partial p_k}+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial p_k} \tag{9}$$

Barthelemy 와 Sobieszczanski-Sobieski[10]는 목적함수에 대한 최적민감도는 식 (6)보다 식 (9)가 더 정확한 것으로 판단하였다.

2.2 유용방향 개념을 이용한 방법

Vanderplaats 과 Yoshida[8], Vanderplaats 과 Cai[9]는 유용방향개념을 이용하여 최적민감도를 구하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 먼저 식 (1)의 최적설계문제를 풀고 나서 임의의 파라메터 p_k 를 식 (10)와 같이 새로운 설계변수로 추가한다.

$$b_{nb+1}=p_k \tag{10}$$

최적해에서 식 (11)의 방향찾기 문제를 정의한다.

$$\text{Find} \quad \mathbf{S}_b \tag{11a}$$

$$\text{to minimize} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^T\mathbf{S}_b \tag{11b}$$

$$\text{subject to} \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}^T\mathbf{S}_b\le\mathbf{0} \tag{11c}$$

$$\mathbf{S}_b{}^T\mathbf{S}_b\le 1 \tag{11d}$$

여기서 설계변수 $\mathbf{S}_b{}^T=[S_1 \ \cdots \ S_{nb} \ S_{nb+1}]$ 는 가용-유용영역을 가리키는 방향벡터이다. 식 (11)을 풀면 $\mathbf{S}_b$ 를 얻을 수 있으며 임의의 파라메터 p_k 의 변화에 대한 최적설계변수의 변화는 식 (12)와 같다.

$$\frac{d\mathbf{b}}{dp_k}=\frac{1}{S_{nb+1}}\mathbf{S}_b \tag{12}$$

식 (12)을 이용하면 파라메터의 변화에 대한 목적함수의 최적민감도는 식 (13)과 같다.

$$\frac{df^{opt}}{dp_k}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^T\frac{\mathbf{S}_b}{S_{nb+1}} \tag{13}$$

3. 등제한조건을 이용한 최적민감도

2 장에서 논의한 최적민감도해석 방법은 최적해를 구한 다음에 최적민감도해석을 실시하므로 최적해를 후처리하여 최적민감도를 구한다. 이러한 최적민감도해석 과정을 원래 설계문제에 포함시켜 최적해를 구함과 동시에 최적민감도를 얻을 수 있는 방법을 제안하고 기존의 방법과 비교한다.

3.1 등제한조건을 이용한 최적민감도

이 방법을 적용하기 위해서는 식 (1)의 최적설계문제에 대하여 파라메터에 대한 설계변수($\mathbf{b}_p$)를 추가한다. 추가된 설계변수가 파라메터 값을 가질 수 있도록 등제한조건($\mathbf{m}_p$)을 부여하면 식 (1)의 원래 최적설계문제는 식 (14)와 같이 변환된다.

$$\text{Given} \quad \mathbf{p} \tag{14a}$$

$$\text{find} \quad \mathbf{b},\mathbf{b}_p \tag{14b}$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{b},\mathbf{b}_p) \tag{14c}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{g}(\mathbf{b},\mathbf{b}_p)\le\mathbf{0} \tag{14d}$$

$$\mathbf{m}_p(\mathbf{b}_p,\mathbf{p})=\mathbf{b}_p-\mathbf{p}=\mathbf{0} \tag{14e}$$

여기서 $\mathbf{b}_p$ 는 파라메터에 대한 설계변수를, 식 (14e)는 추가된 설계변수를 파라메터의 값으로 고정하기 위해 추가된 등제한조건이다. 등제한조건과 추가된 설계변수의 수는 원래 최적설계문제의 파라메터의 개수와 동일하다.

식 (14)를 풀면 최적해와 함께 등제한조건인 식 (14e)에 대한 라그랑지승수를 부산물로 얻을 수 있다. 이 라그랑지승수를 식 (15)와 같이 파라메터에 대한 목적함수의 최적민감도로 사용한다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=-\boldsymbol{\lambda}_p \tag{15}$$

