

## 경험적 구조주의에 의한 수학적 오류의 분류가능성 탐색

김 부 미\*

수학적 오류를 인지구조의 수행 변화와 관련 있는 정신용량으로 설명할 수 있다면, 다양한 과제에 따라 여러 유형으로 발생하는 수학적 오류를 분류할 수 있는 공통적인 기준도 학습자의 인지체계와 정신용량을 관련하여 설명할 수 있다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 수학적 오류를 Demetriou et al.(1987, 1993)의 경험적 구조주의를 바탕으로 학생들의 인지구조 및 과제상황에 근거하여 설명하고 다양한 내용과 맥락에 공통적으로 적용이 가능한 오류 분류 기준을 제안하고 실제에의 적용가능성을 탐색한다. 그 결과, 오류 분류 기준은 6가지 자발적 정신용량과 그 요소능력 및 양식적 특성으로 요약될 수 있다. 제안한 경험적 구조주의에 기반한 오류 분류 기준을 일차함수과제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 세분화하여 적용한 결과, 오류의 재분류가 가능하였다.

### I. 서 론

수학적 오류는 수학 학습 과정에서 범하는 잘못된 계산이나 실수, 착각 등에 의해서 나타나는 것으로, 일반적으로 교사와 학생들은 수학적 오개념과 동일한 의미로 사용한다. 또한, 오류를 적게 범하는 학생은 스스로 성공적으로 학습한다고 생각하는 반면, 오류를 많이 범하는 학생은 학습에서 실패할지도 모른다고 생각한다. 그러나 수학 학습 과정에서 오류를 전혀 범하지 않는 학생은 찾아보기 어려우며, 단순히 학생 개인의 수학 학습 부족에 기인한 것으로서 모두 제거되어야만 하는 쓸모없는 것이라고 보기도 어렵다. 이러한 수학적 오류는 교육 활동의 여러 변인들 사이의 밀접한 상호작용 때문에 발생할 수 있으므로, 오류를 명확한 분류 기준을 수립하는 것이 성취하기 어려운

것처럼 보일지도 모른다. 그러나 수학 학습 과정에서 발생하는 학생들의 오류를 유형별로 분류하고 학생들의 오류를 이해하고 이를 바탕으로 학생들의 학습을 안내·지도·평가하는 활동은 교수-학습의 측면에서 중요하다. 수학적 오류는 수학 교육 전문가에게 학생들의 현재 지식 상태를 진단할 수 있도록 하고 학생들의 수학 학습에서의 어려움에 대한 정보를 제공함으로써 학생들의 오류를 예측·처방하거나 새로운 개념을 탐구·학습하기 위한 토대가 될 수 있다는 교육적 의미를 가진다.

이러한 관점에서 수학적 오류에 대한 연구는 1900년대 초부터 주로 산술 영역에 한정되어 진행되었으며(Radatz, 1979), 1980년대 이후 Vinne(1983), Resnick et al.(1989), Sfard(1991), Fischbein (1997), Ashlock(2002)과 같은 여러 학자들에 의해 수학의 여러 영역에서 활발히 진행되고 있다. 수학적 오류를 유형별로 분류함

\* 이화여자대학교 대학원, bumi71@ewhain.net

류가 나타나는 원인과 일반적인 특징을 찾으려고 했던 ‘오류 분석(error analysis)’ 연구는 가능한 모든 오류 기법의 목록화 및 분류, 오류의 빈도 분포를 측정하는 것, 오류의 지속성을 측정하는 것, 그리고 학습의 어려움과 오류를 치료하기 위한 교육적인 수단을 개발하는 것을 목적으로 하였다(Radatz, 1979). 예를 들어, Roberts(1968)는 학생들의 실패전략을 기준으로 초등학교의 범자연수 영역의 오류를, Enright, Gable, Hendrickson(1988)은 산술적 오류들을 범주화하여 처방하기 위한 9단계의 조작을 제시하였다. Radatz(1979)는 정보처리적 관점에서 획득(obtaining)-처리(processsing)-보유(retaining)-재생(reproducing) 단계와 관련하여 중등 수학에서 나타나는 오류 유형을 언어적 어려움에 기인한 오류, 공간적 정보 획득에서 기인한 오류, 불충분한 선수학습에 기인한 오류, 사고의 부정확한 결합 또는 엄밀성으로부터의 오류, 부적절한 규칙이나 전략의 적용에 기인한 오류로 분류하였다. Movshovitz-Hadar와 Zaslavsky(1987)는 오류를 우연적이지 않고 준-논리적 과정이며 학생들이 어떻게 해서든지 이해한 상태로 정의하고, 대수와 기하영역에 대한 16세 이스라엘 학생들의 졸업시험 결과를 바탕으로 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추리, 곤란된 정리나 정의, 입증되지 않은 해답, 기술적 오류의 6개 범주로 분류하였다. Pinchback(1991)은 대수코스를 듣는 대학생을 대상으로 실수의 성질, 다항식, 유리식의 표현, 근과 근호, 이차방

정식 등의 5가지 예를 사용하여 대수에서 고등학교 수준과 대학수준의 중간 정도에서 발견되는 오류를 개념적 오류(conceptual error)<sup>1)</sup>와 선수학습 오류<sup>2)</sup>로 구분하였다.

이상의 오류 분류를 실시한 연구들의 공통점은 각각의 오류범주를 분류할 때 학생들은 일부 특징적인 자료를 추가하거나 무시하고, 언어적 표현을 서로 다른 의미를 가지는 수학적 표현으로 번역하며, 논리적으로 타당하지 않은 추리를 하고, 기본적 연산에서 실수를 한다고 가정한다. 또한 오류 분류에서의 공통적인 가정은 오류 교정이라는 측면만을 강조하고 있다. 오류 분석 연구들의 대부분은 특수한 수학적 내용 영역에서 연구자 각자의 실험을 바탕으로 연구자 나름대로의 분류 기준에 의해 각각의 오류 범주에 대한 서술과 예를 포함하도록 범주화하므로, 수학적 오류의 본질을 연구하는 데에 한계가 있다. 또한, Radatz의 정보처리적 관점에서 분류된 5가지 오류 유형과 Pinchback(1991)의 개념적 오류와 선수 학습 오류는 여러 내용에 적용될 수 있는 오류로 보일 수 있으나, 이러한 오류 분류 연구는 다양한 과제 상황에 따라 다양하게 나타나는 현상을 바탕으로 한 오류 연구 방식을 취하고 있다. 또한 학생들이 수학 학습과정에서 다양한 인지적 변인들 사이의 복잡한 상호작용에 의해 발생하는 오류들을 단순히 정보처리의 순차적 단계에 따라 분류되는 것으로 보거나, 대수와 기하영역에서의 문제해결 결과와 같은 특수한 맥

- 
- 1) 개념적 오류(conceptual error)는 문제해결에 필요한 개념이 요구하는 적합한 절차를 적용할 때, 필수적인 단계에서 학생들이 범하는 오류를 뜻한다. 예를 들어,  $\sqrt{7-m}+m=5$ 라는 무리 방정식을 풀 때, 양변을 제곱한다는 것을 알고 있으나 곱셈공식을 잘못 적용하여  $7-m+m^2=25$ 로 식을 변형하는 경우를 의미한다.
  - 2) 선수학습 오류는 문제를 해결하려고 시도하나 이전에 논의한 개념의 불완전한 습득으로 인하여 보다 높은 발전된 개념을 사용하지 못하고 선수학습 결과를 사용하여 문제를 해결하는 경우로 의도한 학습 목표에 어긋나게 행하는 오류를 의미한다. 예를 들어, 식의 값 문제에서 식을 간단히 정리한 후 주어진 문자에 수치를 대입하여 계산해야 하는데 처음부터 계속 수치를 대입하여 문제를 풀거나, 곱셈공식 대신 분배법칙을 이용하여 식을 전개하는 경우 등을 말한다.