3.2 등제한조건을 이용한 최적민감도와 기존 방법의 비교

KKT 조건을 이용한 최적민감도해석 결과인 식 (9)의 유도과정을 이용하여 식 (15)의 결과를 유도한다. 먼저 식 (14)의 최적해에서 KKT 조건은 식 (16)과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0} \tag{16a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}_p}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}_p}\right)\boldsymbol{\lambda}+\left(\frac{\partial \mathbf{m}_p}{\partial \mathbf{b}_p}\right)\boldsymbol{\lambda}_p=\mathbf{0} \tag{16b}$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{0} \tag{16c}$$

$$\mathbf{m}_p=\mathbf{0} \tag{16d}$$

KKT 조건을 이용한 최적민감도해석과 같은 가정인 파라메터 $\mathbf{p}$의 변화에 대해서 활성화제한조건이 계속 활성화하다면 식 (17)을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{p}}=\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}_p}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}_p}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{17a}$$

$$\frac{d\mathbf{m}_p}{d\mathbf{p}}=\frac{\partial \mathbf{m}_p}{\partial \mathbf{p}}+\left(\frac{\partial \mathbf{m}_p}{\partial \mathbf{b}_p}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}_p}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{17b}$$

식 (17)을 정리하면 식 (18)과 같다.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}_p}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}_p}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{18a}$$

$$-\mathbf{I}+\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}_p}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{18b}$$

여기서 $\mathbf{I}$는 $np\times np$차원의 단위행렬이다.

식 (16a)에 $(d\mathbf{b}/d\mathbf{p})^{\mathrm{T}}$를 내적하고 식 (16b)에 식 (18b)를 적용하면 식 (19)와 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{19a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}_p}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}_p}\right)\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_p=\mathbf{0} \tag{19b}$$

식 (14)의 최적설계문제에서 파라메터에 대한 목적함수의 최적민감도는 식 (20)과 같다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}_p}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}_p}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

첫째 항은 암시적이므로 $\mathbf{0}$ 이 되고 식 (18b)를 적용하면 식 (21)와 같다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}_p} \tag{21}$$

식 (21)에 식 (19)를 대입하면 식 (22)와 같다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}-\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}_p}\right)\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_p \tag{22}$$

식 (22)에서 우변의 첫 두 항을 라그랑지승수로 묶으면 식 (23)이다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}_p}\right)^{\mathrm{T}}\right)-\boldsymbol{\lambda}_p \tag{23}$$

식 (18)을 식 (23)에서 고려하면 식 (24)의 결과를 얻는다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=-\boldsymbol{\lambda}_p \tag{24}$$

식 (19b)를 식 (24)에 적용하면 KKT 조건을 이용한 최적민감도해석인 식 (9)와 동일하다. 따라서 식 (1)의 최적설계문제를 식 (14)로 변환하여도 최적민감도를 얻을 수 있으며, 아울러 최적설계문제의 결과로 얻어지게 된다.

만일 최적기(optimizer)가 등제한조건을 직접 고려하지 못하는 경우에는 등제한조건을 두 개의 부등제한조건으로 대체[14]할 수 있다. 식 (14)를 식 (25)로 변환하여 최적설계문제를 푼다.

Given	$\mathbf{p}$	(25a)
find	$\mathbf{b},\mathbf{b}_p$	(25b)
to minimize	$f(\mathbf{b},\mathbf{b}_p)$	(25c)
subject to	$\mathbf{g}(\mathbf{b},\mathbf{b}_p)\le\mathbf{0}$	(25d)
	$\mathbf{m}_{p1}(\mathbf{b}_p,\mathbf{p})\le\mathbf{0}$	(25e)
	$\mathbf{m}_{p2}(\mathbf{b}_p,\mathbf{p})\ge\mathbf{0}$	(25f)

여기서 식 (25e)와 (25f)는 식 (14e)의 등제한조건을 나타낸 두 개의 부등제한조건이다. 식 (25)의 최적설계문제를 풀게 되면 목적함수에 대한 최적민감도는 식 (26)과 같다.

$$\frac{df^{opt}}{d\mathbf{p}}=-\boldsymbol{\lambda}_{p1}+\boldsymbol{\lambda}_{p2} \tag{26}$$

여기서 $\boldsymbol{\lambda}_{p1},\boldsymbol{\lambda}_{p2}$는 각각 식 (25e)와 (25f)의 라그랑지승수이다.

3.3 최적민감도해석 방법의 비교

3.1 절에서 제안한 등제한조건을 이용한 최적민감도해석을 7 가지 관점에서 기존의 다른 방법들과 비교한다. 이때 다른 방법들은 최적설계를 다시 수행하는 방법, KKT 조건을 이용하는 방법 그리고 유용방향개념을 이용하는 방법이다.

(1) 최적민감도를 얻을 수 있는 시점: 등제한조건을 이용한 방법은 최적민감도를 구하는 과정을 최적설계문제에 포함하므로 최적설계문제를 풀고 난 뒤에 최적민감도를 바로 얻을 수 있다. 그러나 다른 3 가지 방법들은 후처리 과정으로 최적민감도해석이 필요하다.

(2) 최적민감도를 위한 최적기의 필요 여부: 등제한조건을 이용하는 방법과 KKT 조건을 이용하는 방법은 최적기가 필요 없다. 유용방향개념을 이용한 방법은 방향찾기문제를 풀기 위해 선형프로그래밍(linear programming)이 필요하다. 다시 최적설계를 수행하는 방법은 원래 최적설계문제를 다시 풀기 때문에 일반적으로 비선형프로그래밍(nonlinear programming)이 필요하다.

(3) 최적민감도를 구하기 위한 재해석의 필요 여부: 등제한조건을 이용한 방법 이외에는 모두 재해석이 필요하다. 다시 최적설계를 수행하는 방법은 변화된 파라메터에 대해 최적해를 얻을 때까지 해석이 수행되어야 한다. KKT 조건을 이용하는 방법은 최적해를 찾고 나서 파라메터의 수만큼 재해석을 수행하고 유용방향개념을 이용한 방법은 최적해에서 설계변수와 파라메터의 수만큼 재해석을 수행하여 민감도를 구해야 한다.

(4) 최적민감도를 구하는 설계공간의 크기: 다시 최적설계를 수행하는 방법과 KKT 조건을 이용하는 방법은 설계변수의 크기인 R^{nb} 의 설계공간(design space)에서 최적민감도를 얻는다. 반면에 유용방향개념을 이용한 방법과 등제한조건을 이용한 방법은 R^{nb+np} 의 설계공간을 이용한다. 따라서 보다 넓은 설계공간에서 최적민감도를 구한다.

(5) 기본 가정: 유용방향개념을 이용한 방법은 방향찾기문제인 식 (11)을 구성할 때 최적해에서 활성화제한조건을 고려한다. KKT 조건을 이용한 방법도 최적해에서 파라메터의 변화에 대하여 활성화제한조건이 만족한다는 가정하에 유도된 식 (3b)를 이용한다. 이에 비해 등제한조건을 이용한 방법은 추가된 등제한조건인 식 (14e)만 파라메터의 변화에도 만족한다면 식 (19b)를 이용하여 최적민감도를 얻을 수 있다. 결국 본 연구에서 제안한 방법은 다시 최적화를 수행하는 방법과 함께 활성화제한조건집합이 파라메터의 변화에도 일정해야 하는 조건이 필요하지 않다.

(6) 라그랑지승수의 필요 여부: 유용방향개념을 이용한 방법과 다시 최적설계를 수행하는 방법은 라그랑지승수가 필요 없고 나머지 두 방법은 필요하다.

(7) 파라메터 지정의 유연성: KKT 조건을 이용하는 방법과 유용방향개념을 이용한 방법은 후처리 과정이므로 쉽게 임의의 파라메터를 지정하여 이에 대한 최적민감도를 얻을 수 있다. 반면에 등제한조건을 이용한 방법은 원래 최적설계문제의 정식화를 변경해야 한다.

제안한 방법은 원래 최적설계문제에 파라메터를 설계변수로 치환하므로 기존의 설계변수처럼 연속공간의 설계변수가 되어야 한다. 또한 치환된 설계변수를 파라메터의 값과 같도록 등제한조건을 도입하므로 변환된 최적설계문제는 파라메터에 대한 설계변수의 개수만큼 늘어나고 등제한조건도 같은 수로 늘어난다. 등제한조건의 효율적 처리 여부와 설계변수의 증가로 인해 변화된 최적화문제에서 함수호출수의 증가를 예상할 수 있다. 최근에 연구되고 있는 SAND(Simultaneous analysis and design)방법[17]은 해석을 등제한조건으로 대체한 방법이다. 이 방법은 등제한조건이 상태변수의 수만큼 존재하지만 최근에 SAND 방법을 적용한 사례[11]에서 볼 때 많은 등제한조건이 존재해도 이를 고려해줄 수 있는 최적화알고리듬[12]을 사용하면 등제한조건의 처리에는 큰 어려움은 없을 것으로 보인다.

4. 수학예제와 공학예제

3 장에서 제안한 최적민감도해석을 2 장에서 소개한 기존의 최적민감도해석과 비교하기 위하여 수학예제(4.1 절)와 공학예제(4.2 절)를 풀어보았다. 최적민감도의 정확성은 유한차분법에 의한 결과를 기초로 평가하였으며 최적민감도를 얻기 위해 소요된 함수 또는 해석호출회수도 비교하였다.