학에서의 오류를 중심으로 여러 오류들의 공통된 특징을 설명하려고 하기 때문에 다양한 과제상황에 공통적으로 적용가능한 오류분류 기준을 밝히는 것이 어려울 수 있다. 즉, 다양한 과제와 상황에서 다양하게 나타나는 오류의 유형들을 범주화하고 이를 기반으로 공통적인 분류기준을 도출하려는 연구 방식은 내용·특수적인 여러 유형의 오류를 분류하는 기준이 다양하기 때문에 과제상황에 공통적으로 적용이 가능한 분류기준을 밝히는데 어려울 수 있다.

이에, 학습 어려움의 진단을 위한 오류 분류뿐만 아니라 오류를 학생들의 개념이 성장하는 복잡하고 점진적인 과정에서 다양한 수학적 내용에 관련된 학생의 현재 지식 상태를 진단하는 보다 포괄적인 오류 분류 기준을 고려할 필요가 있다. 따라서 수학적 오류 분석 연구를 보다 체계적으로 하기 위해서는 종래의 연구방식이 아니라 공통적인 오류들을 분류하기에 앞서 그 오류를 분류할 수 있는 기준을 명확히 할 필요가 있으며 본 연구에서는 이를 학생들의 인지구조 및 과제상황에 근거하여 다양한 내용과 맥락에 공통적으로 적용이 가능한 오류 분류 기준을 제시하여 그 적용가능성을 모색하고자 한다. 구체적으로, 수학적 오류의 인지심리학적 분류 기준으로 Demetriou et al.(1987, 1993, 1994)의 경험적 구조주의(experiential structuralism)를 고찰한 다음, 이를 바탕으로 사례를 들어 수학적 오류의 분류기준을 제안하고 일차함수 단원에서 사례연구를 실시하여 제안한 분류기준의 실제에의 적용가능성을 탐색한다. 이 때, ‘수학적 오류’는 수학 학습을 할 때 학생의 오개념에 의해서 체계적으로 나타나는 학습 과정과 결과로 정의한다. 오류는 학생 나름대로 논리적인 알고리듬과 정의를 체계적이나 부적합하게 조작하고 수행하거나 오개념의 영향 하에 이를 체계적으로 학습하고 응용하는 과정에서 발생한

다. 또는 수학 학습과정에서 같은 문제가 서로 다른 근원으로부터 오류들을 발생시키기도 하고 같은 오류가 서로 다른 문제해결과정에서 발생하기도 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 경험적 구조주의

경험적 구조주의는 인지-발달 심리학과 전통적인 구별 심리학(differential psychology)을 통합하여 정신용량(capacity)의 구조를 인과적으로 설명할 수 있는 공통적인 모델을 제안한 이론이다. Demetriou 등(1987, 1993, 1994)는 신피아제 이론의 정신용량과 관련하여 인지심리학의 관점에서 인지체계(cognitive system)의 변화와 수행변화를 직접 연결시켜 설명하는 이론을 경험적 구조주의라고 한다(Pascaul-Leone, 1987). Demetriou와 Efklides(1987)는 Pascaul-Leone의 신피아제 이론에서 정의된 정신용량을 ‘기능적 정신용량’으로 구체화시켜 해석한다. 즉, 실제 문제해결의 과정 중 단기기억에서 동시에 활성화시킬 수 있는 독립된 스키마의 최대 개수를 기능적 정신용량이라고 정의한다. 그런데, 실제 문제해결 상황에 사용되는 기능적 정신용량은 개인에 따라 다르게 나타날 수 있다.

경험적 구조주의는 마음속에서 개인의 경험을 구조적으로 조직화하는 것에 대한 직접적인 반영을 나타내기 위한 인지수행을 고려한다. 따라서 경험과 정신이 하나 또는 여러 개의 구조로 조직될 때, 경험적 구조는 일련의 과제에 접근하고, 해석하고, 처리하고, 해결하는 방법으로 인지 수행을 명확하게 나타낼 수 있다. 그리고 수행 변화는 개인의 경험을 조직화할 때 연합된 제약들(constraints)을 반영한다. 이

때 경험은 주체가 문제 사태에 직면하여 목표를 설정하고, 목표의 실현을 위해서 매진하는 과정이다. 구조는 개인의 인지 수행으로부터 추상화될 수 있고 개인의 인지구조에 실험적으로 기록되며, 개인이 관찰해왔거나 상호작용했던 사실들 또는 사건들을 조직하는 방법을 반영하는 것으로 본다(Demetriou & Efklides, 1987; Demetriou et al., 1993).

경험적 구조를 인지 수행으로부터 추상화 될 수 있는 것으로 볼 때, Demetriou와 Efklides (1987), Demetriou, Efklides & Platsidou(1993)에 의하면, 인지 체계는 6개 자발적 정신용량 영역(6 autonomous capacity spheres)으로 구성되어 있으며, 특별한 인지 능력(ability)들은 5가지 원리의 안내 하에 정신용량 속으로 통합될 수 있다고 한다. 6개의 자발적 정신용량과 5가지 원리를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

#### 가. 6개의 자발적 정신용량

6개의 자발적 정신용량은 양적-관계적 정신용량(the quantitative-relational capacity), 질적-분석적 정신용량(the qualitative-analytic capacity), 심상적-공간적 정신용량(the imaginal-spatial capacity), 인과적-실험적 정신용량(the causal-experimental capacity), 언어적-명제적 정신용량(the verbal-propositional capacity), 메타인지적-반성적 정신용량(the metacognitive-reflecting capacity)이며 양적-관계적 정신용량으로부터 메타인지적-반성적 정신용량의 순으로 갈수록 수준이 높아진다.

경험적 구조주의의 체계에서 개인에게 입력되는 정보는 감각, 감정, 정신적 활동에 의해

기인된 개인개념과 같은 정보이다. 이 정보는 세분화된 6개의 정신용량과 그 정신적 기능들에 의해서 조직되고 처리된다. Demetriou et al.(1987, 1993)의 6가지 자발적 정신용량<sup>3)</sup>은 다음과 같다.

첫째는 양적-관계적 정신용량(the quantitative-relational capacity)으로, 이 정신용량은 측정 가능한 양적 실제와 관련되고, 이 정신용량은 다음과 같은 하위 세 가지 요소 능력(component abilities)들이 상호연관 되어 구성된다.

#### (1) 양적 상세화와 표현의 능력(Abilities of quantitative specification and representation)

처리되는 원소 또는 성질들의 양적 특성을 상세히 서술하고, 산술체계나 측정(metric) 체계의 용어로 특수화하여 부호화(encode)하는 능력

#### (2) 차원-방향 구성 능력(Abilities of dimensional-directional construction)

한 차원<sup>4)</sup>에서 대상을 평균치에 소급할 수 있고, 차원이 변화하는데 따르는 방향성을 이해할 수 있는 능력이다. 이러한 능력을 통해서 개인은 부호화한 실제 성질을 한 차원의 점(또는 수준)으로 간략히 하고 그 척도(예, 산술 척도, 기하 척도, 대수(logarithm) 척도)를 정의할 수 있다. 그리고 차원의 모양과 방향을 포착할 수 있다.

#### (3) 차원-방향 조정 능력(Abilities of dimensional-directional coordination)

공변(covariation)을 이해하고 처리하기 위해서 차원들을 상호 관련시키는 능력. 차원-방향 구성 및 조정 능력은 종합적이거나 수렴적으로 양적-관계적 정신용량에 의해 통제될 때 사고의 전략적인 소재인식(orientation)을 조절하는 능력이다.

3) 용어의 구성은 “실제 영역(reality-domain) - 형식적 조작(modal operations)”으로 이루어졌다.

4) 차원은 대상의 양적 특성을 반영하는 성분적 속성의 한 축으로, 모든 대상이 그 차원 상에서 어떤 값을 가지게 된다(신현정, 2000). 성분적 속성(component attribute)은 개념을 구성하는 일부분으로 대상의 부분을 참조하거나, 추상화된 모양을 기술하거나, 대상이 가지고 있는 기능이나 목적을 나타내는 속성이다. 이 성분적 속성의 다른 한 축은 질적인 특성을 반영하는 세부특징(feature)이다.

tation)을 정의한다. 즉, 주어진 두 원소들에 양적 과정이 적용될 때 하나의 관계로 종합적으로 또는 수렴적으로 축소될 수 있다. 이 때 관계는 두 원소들을 하나의 정신적 산물로 귀착시키는 것을 말한다.

두 번째는 질적-분석적 정신용량(the qualitative-analytic capacity)이다. 이 정신용량은 실재에서의 질적인 성질과 질적인 성질로 생각되는 양적 성질에도 적용가능하다. 질적-분석적 정신용량은 범주적, 매트릭스적, 연속적 구조이다. 이러한 구조들은 위계적인 원소들을 연결하는 수직 관계(범주적 구조), 수평적 또는 상호관계(매트릭스 구조), 연속적 또는 차원적 구조(연속적 구조)의 포함 관계를 해독하는 데에 목적이 있다. 질적-분석적 정신용량은 일련의 성질들을 열거하거나 분석하는 능력, 하나 이상의 성질을 분리하는 능력, 맥락으로부터 성질을 도출하는 능력에 기초한다.

세 번째는 심상적-공간적 정신용량(the imaginal-spatial capacity)으로 환경을 심상적으로 시각화하고 처리하는 정신용량이다. 심상적-공간적 정신용량은 실재를 통합된 전체(integral wholes)로서 심적 스크린이나 이를 처리하는 심적 베퍼에 투영하고 보존될 수 있도록 지시하는 정신용량이다(Demetriou et al., 1987, 1993). 심상 처리에 사용된 요소 능력들은 이전의 심상들의 특성과 많은 상호작용을 하게 되는 동시에, 이로부터 많은 제약을 받는다. 심상 처리에 사용된 요소 능력들과 특성은 다음과 같다.

#### (1) 세목(details)의 가감

상황의 요건에 따라 특성을 가감함으로써 심상을 풍부히하거나 단순화하는 능력

#### (2) 통합(integration)

두 개 이상의 심상들을 하나의 전체 심상으로 통합 또는 융합하는 능력.

(3) 개조(reformation)와(또는) 변형(transformation)  
심상이 표현된 실재에서 그에 대응되는 변화에 적합하게 부분들을 재배열하거나 엮어내는 능력.

#### (4) 회전(rotation)

심상 변형을 할 때, 그 심상이 다른 표준적인 심상과 유사한지를 검사하기 위해 3차원 공간에서 어떤 한 심상을 다시 한 번 소재인식(reorientation)하는 능력.

#### (5) 참조적 조절(referential coordination)

심상들을 각인시킬 수 있고 그 관계를 왜곡하지 않음과 동시에 보다 확장된 정신적 공간을 설계하여, 위의 변형들을 하나 이상 행할 수 있는 능력.

네 번째 자발적 정신용량은 인과적-실험적 정신용량(the Casual-experimental Capacity)이다. 인과 관계에 의해 반드시 상호작용을 하는 대상들로 구성된 인과적 실재 구조의 원소들 사이의 관계를 정하고 분류하기 위해 최소한의 통제와 처리를 하는 정신용량이다(Demetriou et al., 1987, 1993). 여기에서 말하는 구조는 공존실재구조(coexistence reality structures)로 앞서 살펴본 세 정신용량과 관련되는 영역을 구성한다. 산술적, 의미론적, 공간적 관계들이 다중적으로 상호연관 되어 있지만, 그 각각이 서로에게 필수적으로 영향을 주는 것은 아니며 그 구조의 다른 원소들의 변화를 필수적으로 요구하지는 않는다. 요소 실험 능력들(component experimental abilities)은 다음과 같은 기능을 한다.

#### (1) 조합 능력(combinatorial abilities)

문제에 포함된 변수 수준들 사이의 모든 가능한 조합들을 생산하는 능력이다. 이 조합 능력은 보다 넓은 공존구조를 정의하기 위해 사용되는 방법적 사고이다.

#### (2) 가설 형성 능력(hypothesis formation abilities)

가설 형성 능력은 자료 패턴들의 기초위에 가능한 인과적 연결들에 대한 예측을 추론하는 것을 가능하게 해주는 능력이다. 생산된 조합들을 타당한지 거짓인지를 경험적으로 테스트하기 위해 가설로 설정되지만, 종종 기계적으로 발생될 때는 가설로 전환되지 않는다. 가설 형성 능력은 공존구조의 인과적 결과에 대한 예비적 분리를 하는데 사용된다.

#### (3) 실험 능력(experimentation abilities)

상보적인 실험 형식에서 가설을 구체화하는 능력이다. 가능한 세계에 실제 형식을 주는 방법을 찾는 능력이고, 동일한 다른 대상들의 스키마와 공존 변인을 적용할 수 있게 하는 능력이다.

#### (4) 모델 구성 능력(model construction abilities)

수용가능한 분석틀 또는 이론에 도달할 수 있도록 실험의 결과들과 원래의 가설사이의 적합한 사상(map)을 할 수 있는 능력이다. 이 때 이론은 두 종류의 관계를 표현할 수 있는 상대적인 일관성이 있는 모델로 기능 한다. 그리고 두 종류의 관계는 나중에 구해 질 인과적 구조에 포함된 관계와 보다 넓은 공존구조와의 인과적 관계이다. 따라서 이론은 원인, 결과, 이질적인 변인들을 진술하는 기능을 하고, 모델은 그 자체만으로 확장과 유효성을 안내하는 기능을 한다. 즉, 새로운 가설은 원래의 인과적 구조를 확장하거나 면밀히 검사하기 위한 후속 실험을 지시하는 모델로부터 도출될 수 있다.

이러한 인과적-실험적 정신용량은 수학 방정식, 언어적 서술, 심상을 통해 표현될 수 있으므로 다중적인 정신용량으로 고려될 수 있지만, 다른 정신용량과 공유되지 않는 특성을 지니고 있다. 이 특성은 같은 시간 차원에서 우연히 발생한 다른 사건들과 패턴화 된 사건들 사이의 역동적인 연결을 선별하도록 한다.

다섯 번째 언어적-명제적 정신용량(the ver-

bal-propositional capacity)은 관찰가능한 실재에 토대로 하는 것이 아니라, 인식주체의 언어와 명제 추론, 명제 함수, 변증법적 논리, 형식 논리(modal logic) 등과 같은 지식의 의미론적 표현을 매개물로 하여 인식주체의 논리적인 실체(entity)를 다루는 정신용량이다. 명제적 정신용량은 관찰 가능한 현실에 존재하는 실체들의 관계보다 주체 자신에 의해서 논리적으로 구성된 실체들의 형식적 또는 정신적 관계를 지시한다. 그 결과, 명제적 정신용량은 관계없는 것을 논리적으로 거부하고 주장에 관련된 요소들을 처리하는 것을 돋는 언어양식에 영향을 많이 받는 것처럼 보인다.