수학예제 1,2,3 번은 IDESIGN[13]의 RQP 를, 수학예제 4,5 번과 공학예제 1,2 번은 DOT[14]의 SQP 를 사용하였다. 그리고 공학예제 1,2 에서 다루는 10-부재 트러스의 구조해석은 GENESIS7.0[15]를 사용하였다. 모든 예제에서 민감도계산은 특별한 언급이 없으면 증분량이 0.001 인 전진유한차분법을 이용하였다.

4.1 수학예제

4.1.1 수학예제 1

이 예제는 참고문헌[16]의 65 번 문제를 발췌한 것으로 원래 최적화알고리듬의 성능을 평가하는 예제이다. 이 문제는 설계변수만 있고 파라메터는 없지만 원래 문제에서 설계변수 b_3 을 파라메터로 선정하였으며 식 (27)과 같다.

Given $p = 0$ (27a)

find b_1, b_2 (27b)

to minimize

$$(b_1 - b_2)^2 + (b_1 + b_2 - 10)^2 / 9 + (p-5)^2 \quad (27c)$$

subject to $b_1^2 + b_2^2 + p^2 - 48 \le 0$ (27d)

$$-4.5 \le b_i \le 4.5, \quad i = 1,2 \quad (27e)$$

Table 1 Optimum sensitivity of 3 mathematical examples solved by four OSA methods

Example \ Method	(1)	(2)	(3)	(4)
1	-9.99	-10.0	-10.0	-10.0
2	-0.056	-0.0604	-0.0559	-0.0580
3	-1.40	-1.13	-1.32	-1.11

(1): Re-optimization, (2): KKT condition method, (3): Feasible direction method, (4): proposed method

이 문제의 최적해 (4.5,4.5)에서 4 가지 방법의 최적민감도 결과를 Table 1 에 나타내었다. 4 가지 방법이 모두 같은 최적민감도를 보여줬으며, 다시 최적화하는 방법은 파라메터의 증분이 작을수록 나머지 다른 3 개의 방법과 같은 결과를 얻을 수 있었다. Table 1 에서 (1)은 다시 최적화를 수행하는 방법, (2)는 KKT 조건을 이용한 방법으로 식 (9)를 적용하였고, (3)은 유용방향개념을 이용한 방법을 그리고 (4)는 등제한조건을 이용한 방법을 의미한다.

4.1.2 수학예제 2

이 예제는 참고문헌[16]의 76 번 문제로 원래 문제의 설계변수 b_4을 파라메터로 선정하면 식 (28)과 같다.

Given $p = 0.5$ (28a)

find b_1, b_2, b_3 (28b)

to minimize

$$b_1^2 + 0.5b_2^2 + b_3^2 + 0.5p^2 - b_1b_3 + b_3p - b_1 - 3b_2 + b_3 - p \quad (28c)$$

subject to $b_1 + 2b_2 + b_3 + p - 5 \le 0$ (28d)

$3b_1 + b_2 + 2b_3 - p - 4 \le 0$ (28e)

$-b_2 - 4b_3 + 5 \le 0$ (28f)

$0 \le b_i, \quad i = 1,2,3$ (28g)

최적해 (0.2788,2.1103, -0.76929)에서 4 가지 방법으로 구한 최적민감도는 Table 1 과 같으며 서로 유사한 값을 보여주었다.

4.1.3 수학예제 3

참고문헌[16]의 78 번 문제이며 식 (29)과 같다.

Given $p = 1.5$ (29a)

Find b_1, b_2, b_3, b_4 (29b)

to minimize $pb_1b_2b_3b_4$ (29c)

subject to

Table 2 Estimation of optimum objective function resulted from four optimum sensitivity

parameter / Method	1.50015 (0.01%)[1]	1.65 (10%)[1]	1.725 (15%)[1]
(1)	-2.864264	-3.074054	-3.179054
(2)	-2.864223	-3.032918	-3.117350
(3)	-2.864252	-3.062541	-3.161784
(4)	-2.864221	-3.031058	-3.114560
Optimization[2]	-2.864221	-2.899373	-2.797563

[1] perturbation ratio, [2] optimization at the perturbed parameter

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + p^2 - 10 = 0 \quad (29d)$$

$$pb_3 - 5b_4b_5 = 0 \quad (29e)$$

$$b_1^3 + p^3 + 1 = 0 \quad (29f)$$

최적해 (-1.6355,1.9727,-0.76929,-0.76929)에서 주어진 파라메터에 대한 최적민감도를 구하여 보았으며 모두 유사한 결과를 나타내었다.

2 번과 3 번 예제에서 실제로 파라메터를 일정량 섭동시켜 다시 최적화를 수행한 결과를 비교하였다. 파라메터를 10% 이상으로 변동시키면 최적목적함수를 제대로 예측하지 못하였다. 3 번 예제의 경우를 Table 2 에 나타내었으며 섭동량이 0.01%인 경우에는 4 가지 모든 방법이 정확한 최적목적함수를 예측하였다. 10%인 경우에는 등제한조건을 이용한 최적민감도가 상대적으로 가장 정확했으며 다시 최적화를 수행하는 방법이 부정확하였다. 15%인 경우에는 목적함수가 증가하는 현상을 보였으며 따라서 4 가지 방법으로 구한 최적민감도는 사용할 수가 없게 된다. 따라서 최적민감도를 신뢰할 수 있는 구간은 현재 파라메터에 가능한 근처에 존재하게 됨을 알 수 있다.

4.1.4 수학예제 4

앞의 3 가지 수학예제를 통하여 본 연구에서 제안한 방법이 기존의 방법과 유사한 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 수학예제 4 는 참고문헌(8)에서 KKT 조건을 이용한 방법이 최적해에서 설계변수에 대한 제한조건의 기울기가 선형종속인 예제를 풀 수 없음을 식 (30)의 수학예제로 보였다.

Given $p = 2$ (30a)

find b (30b)

to minimize $b^2 + (p-1)^2$ (30c)

subject to $g_1 = -3b - 2p + 10 \le 0$ (30d)

$g_2 = -2b - 3p + 10 \le 0$ (30e)

이 문제는 제한조건 g_1과 g_2의 설계변수에 대한 기울기가 최적해(2.0)에서 서로 선형종속(linearly

Table 3 Optimum sensitivity of mathematical examples 4 and 5 solved by four OSA methods

Example \ Method	(1)	(2)	(3)	(4)
4	-0.67	-8.003	-0.66667	-0.66597
5	-783.096	601.5075	600.00	-748.096

dependent)인 경우가 된다. 즉 두 제한조건 중에 하나는 과잉제한조건(redundant constraint)이다. 이러한 경우에는 KKT 조건을 적용할 수가 없고 따라서 KKT 조건을 이용한 방법으로는 최적민감도를 구하지 못한다. 이 문제를 참고문헌(8)에서는 유용방향개념을 이용하여 풀었으며, 본 논문에서 제안하는 등제한조건을 이용한 방법의 결과와 비교해 본다.

Table 3 에는 다시 최적화하는 방법과 유용방향개념과 등제한조건을 이용한 방법이 모두 같은 최적민감도를 구하고 있음을 알 수 있다. 이는 등제한조건을 이용한 방법과 유용방향개념을 이용한 방법의 특징으로 파라메터를 설계변수로 간주하므로 최적해에서 제한조건의 기울기가 선형독립이 되었다. 한편 제한조건이 선형종속이므로 KKT 조건을 이용하는 방법은 최적민감도를 구할 수 없다. 그러나 Barthelemy 와 Sobieszczanski-Sobieski[1]가 유도한 식 (9)를 그대로 적용해본 결과를 Table 3 에 나타내었고 틀린 최적민감도를 구하게 되었다.

4.1.5 수학예제 5

앞의 수학예제들은 모두 파라메터의 변화에도 활성화제한조건이 유지가 되는 경우이다. 이번 예제는 파라메터의 변화로 인해 활성화제한조건이 변하는 경우를 가정한 수학예제이다.

Given $p=1$ (31a)

find b_1, b_2 (31b)

to minimize

$$-(b_1+300(p-1))^2-2(b_2-150(p-1))^2 \quad (31c)$$

subject to $g_1=b_1+b_2=0$ (31d)

$$g_2=-b_1+b_2-2.0+p\le 0 \quad (31e)$$

$$g_3=b_1-b_2+0.1-p\le 0 \quad (31f)$$

현재 파라메터의 값에서의 최적해는 (-0.5, 0.5)이고 활성화제한조건은 g_1, g_2 이다. 그러나 파라메터 값이 $p=1.00225$ 인 경우에 최적해는 (0.45113, -0.45113)이며, g_1, g_3 가 활성화된다. 이 예제를 4 가지 방법으로 풀어보면 Table 3 과 같다.