여섯 번째는 초인지-반성적 정신용량(the metacognitive-reflecting capacity)이다. 초인지 정신용량들은 다른 정신용량들을 변형·적용·반성·처리·표현한다. 초인지는 순서를 부과하고 문법을 적용하려는 목적에서 내적 피드백과 내적 대화의 내용에 적용되어 유용한 지식이나 규칙과 사람들의 인지적 소재인식을 적합하게 하는 메커니즘이나 지령목록(directory) 사이의 사상을 만들어준다. 초인지-반성적 정신용량의 기능은 인지적 활동을 충만하게 하는, 문제를 해결하기 위해 필요한 것을 결정하고 적용할 적합한 전략을 결정하고 해결이 어려운 것이라면 대안적 해가 있는지, 이를 발견될 수 있는지를 결정하는 것이다. 초인지-반성적 정신용량의 요소 능력은 다음과 같다.

##### (1) 면식 추정자(Acquaintance estimators)

풀어야 할 문제와 전체 인지 체계 사이의 공통부분을 고려하는 것으로, ‘이전에 풀었던 문제인가?’, ‘유사한 문제인가?’와 관련된다. 면식 추정자는 과제의 몇몇 현저한 내용 특성에 기반하고 이러한 특성들에 대한 정밀한 조사는 과제에 대한 적극적 또는 소극적 태도에 기인한다.

#### (2) 과제-정신용량 제휴 추정자(Task-capacity affiliation estimators)

과제와 정신용량을 중개(go-between)하는 작인(作人)으로 정의된다. 한 번 활성화되면 과제의 특별한 내용 특성 및 그 상호관계와 문제의 목표, 저장된 지식, 규칙, 해를 구하는 목적, 암묵적 또는 명시적 질문들<sup>5)</sup>의 메커니즘 사이를 번갈아 정밀하게 조사한다.

#### (3) 처리 부하 추정자(processing load estimators)

면식 추정자 또는 과제-정신용량 제휴 추정자가 암묵적이거나 명시적 판단을 한 후에 활성화된다. 처리부하 추정자는 취해진 특수한 행위를 명백하게 지시하는 증거들인지 아닌지를 알아내기 위해 과제 구조를 면밀히 분석 조사한다. 또한 절차가 간단한지 복잡한지, 명쾌한지 아닌지를 알아내기 위해 절차 자체를 면밀히 분석 조사한다. 처리부하 추정자는 과제가 성공하지 않을 것 같을 때, 그 다음에 진행될 후속 처리를 잠시 보류하도록 한다. 만일, 면식이 안 되거나 과제의 정신용량으로 귀속(ascription)이 불가능하다면, 그 작인(agent)을 저장해 주는 에너지로서의 처리 부하 추정자의 기능은 불가능하게 된다. 따라서 과제-정신용량의 사상에서 처리 부하 정신용량은 선택된 처리나 조작에 상대적인 과제 요구 개념을 공식화 하므로, 처리 부하 추정자의 기능은 과제와 정신용량 구조 모두에 바탕을 둔다.

#### (4) 성공 추정자(Success estimators)

성공 추정자는 소급(retroactive) 추정자로, 해의 전유(appropriateness)와 정답을 판단하는데 관련이 된다. 해는 다양한 관련성이거나 오류 유무에 의해 평가될 수 있다. 사실상, 관련성 판단은 이전의 과제-정신용량 사상에 의존하며 오류 유무의 판단은 선택된 정신용량과 그 특수한 절차에 따른다. 또한, 성공 추정은 난이도 추정(difficulty estimation)에 의존한다. 더 어려운 과제라고 판단될수

록, 사람들은 생산된 해에 대하여 불확실함을 더 많이 느낀다. 왜냐하면 어려움은 대안적 과제-정신용량 사상 그리고/또는 선택을 위한 고려 하에 나타난 절차의 기능으로부터 발생하기 때문이다.

이상에서 살펴본 여러 특별한 인지 능력들은 5가지 원리의 안내 하에 정신용량 속으로 통합되고 체계화될 수 있으며 정신용량들의 특성을 이 구별·확장될 수 있다(Demetriou et al., 1987, 1993).

나. 경험적 구조주의의 다섯 가지 원리  
다섯 가지 원리는 영역 특수성(domain specificity)의 원리, 형식·절차적 특수성(formal-procedural specificity)의 원리, 상징적 편향(symbolic bias)의 원리, 정신용량의 주관적 구별(subjective distinctness of capacities)의 원리, 발달적 변화의 원리(Principle of developmental variation)이다.

첫째, 영역 특수성(domain specificity)의 원리는 다음의 두 가지를 의미한다. 첫째, 같은 속성에 의지하고 같은 유형의 관계들에 의해 연결되는 요소들의 집합은 다른 영역과 심리학적으로 다른 실제 영역을 구성한다. 즉, 심리학적 주체의 관점에서 실제의 요소들은 나름대로 정체성과 기능, 속성을 가지며 그 본성은 상호 연결 될 수 있는 관계들의 유형과 범위를 제약한다. 둘째는 인지체계 또는 그 생물학적 기질의 서로 다른 실제 영역에 대한 성향을 확장된 실제 영역에 사상하고 기능적 체계 또는 정신용량을 구성함으로써 부여할 수 있다. 즉, 각각의 기능적 체계나 정신용량은 각각의 영역을 정의하는 전체 기능, 관계들의 속성 또는 발달과정에 의존하거나 점진적으로 습득될 것이다.

5) 질문- “내가 이미 만들어진 절차가 이 문제에 적용될 수 있을까?, 그렇지 않으면 어떤 절차를 이 문제의 요구에 적합하게 선택하고 적용할 수 있을까?”

둘째, 형식-절차적 특수성(formal-procedural specificity)의 원리는 첫 번째 원리로부터 바로 도출된다. 즉, 서로 다른 정신용량은 지식의 독특한 유형으로 지시되는 정신모델로서 기능을하게 되면, 서로 다른 형식적 성질과 다른 인지영역을 구성하게 될을 가정한다는 것이다(Keil, 1984, 재인용).

셋째, 상징적 편향의 원리는 영역 특수성의 원리와 형식-절차 특수성의 원리로부터 나온다. 자신의 영역과 형식적-절차적 고유성에 의존하는 각각의 정신용량은 서로 다른 상징체계 또는 부분체계의 성향을 띠려는 경향이 있다. 그러나 정신용량-상징적 편향 관계는 양방향적 관계이다. 각 정신용량은 서로 다른 형식과 처리 성질에 의해 지배받는 각각의 실제 영역에 적용되며, 각 정신용량은 자신의 실제 영역의 성질과 관계들을 충분하고 정확하게 표현하는 목적과 대상화된 탐구 체계의 독특한 공적 조사 과정을 효과적이고 오류 없이 실행하려는 두 가지 주된 목적을 수행한다. 이 때, 각 정신용량은 유망한 상징체계로 편향될 수 있다고 가정한다. 처리과정의 필수요건은 상징체계의 선택을 결정하고, 상징체계 유형은 특정 범위와 처리과정의 특성을 결정한다.

넷째, 정신용량의 주관적 구별(subjective distinctness of capacities)의 원리는 기능적인 정신기관인 정신용량은 다른 공존 정신기관과 구별되는 그 사람만이 느끼고 인지하는 독특한 기능적 실체로서 노출되는 것이다. 또한 두 정신 용량들이 객관적으로 독특한 정신기관으로 나타나고 그 기능을 객관적으로 수행한다고 할지라도, 그 구별은 공통 요소들을 공유하는 사건들 내에서 모호해 질 수 있다.