활성화제한조건이 변하는 이 예제에서는 KKT 조건을 이용한 방법과 유용방향개념을 이용하는 방법이 다시 최적화하는 방법과 등제한조건을 이용한 방법에 대해 틀린 값을 주었다. 그 이유는 전자의 두 방법이 최적민감도를 도출할 때에 활성화제한조건을 고려하여 최적민감도를 얻었기 때문이다. 이에 비해 다시 최적화를 하는 방법과 등제한조건을 이용하는 방법은 활성화제한조건에 대한 가정이 없기 때문으로 판단된다.

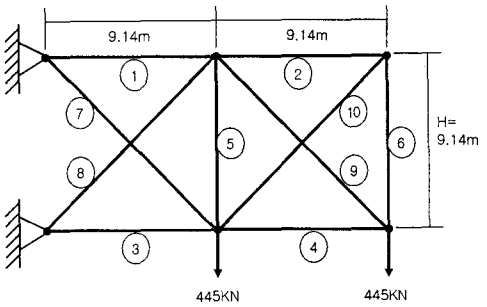


Fig. 1 Ten-bar truss

4.2 공학예제

공학예제를 통하여 본 연구에서 제안한 방법과 기존의 최적민감도해석 방법을 비교하고자 한다. 공학예제로 Fig. 1 에는 10 부재 트러스 문제를 나타내고 있다. 이 예제는 참고문헌(6), (8)에서 최적민감도의 유용성을 보여주는 공학예제로 다루었으며, 10 부재 트러스 문제의 자세한 물성치는 참고문헌을 참조한다.

설계문제는 10 개의 부재(Fig. 1 의 원으로 쌓인 숫자)가 허용응력 안에 있으면서 구조물의 전체 무게를 최소화하는 것이다. 설계변수는 10 개의 부재 단면적이다. 이를 식 (32)의 최적설계 정식화로 나타낼 수 있다.

Find $b_i,\ i=1,2,...,10$ (32a)

to minimize *Mass* (32b)

subject to

$$\sigma_i \le 206.9\text{MPa},\quad i=1,2,...,10,\quad i\ne 9 \quad (32c)$$

$$-\sigma_i \le 206.9\text{MPa},\quad i=1,2,...,10,\quad i\ne 9 \quad (32d)$$

$$\sigma_9 \le 275.9\text{MPa} \quad (32e)$$

$$-\sigma_9 \le 275.9\text{MPa} \quad (32f)$$

식 (32)에서 9 번 부재의 응력제한조건을 파라메터로 한 경우(4.2.1 절)와 높이 H 를 파라메터로 한 경우(4.2.2 절)를 살펴보았다.

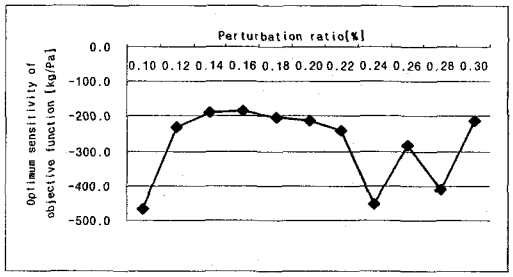
4.2.1 허용응력을 파라메터로 한 경우

식 (32)에서 9 번 부재의 허용응력의 범위를 현재값(275.9MPa)에서 증가시키면 최적목적함수인

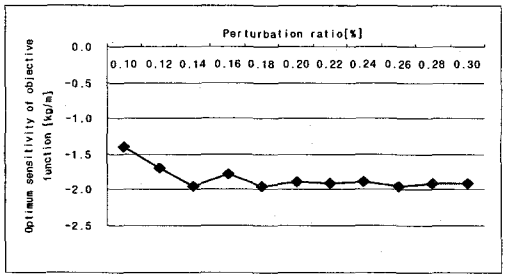
Table 4 Optimum sensitivity of engineering examples solved by four OSA methods

Example \ Method	(1)	(2)	(3)	(4)
1[1)]	-240.035	-247.075	-241.640	-241.453
2[2)]	-1.955	-1.974	-1.974	-1.974

[1)]: [kg/Pa], [2)]: [kg/m]



(a) p = allowable stress



(b) p = height of truss

Fig. 2 Variation of optimum sensitivity with respect to the problem perturbation ratio

무게의 변화를 살펴보는 문제로 식 (33)과 같다.

Given $p = 275.9$ (33a)

find $b_i,\ i = 1,2,...,10$ (33b)

to minimize *Mass* (33c)

subject to

$\sigma_i \le 206.9\text{MPa},\quad i = 1,2,...,10,\quad i \ne 9$ (33d)

$-\sigma_i \le 206.9\text{MPa},\quad i = 1,2,...,10,\quad i \ne 9$ (33e)

$\sigma_9 - p \le 0$ (33f)

$-\sigma_9 - p \le 0$ (33g)

이 문제의 최적해는 (7.93027, 0.1, 8.07045, 3.93, 0.1, 0.1, 5.75776, 5.56009, 4.6316, 0.1)이다. 이 최적해에서 구한 최적민감도는 Table 4 와 같다. 9 번 부재의 허용응력제한조건을 현재보다 높여주면 전체 구조물의 무게는 감소하는 결과를 보여 주고 있다. 4 가지 방법 모두 유사한 최적민감도를 보여주었다. 특히 다시 최적화를 수행하는 방법은 나머지 3 개의 방법에 비해 유한차분에 쓰이는 증분량에 민감하고 이를 Fig. 2(a)에 나타내었다. Table 4 에서 다시 최적화를 수행하는 방법의 최적민감도는 증분량이 0.0022 일 때의 값이다. 이에 비해 나머지 방법들은 파라메터에 대해 일정한 최적민감도를 얻을 수 있다.

Table 5 Number of function calls of each OSA method with mathematical and engineering examples

Example	Mathematical					Engineering	
Method \	1	2	3	4	5	1	2
(1)	18	42	50	30	51	152	159
(2)	10	22	26	(16)	(43)	76	86
(3)	12	25	30	17	(45)	86	96
(4)	12	26	43	20	12	130	92

() wrong optimum sensitivity

4.2.2 높이 H 를 파라메터로 한 경우

이 문제는 Fig. 1 의 10 부재 트러스 문제에서 높이 H 를 파라메터로 한 경우에 목적함수에 대한 최적민감도를 구해본 것이다. 이 문제의 정식화는 식 (32)와 같고 파라메터 H 를 고려하여 4 가지 방법으로 풀어본 결과를 Table 4 에 나타내었다. 4 가지 방법이 모두 동일한 결과를 나타내었고 다시 최적화를 수행하는 방법에서 증분량은 0.0026 이었다. 이 문제에서도 다시 최적화를 수행하는 방법은 Fig. 2(b)에서 보듯이 파라메터인 높이 H 의 증분량에 민감하기는 하지만 허용응력을 파라메터로 고려한 예제보다는 둔감하였다.

한편 높이 H 를 증가시키면 구조물의 최적무게가 늘어나지 않고 오히려 감소한다는 결과를 보여주는데 이는 물리적으로 높이 H 를 증가시키면 수평과 대각부재에 걸리는 힘이 감소하고 이에 대한 응력도 줄어들기 때문이다.[6]

4.3 등제한조건을 이용한 최적민감도 방법의 고찰

Table 5 에는 5 개의 수학예제 및 2 개의 공학예제를 풀기 위해 사용된 4 가지 방법의 함수 또는 해석기 호출 회수를 정리하였다. 전반적으로 다시 최적화를 수행하는 (1)번 방법이 가장 많은 함수 호출이 필요하였으며 (2)번 KKT 조건을 이용하는 방법이 가장 적은 함수 호출을 보여주었다. 유용방향개념을 이용한 (3)번과 본 연구에서 제안한 (4)번 방법은 서로 비슷한 함수 호출수를 나타내었다. 최적민감도 값은 (1)과 (4)번 방법이 모든 예제에서 정확한 결과를 주었다.

함수 호출면에서는 대체로 (3)의 방법이 (4)의 방법보다 대부분 적었으나 수학예제 5 번과 공학

예제 2 번에서는 많은 것으로 나타났다. 공학예제 2 번은 설계변수가 10 개이며 최적설계가 8 번 만에 최적해를 찾은 경우이다. 이러한 경우에 (3)방법은 최적점에서 설계변수 10 개와 높이 H 에 대한 11 번의 재해석을 통하여 최적민감도를 구하는 문제를 구성할 수 있었다. 따라서 파라메터를 포함한 설계변수의 수가 최적설계과정의 회수에 비해 큰 경우에는 (4)번 방법이 (3)번 방법에 비해 함수호출회수가 적을 수도 있음을 예상할 수 있다.

함수호출수의 정량적 측면과 함께 실제 구현의 편의성을 살펴볼 필요가 있다. 유용방향개념을 이용한 방법은 최적해에서 방향찾기문제를 구성하고 이를 풀어야 하므로 가장 번거로웠다. KKT 조건을 이용한 방법도 최적해에서 파라메터에 대한 민감도를 구하는 과정이 필요했다. 이에 비해 제안한 방법은 최적설계문제에 파라메터를 대신할 설계변수와 이와 관련된 등제한조건 만을 추가하는 노력이 필요하여 사용이 가장 간편하였다.