다섯째, 발달적 변화의 원리(Principle of developmental variation)는 앞서 논의한 4가지 원

리가 상호 연합하여 발달의 일반적 특성을 결정한다는 것을 의미한다. 이 때, 발달은 개인의 내적 변화와 개인 간 변화를 생성하는 밑바탕으로서 주체-객체 관계들의 본성과 주체 내에서 인지적으로 조직화될 때 나타나는 공통성에 근거한다. 발달하는 시간과 증가하는 경험은 공변한다. 그러나 주어진 현실 영역  $D_m$  사이의 상호작용에 집중하는 시간  $t$ 는 다른 현실 영역들  $D_{m_k}$  과의 가능한 상호작용을 억제한다. 따라서 시간  $t$ 에 대한  $D_m$ 에서 용이한 지식과 상호작용은 다른 영역들  $D_{m_k}$ 에 비해 상대적인 특권을 갖는다. 이는 내적인 그리고 개인 간 발달적 변화 과정도 영역-특수성을 가짐을 의미한다. 한편으로, 학습자는 현실과 접속하는 방법, 실제의 원소들을 표상들로 추정하는 방법, 특별한 정신적 목적을 위한 서로 다른 정신 기능들을 유통하는 방법, 활성화된 그리고 운영 중인 처리체계를 경험함으로써, 발달하는 시간동안 경험도 증가한다. 이러한 영역-특수적인 기능과 발달의 특수성은 발달적 변화에는 어떤 범위가 존재한다는 것을 함언한다(Demetriou, Efklides, & Platsidou, 1993). 그리고 발달적 변화의 특수한 성질과 영역-특수적인 기능들이 성질들의 공존이 장기적으로 이루어진다. 성질들의 공존은 학습을 촉진하는(facilitate) 상황 또는 방해가 되는 스키마들을 활성화시키는 오도 상황이 될 수도 있다(Pascaul-Leone & Johnson, 1999).

이상을 정리하면, <표 II-1>로 종합할 수 있다. 정리하면, 수학적 오류를 오개념에 의해서 체계적으로 나타나는 학습과정과 결과로 정의하였다. 이는 오류를 인지체계의 변화과정에서 나타나는 선행지식이 수행과정에서 변형되거나 직접 반영된 결과로 볼 수 있음을 의미한다. 따라서 경험적 구조주의가 인지체계의 조직화

와 관련한 체계적인 변화와 수행의 변화를 직접적으로 연결시켜주는 메커니즘을 설명할 수 있는 이론이라는 것을 고려할 때, 수학적 오류와 경험적 구조주의를 관련시켜 해석할 수 있음을 합축한다. 또한, 경험적 구조주의는 신 피아제 이론이 자발적 정신용량의 구성을 인과적으로 설명하기 위해 제안한 개념들에 대하여 그 정신용량의 생성을 설명할 수 있는 공통 모델 속으로 통합시킬 수 있는 이론이다. 이 때 수학적 개념이나 지식은 인지구조로 해석하고, 인지구조를 세분화하는 정신용량은 기능적 정신용량으로 본다. 그리고 정신용량은 영역-특수하고 형식-절차적으로 특수하므로, 그 요소능력도 각 정신용량의 특성에 따라 구분 가능하다.

능력(ability)은 보다 복잡하거나 덜 복잡한 수행 후 성취한 결과에서 볼 때 각각에 의한, 운동성 있는, 지적인 기능을 가진 처리 요소들(functional processing components)을 말한다. 또한 이러한 세분화된 정신용량에서 주의를 통제하고 조절하고 관련된 지식을 장기기억으로부터 인출하고 문제해결과정에서의 수행을 처리하고 관리하는 초인지 체계로 수학 학습을 설명할 수 있다. 수학 학습과 관련하여 이러한 관계를 구체적으로 살펴보면, 정신용량과 그 요소능력이 초인지 체계에 의해 처리될 때 상징적 편향의 원리와 정신용량의 주관적 구별의 원리에 따라 활성화되고 처리하는 수행과정에서 개인차가 나타날 수 있다. 이는 학생들 개

<표 II-1> 6개 정신용량의 양식적 특성

정신용량	정신용량의 특성		
	적용 영역	요소 능력	과제 적재(task loading)
양적-관계적 정신용량	양을 정할 수 있는 실재	양적 상세화 및 표현 능력, 차원-방향 구성 능력, 차원-방향 조정능력.	측정, 수, 보존, 물리적 평형(예, 균형) 명제성 과제
질적-분석적 정신용량	범주적, 매트릭스적, 연속적 구조	성질들의 질적 구조 분석, 성질들에 각인 없이 하나이상의 기준에 따른 재구성	분류, 연속, 류 포섭(inclusion), 매트릭스적 과제, 유추적 추론 과제
심상적-공간적 정신용량	심적 벼피에 전체적으로 투영할 수 있는 실재	세복 가감, 통합, 개조와 변형, 회전, 참조적 조정	피아제식 심상 과제, 관점들의 조정, 공간적 추론 과제
인과적-실험적 정신용량	상호적 인과적 구조	이분법적 조합, 가설형성, 실험, 모델구성	변수들의 조합, 순열, 고립, 기준실험의 해석, 복잡한 실험디자인, 이론형성 과제
언어적-명제적 정신용량	논리적으로 구성된 실재들 사이의 형식적/정신적 관계	처리된 주장과 관련이 없는 의미론적 네트워크의 선택적 표현 및 관련된 의미론적 원소들의 조합	삼단논법과 명제추론 과제
초인지적-반성적 정신용량	다른 정신용량들	면식, 과제-정신용량 제휴, 처리 부하, 성공 추정자	인지 수행에 대한 반성을 요구하는 과제

인의 능력차에 의해 나타날 수 있는 수학적 오류에 대한 설명이 가능함을 의미한다. 요소 능력은 처리-실행적 성향이 강하므로 수학 학습을 수행하는 과정 즉, 개념이 변화하거나 성장할 때 나타나는 잘못된 체계적인 과정과 결과로서 처리-실행적 성향이 강한 수학적 오류와 관련시킬 수 있다. 즉, 각 정신용량의 요소능력은 영역-특수성의 원리와 형식-절차적 원리, 발달적 변화의 원리를 따라 과제 특수성에 따라 활성화되는 공통적 핵심요소이므로, 수학 학습에서 특정 과제를 수행하는 과정 동안 체계적으로 나타나는 다양한 수학적 오류의 유형을 분류할 때 정신용량과 그 요소능력은 수학적 오류의 분류 기준으로 고려될 수 있다. 다음 절에서 경험적 구조주의와 수학학습의 관계를 구체적으로 살펴보려고 한다.\*

## 2. 경험적 구조주의와 수학 학습

경험적 구조주의에서 과제수행은 일반적 인지능력 요인들에 의해, 영역-특수한 요인들에 의해, 과제-특수한 요인들에 의해 영향을 받는다(Demetriou & Efklides, 1994). 특히, Efklides, Papadaki, Papantoniou, & Kiosseoglou(1997)에 의하면, 인지능력과 수학적 수행의 관계는 정직 상관관계로, 일반적 인지능력은 일반적 수학 능력에 영향을 주고 그 역도 성립한다. 또한, 일반적 수학 능력은 7, 8, 9 학년별 수학 과제 수행에 직접적으로 그리고 간접적으로 영향을 미친다. 이러한 연구 결과는 일반적 인지능력, 수학 영역의 일반적 인지능력, 각 학년별로 특수한 수학 과제 수행의 관계를 심리측정학적으로 밝혀낸 경험적 구조주의를 바탕으로 학생들의 각 학년별 수학 과제 수행에서 나타나는 수

학적 오류도 분석할 수 있음을 시사한다.

구체적으로 살펴보면, Efklides 등(1997)은 인지능력의 일반적 대응 수준을 3수준으로 구분하는데, 첫째, 상위 수준(superordinate level)은 새로운 상황에서 관계성을 식별(정의)하는 정신용량으로 정의하고, ‘일반적 인지 능력(GCA: General Cognitive Ability)’이라고 부른다. 둘째, 중간 수준(middle level)은 영역-특수한 인지능력으로 수학 학습에서 문제를 다루는 사람들의 정신용량이다. 이러한 수학적 능력을 ‘일반적인 수학적 능력(General Mathematical Ability: GMA)’이라고 한다. 셋째, 하위 수준(subordinate level), 과제-특수한 기술(task-specific skill)은 한 영역의 특수한 과제들을 수행하는데 요구되는 절차들을 조합하고 처리하는 정신용량을 말한다.