5. 결론 및 향후 과제

본 연구에서는 목적함수에 대한 최적민감도를 원래 최적설계문제의 해로서 찾을 수 있는 간단한 방법을 제안하고 수학예제 5 개와 공학예제 2 개를 통하여 제안한 방법의 타당성을 살펴보았다.

제안한 방법은 7 개의 예제에 대하여 다른 방법과 동일하거나 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 특히 수학예제 4 와 같이 과잉제한조건이 있는 문제에서도 유용방향개념을 이용한 방법과 같은 최적민감도를 구할 수 있었다. 또한 수학예제 5 와 같이 활성화제한조건이 변하는 경우에도 다시 최적화하는 방법과 유사한 최적민감도를 얻을 수 있었다. 따라서 등제한조건을 이용한 최적민감도방법은 다른 KKT 조건이나 유용방향을 이용하는 방법에 비해 안정적인 방법이라 판단된다.

등제한조건을 이용한 최적민감도해석은 특별히 후처리과정이 필요 없이 원래 설계문제에 포함되어 있으므로 사용이 매우 간단하다. 따라서 파라메터가 정해진 설계문제의 경우에 본 방법이 유용하게 사용될 것으로 생각되며 다분야통합최적설계나 다단계최적화(multilevel optimization)에 유용할 것으로 판단된다.

많은 파라메터를 가진 설계문제에서 설계변수와등제한조건이 파라메터 수만큼 증가하게 된다. 또한 함수호출수가 KKT 조건을 이용하는 방법이나 유용방향개념을 이용한 방법에 비해 다소 많다. 따라서 향후에 등제한조건을 효율적으로 처리할 수 있는 최적화알고리듬의 사용과 함수호출수를 줄일 수 있는 연구가 필요하다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Barthelemy, J.M. and Sobieszczanski-Sobieski, J., 1983, "Optimum sensitivity derivatives of objective functions in nonlinear programming," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 6, pp. 913~915.

(2) Satty, T.L., 1959, "Coefficient perturbation of a constrained extremum," *Operations research*, Vol. 7, No. 3, pp. 294~302.

(3) Fiacco, A.V. 1976, "Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty methods," *Mathematical programming*, Vol. 10, pp. 287~311.

(4) Armacost, R.L. and Fiacco, A.V. 1974, "Computational experience in sensitivity analysis for nonlinear programming," *Mathematical programming*, Vol. 6, pp. 301~326.

(5) McKeown, J.J., 1980, "Parametric sensitivity analysis of nonlinear programming problems," *Nonlinear optimization-Theory and Algorithms*, Lecture 15, Birkhauser, Boston.

(6) Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelemy, J.M. and Riley, K.M., 1982, "Sensitivity of optimum solutions of problem parameters," *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 9, pp. 1291~1299.

(7) Schmit, L.A. and Chang, K.J., 1984, "Optimum design sensitivity based on approximation concepts and dual methods," *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. 20, pp.39~75.

(8) Vanderplaats, G.N. and Yoshida, N., 1985, "Efficient calculation of optimum design sensitivity," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 11, pp. 1798~1803.

(9) Vanderplaats, G.N. and Cai, H.D., 1986, "Alternative methods for calculating sensitivity of optimized designs to problem parameters," *NASA CP-2457*.

(10) Barthelemy, J.M. and Sobieszczanski-Sobieski, J., 1983, "Extrapolation of optimum design based on sensitivity derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 5, pp.797~799.

(11) Wang, Q. and Arora, J.S., 2004, "Alternate formulations for structural system optimization," *AIAA-2004-1642*.

(12) Gill, P.E., Murray, W. and Saunders, M.A., 1997, "SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization," *SIAM Journal*, Vol. 12, No. 4, pp. 979~1006.

(13) Arora, J.S. and Tseng, C.H., 1986, *IDESIGN User's manual* version 3.5, Optimal design laboratory, college of engineering, The University of Iowa, Iowa city, Iowa 52242.

(14) *DOT user's manual* version 5.4, Vanderplaats Research & Development, Inc., 2004.

(15) *GENESIS User's manual* version 7.0, Vanderplaats Research & Development, Inc., 2001.

(16) Hock, W. and Schittkowski, K., 1981, "*Test examples for nonlinear programming codes*," Springer-Verlag, New York.

(17) Haftka, R.T., 1985, "Simultaneous analysis and design," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 7, pp. 1099~1103.