이 때, 일반적 인지능력은 언어 유추, 형태 분류, 수 개념을 묻는 세 가지 귀납적 과제로 측정하고, 일반적인 수학적 능력은 경험적 구조주의(Demetriou & Efklides, 1987; Demetriou et al., 1993; Demetriou & Efklides, 1994)를 바탕으로 한 수학적 능력(competence)에 기초하여 산술 연산 과제, 대수 개념, 비례 추론 영역으로 측정되었다. 과제-특수한 기술 영역은 7, 8, 9학년의 학교 수학을 ‘기초 수학 개념 검사(Basic Mathematical Notion Test: BMNT)\*’와 각 학년별 수학적 개념 검사(7, 8, 9th Mathematical Notion Test)의 두 가지 유형으로 나누어 사전 검사를 실시하고 1년 후 사후 검사를 실시하였다. 그런 다음, EQS 통계 프로그램을 사용한 ‘구조 방정식 모델’을 적용하여 연구결과를 분석하였다.

분석결과, 첫째, 인지능력 영역에서 일반적 인지능력(GCA)은 일반적인 수학적 능력(GMA)에 영향을 준다. 즉, 일반적인 수학적 능력이

6) 기초 수학 개념 검사(BMNT)는 초등학교 5, 6학년 수준에서 소수, 분수, 대수 연산, 백분율, 삼각형과 사각형의 둘레의 길이와 넓이를 묻는 기하 영역의 문항으로 구성되었다.

일반적 인지능력보다 더 영역-특수하기 때문에, 하위 수준의 요인인 일반적인 수학적 능력은 상위 수준의 요인인 일반적 인지능력에 영향을 받았다. 둘째, 과제-특수한 기술 영역과 인지능력 수행의 상관관계를 조사한 결과, 기초 수학 개념 검사의 수행과 인지능력의 상관 관계는 유의미하였다. 모든 학생들의 기초 수학 개념 검사에서의 수행은 일반적 인지능력(GCA)과 일반적인 수학적 능력(GMA) 모두로부터 영향을 받았다. 그리고 기초 수학 개념 검사에 대한 수행은 사전, 사후 검사 모두에서 집단-특수한 과제(7,8,9th-MNT) 수행에 영향을 준다. 이는 일반적 인지능력(GCA)으로부터 일반적인 수학적 능력(GMA)으로, 일반적 수학적 능력으로부터 기초 수학 개념 검사(BMNT)의 과제-특수한 기술, BMNT의 과제-특수한 기술로부터 각 학년별-특수 과제들의 기술로 각 인지능력들이 영향을 준다는 유향성을 의미한다.셋째, 학년별 수학 개념 검사(7,8,9th-MNT) 수행 결과는 일반적 인지능력(GCA)으로부터 직접적인 영향을 받는 공통점이 있으나, 차이점도 발견되었다. 구체적으로, 7학년 학생들의 기초 수학 개념 검사와 학년-특수한 과제인 7-MNT의 수행에서 일반적인 수학적 능력(GMA)은 간접적인 영향을 준다. 8th-MNT에 대한 수행 결과는 일반적 인지능력(GCA)과 일반적인 수학적 능력(GMA)의 간접적인 영향을 받지만, 기초 수학 개념 검사(BMNT)에 대한 수행의 직접적인 영향을 받는다는 특수한 차이가 있다. 이는 교수의 특별한 요인과 경험에 기초하는 BMNT에서 사용되었던 과제-특수한 기술이 8학년이 되었을 때 BMNT의 연장선상에서의 확장으로서 보다 고차적인 대수 개념에 의해 재조직됨을 의미한다. 9학년 학생들은 BMNT를 수행할 때, 2~3년 동안 BMNT 특수 기술들을 연습하지 않았으므로, 일반적인 수학적 능력(GMA)보다

는 영역-특수하지 않은 일반적 인지능력(GCA)의 영향을 더 직접적으로 받았다. 그러나 사전 검사로 행했던 8th-MNT와 과제-특수한 기술 영역인 9th-MNT의 수행에서는 일반적인 수학적 능력(GMA)의 영향을 받았다. 이상의 각 학년 별 수행으로부터 일반적인 수학적 능력의 발달은 나이와 능력의 고차적 수준에서의 대수적 지식과 기하적 지식의 재구성에 기인하고, 9학년 학생들의 수행을 볼 때 8학년 과제들은 영역-특수한 인지능력들을 중심으로 처리되는 과제임을 알 수 있다. 또한, 과제-특수한 기술들은 보다 높은 수준의 인지 능력들에서의 수행에 중요하며, 친숙하지 않은 과제들에 직면한 학생들이 과제를 조정하기 위한 일반적 그리고 영역 특수한 능력 모두에 발휘된다는 것을 의미한다.

정리하면, 인지능력의 일반성 수준과 수학 수행의 상관관계를 구조방정식 모델이라는 통계적 분석방법을 활용하여 분석한 결과, 상위 수준의 인지능력(GCA)과 중간 수준의 인지능력(GMA)은 기초적인 수학 개념 수행에 영향을 주고 기초적인 수학 개념은 학년별-특수한 과제 수행에 유효한 영향을 미친다. 이는 과제-특수한 인지기술은 일반적 인지능력(GCA)과 일반적인 수학적 능력(GMA)의 수행과 유의미한 관계가 있음을 의미한다. 즉, 심리측정학적으로 밝혀낸 경험적 구조주의에 의해, 일반적 인지능력은 수학 영역의 일반적 인지능력과 정적 상관관계가 있고, 일반적인 수학적 능력은 각 학년별로 특수한 수학 과제 수행에서 고차적인 인지능력들의 수행에 직접적으로 영향을 준다는 것을 알 수 있다. 그리고 수학학습에서 친숙하지 않은 과제들에 직면한 학생들이 과제를 조정하고 수행할 때 일반적 인지능력과 영역-특수한 능력을 모두 발휘하였다. 일반적인 수학적 능력(GMA)과 구체적인 학년별 수학 과제

수행결과를 분석한 결과, GMA는 8학년 때부터 수학적 영역 내에서 발달하기 시작하여 9학년 때는 구체적인 학년별 수학 과제 수행에 직접적으로 영향을 주었다. 이는 일반적인 수학적 능력(GMA)의 발달은 연령과 인지능력의 영향을 받으며, 고차적 수준에서의 대수적 지식과 기하적 지식의 재구성 능력에 기인함을 알 수 있다.

이는 수학학습에서 학생들의 각 학년별 수학 과제-특수한 수행 능력은 6개의 자발적 정신용량과 요소능력들로 구성된 인지능력(GCA와 GMA)과 관련이 있으므로, 각 인지능력의 영역-특수성의 원리, 절차적-형식적 특수성의 원리에 의해 활성화될 때의 특징과 관련지어 보다 구체적으로 해석할 수 있을 것이다. 그러므로 학생들의 각 학년별 수학 과제 수행에서 나타나는 오류도 그와 관련된 특수한 자발적 정신용량과 그 요소 능력의 영향을 받는다는 것을 의미한다. 즉, 학생들의 각 학년별 수학 과제 수행에서 필연적으로 나타나는 과제-특수한 수학적 오류는 수학학습을 수행하는 인지구조의 수행 변화 과정에서 영역-특수하고 형식-절차적인 특징이 있고 상징적 편향의 원리와 정신용량의 주관적 구별을 따르는 정신용량과 그 요소능력과 직접적으로 연결하여 설명할 수 있다. 이에, 다음 절에서는 인지능력과 수행변화의 관계를 구체적으로 측정한 Demetriou & Efklides(1987, 1993)의 경험적 구조주의 이론의 6가지 자발적 정신용량과 그 세부능력을 오류 분류의 기준으로 삼아 일차함수단원에서 나타나는 오류에 적용·분석해보고자 한다.

### III. 연구방법

현재 일반적인 우리나라의 함수 수업에서는,

교사가 먼저 학생들에게 표준적인 함수 과제를 표, 그래프, 대수적인 공식과 같은 다양한 표현을 사용하여 지도한다. 교사는 학생들에게 함수를 학습할 때 표에 내재된 규칙성을 대수식과 같은 기호적 표현으로 번역하게 하거나 그 래프 표현으로 나타내도록 한다. 그런 다음, 학생들은 똑같은 함수개념에 대한 유사한 과제를 교사가 사용하였던 것과 같은 방법으로 학습하고 현상을 함수적으로 해석하도록 한다. 방정식, 표, 그래프는 함수 개념을 완전하게 이해하기 위하여 필요한 요소임에도 불구하고, 학생들은 방정식, 표, 그래프와 같은 정적인 표현에 대한 강조로 인하여, 실제로 수학의 체계 내에서 함수의 성질을 사용하는 것이 무엇인지에 대한 이해가 부족할 수 있다. 또한 대수적 기호에 대한 해석이나 유사한 상황에서 나타날 수 있는 다른 표현들에 대한 이해가 충분하지 못할 수 있으며, 왜 함수를 공부하는 것이 유용한지를 느끼는 것이 쉽지 않을 수 있다.

Kaput(1992), Dunham와 Osborne(1991), Schoenfeld 등(1988), Chazan(1993), Doerr & Tripp(1999), Abrams(2001), Carraher & Earnest(2003)등 많은 선행연구들에 의하면, 표현 형식을 이용하지 않고 수학적 개념을 가르치기 어렵다. 특히, 함수 학습에서 역동적인 표현을 이용하여 구체적인 경험과 함수 개념의 추상성 사이를 연결하는 것이 중요함에도 불구하고, 함수 학습에서 방정식, 그래프, 표 사이의 연결을 이해하고 표현 사이를 변환하는 것을 어려워하는 학생들이 많다.

이처럼 학생들의 표현에 대한 선수 경험과 현상을 해석하기 위해 요구되는 표현을 사용하는 방법 사이의 연결할 때 다양한 오류가 나타나기 때문에, 본 절에서는 일차함수를 학습한 중학교 2학년 학생들을 대상으로 일차함수 과제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제

로 세분화하여 각 과제별 학생들의 오류 유형을 경험적 구조주의에서 살펴본 6가지 자발적 정신용량과 그 특성을 기준으로 오류를 분석하고자 한다.

7차 교육과정에 제시된 일차함수 활용단원은 일차함수를 나타내는 식과 일차방정식의 관계를 이해하는 내용, 두 일차함수의 그래프를 통하여 연립일차방정식의 해를 이해하는 내용, 일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 푸는 내용으로 구성된다. 이러한 교육과정상의 수학적 내용은 Leinhardt, Zaslavsky, & Stein(1990)의 해석과제, 번역과제, 예측과제, 척도과제에 대한 정의와 Janvier(1987)의 번역 과제와 해석 과제의 분류 기준에 의거하여 과제 속성에 따라 재분류될 수 있다. 이는 특수한 함수 문제를 보다 포괄적인 과제 속성에 의해 분류하여 경험적 구조주의에 근거한 인지심리학적 오류 분류 기준이 함수의 다양한 문제와 내용에 공통적으로 적용될 수 있는지를 탐색하기 위한 토대를 마련한 것이다. 이 때, 분류 과제는 중학교 1학년 과정에서 다루는 함수의 정의와 관련하여 제시된 관계가 함수인지를 결정하거나, 서로 다른 관계들 속에서 함수를 식별하는 것 주로 다루기 때문에 일차함수 관계를 만족하는 상황을 제시한 본 절에서는 분류과제를 다루지 않았다.

피험자는 인천의 G여자 중학교 2학년 학생 160명으로, 학생들은 일차함수 단원을 이미 교과서를 중심으로 학습한 상태로, 일차 함수 개념과 그래프에 대한 내용 및 그래프, 표, 함수식 등의 표현 간 번역을 할 수 있었다. 이 때, 학생들은 일차함수의 활용단원은 학습하지 않은 상태였고, 7차 교육과정에 제시된 일차함수 활용단원은 일차함수를 나타내는 식과 일차방

정식의 관계를 이해하는 내용, 두 일차함수의 그래프를 통하여 연립일차방정식의 해를 이해하는 내용, 일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 푸는 내용으로 구성된다. 본 절에서는 학생들의 일차 함수 활용단원에서의 오류 유형을 범주화하였다<sup>7)</sup>.

본 절에서 사용한 용어인 ‘표현 간 변환’의 의미는 단순히 표현 간 번역을 의미하는 것이 아니라, Presmeg(2002)이 의미하는 바와 같이, 수학적 개념을 구성하기 위해 그 속에 내포된 의미와 관계를 해석하고 문맥의 변화와 상황의 변화에 맞게 의미를 이동하면서 관계를 파악하는 인지적 활동을 하면서 표현 간 번역을 하는 것을 의미한다. 함수를 표현하기 위해서는 기호, 표, 그래프, 식 등 여러 표현 방법이 있다. 이러한 표현은 내적 표현체계와 외적 표현체계로 나눌 수 있다(Goldin & Shteingold, 2001). 내적 표현체계는 인지적 형상 또는 정신적 이미지와 같은 상징적인 체계이며, 외적 표현체계는 숫자, Cartesian 좌표 평면, graph, 수직선, 표, 그림 등 시각적으로 보이는 것들이 대부분으로, 공식, 방정식, 다이어그램을 만드는데 규칙이나 기본 토대를 제공하는 것이다. 이처럼 표현은 내적, 외적이라는 수식어를 붙여서 구별하기도 하지만, 일반적으로 표현은 수학적 내용을 표현하는 다양한 기호나 다이어그램, 구체적인 그림, 그래프, 식, 표 등의 물리적 대상을 지칭한다(Janvier, 1987). 본 절에서는 학생들의 수학적 오개념이 발현된 구체적인 결과로 수학적 오류를 보기 때문에 외적 표현체계만을 표현이라는 용어로 다룬다.

수학적 표현은 다이어그램, 그래프, 표와 같은 시각적 표현, 정의, 담화와 같은 언어적 표

7) Ⅲ장의 연구방법과 학생들의 오류 범주화와 관련된 내용은 <수학교육학연구> 14(1) 39-69에 “일차함수 활용문제의 해결을 위한 강의식, 모델링, 과제기반 표현변환 학습의 교수학적 효과 분석”이라는 제목으로 개제되었으므로 간단히 서술한다.

현, 대수식과 같은 기호적 표현, 순서쌍, 표와 같은 수치적 표현으로 크게 구별될 수 있다. 각 표현들은 함수적 관계의 일부 측면들을 설명하지만, 어떤 단독 표현 양식이 학생들에게 함수에 대해 알고자 하는 모든 것을 제공할 수는 없다. 함수 개념은 표현의 다양성을 허용하기 때

문에, 학생들은 함수 개념에 대한 상이한 표현들을 식별하여, 한 표현 체계에서 다른 표현체계로 의미가 보존되는 번역하는 것을 어려워한다.

검사자는 일차함수 단원을 Leinhardt, Zaslavsky, & Stein(1990)의 과제에 대한 정의<sup>8)</sup>와 Janvier(1987)의 번역 과제와 해석 과제의 분

<표 III-1> 검사 문항의 구성

문항	표현	검사 내용
P 1-(1),(2),(3). 일차함수에서의 점과 그래프의 관계 예측	그래프 표현	그래프로 제시된 직선과 점의 함수적 관계를 예측하여 설명한다.
P 2. 일차함수에서의 한 점으로부터 다른 점의 위치 예측	기호적 표현(대수식)	함수 관계식을 사용한 기호적 표현으로 제시했을 때의 점과 일차함수 그래프의 관계를 파악한다.
T/I 3-(1). 일차함수간의 관계 번역 및 진술	표, 언어적 표현	표의 패턴을 추리하여 일차함수 관계로 해석하여 두 함수 간의 관계를 해석한다.
T/I 3-(2). 일차함수간의 관계의 번역 및 진술	그래프, 언어적 표현	표로 제시된 함수 관계를 그래프로 표현하고 언어로 진술한다.
I 3-(3). 일차함수 관계 해석	기호적 표현	대수식을 사용한 기호적 표현으로 번역하여 일차함수 관계를 파악한다.
I 3-(4). 일차함수 관계 해석	기호적 표현	기호적인 함수 관계식 표현으로부터 평행이동의 개념을 해석한다.
I 4. 기울기의 해석	기호적 표현	대수적인 기호적 표현으로부터 기울기의 의미를 해석한다.
T 5. 기호적/그래프적 표현의 번역	그래프, 기호적 표현	기호적/그래프적 표현을 상호 번역한다.
I 6-(1). 기호적 표현의 해석	기호적 표현	기호적 표현으로 제시된 대수식을 그래프적 개념(평행)으로 해석한다.
I 6-(2). 기호적 표현의 해석	기호적 표현	기호적 표현으로 제시된 대수식을 그래프적 개념(y절편)으로 해석한다.
I 6-(3). 기호적 표현의 해석	기호적 표현	기호적 표현으로 제시된 대수식을 그래프적 개념(x절편)으로 해석한다.
S 7. 척도의 차이 이해	그래프적 표현	그래프에서 척도의 차이를 인식한다.
I 8-(1). 질적 함수의 해석	그래프적 표현	질적 함수를 해석한다.
I 8-(2)-(1),(2),(3),(4). 질적함수 해석	언어적 표현	질적 함수에 수치를 주었을 때, 관계를 해석하여 기울기를 계산할 수 있다.

8) Leinhardt, Zaslavsky, & Stein(1990)은 함수에 대한 과제를 분류 과제, 예측 과제, 번역 과제, 해석 과제, 척도 과제로 구분하였다. 분류 과제는 그래프, 대수적 규칙, 다이어그램 등으로 다양하게 표현되는 관계가 함수인지를 결정하거나, 서로 다른 관계들 속에서 함수를 식별하는 것 또는 여러 함수들 사이에서 한 종류의 특별한 함수를 식별하는 것으로 구성된다. 예측 과제는 일부분만 주어진 그래프를 보고 그래프의 다른 점들에서의 상황을 추측하거나 전반적인 그래프의 모양을 예측하는 것과 같이, 주어진 예들을 보고 어떤 규칙을 추측하는 과제이다. 번역 과제는 학생들이 함수 문제를 해결하기 위해 시각적 표현과 언어적 표현, 수치 표현, 대수적 표현들 사이의 이동을 할 수 있는 과제이다. 해석과제는 그래프, 방정식, 상황으로부터 특수한 조건을 고려하여 문제를 해결하기 위해 그 의미를 국소적으로 또는 전반적으로 이해하도록 패턴, 연속성, 기울기와 같은 비 개념을 묻는 문제 등으로 구성된 과제를 말한다. 척도 과제는 학생들에게 그래프적 표현에서의 척도에 대한 단위를 선택하거나 그래프에 대한 전체 척도를 구성하도록 하는 과제이다.

류 기준에 의거하여, 예측, 번역, 해석, 척도 과제로 나누어 총 8개 문항 영역에서 <표 III-1>과 같이 20문제로 제작하였고 부록으로 제시하였다. 이 때 예측과제는 P, 번역과제는 T, 해석과제는 I, 척도과제는 S로 표시한다.

학생들이 일차함수에 대한 문제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제의 각 과제별로 어떤 오류를 범하는지를 조사하기 위한 검사를 45분간 실시한 후, 각 과제별 오류 유형과 질적 함수의 해석 오류 유형을 분석하였다. 오류 유형은 검사에서 학생들이 실제로 수행한 결과, 그렇게 생각한 이유에 대한 서술과 풀이 과정을 바탕으로 공통적으로 행하고 있는 오류를 중심으로 각 과제별로 분류하였다. 다음은 과제별로 분류한 오류 유형에 대한 구체적인 설명이다.

첫째, 예측과제에서 나타난 오류는 크게 두 가지로 그래프 정보의 해석 오류와 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류이다. 먼저, 그래프 정보의 해석 오류는 그래프의 시각적인 정보 읽기에만 의존하거나, 그래프 위의 점들의 좌표로부터 기울기,  $y$ 절편,  $x$ 절편 등의 정보를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옳게 번역하지 못하여 오류를 범함으로써, 그래프 위의 다른 점들의 좌표를 예측하지 못하는 오류이다. 예를 들어, 검사지의 P1의 (3)번 문제에서 점  $(-\frac{1}{4}, 1.2)$ 이 주어진 그래프 위의 점인지를 판단할 때, 학생들의 80%가 주어진 그래프로부터 기울기와  $y$ 절편 등의 정보를 해석하여 함수식으로 번역하여 점  $(-\frac{1}{4}, 1.2)$ 의 그래프상의 위치를 확인해야 하는데도, 그래프의 시각적인 정보만을 보고 예측하는 오류를 범하였다. 오직 12%의 학생들만이 점  $(-\frac{1}{4}, 1.25)$ 이 주어진 그래프 위의 점이라는 것을 확인하였으며, 2%의 학생들은 답을 하지 않았고, 6%의 학생들은

그래프의 정보를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 번역할 때 옳게 행하지 못하여 오류를 범하였다.

다음으로, 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류는 일차함수의 관계식을 대수적으로 해석하여 일차방정식으로의 전환을 제대로 행하지 못하거나 점을 대입하여 일차방정식으로 변환하여 연산할 때 계산 실수를 저지르는 오류를 말한다. 사전 검사 결과, P2 문제를 풀 때, 일부 학생들은 그래프 위의 점이라는 의미가 함수식에 그 점의 좌표를 대입하면 등식이 성립한다는 것을 이해하지 못하여  $y$ 절편  $k$ 를 구하지 못함으로써 그래프 상의 다른 점을 예측할 수 없었다. 또한, 몇몇 학생들은 그 관계를 이해했지만 일차함수식에 점의 좌표를 대입하여 일차방정식을 풀 때 연산 실수를 저질렀다.

둘째, 번역과제의 오류는 표현 번역에서 나타나는 오류로, 그래프적 표현에서 기호적 표현으로 번역할 때와 기호적 표현에서 그래프적 표현으로 번역할 때 오류가 주로 발생하며, 또한 기호적 표현과 언어적 표현 사이의 번역에서 그리고 그래프적 표현과 언어적 표현 사이의 번역을 할 때도 오류가 발생하였다. 학생들은 3번 문제를 풀 때 주어진 식에 수를 대입하여 함수값을 구하면서도  $y$ 라는 문자가 주어지지 않았기 때문에 함수식으로 표현을 하지 못하였다. 그리고 표에 주어진 대수식으로 함수값을 구하거나, 기호적 표현으로 주어진 함수식을 이용하여 평행이동한 양의 값을 구하면서도 일차함수가 평행하다는 그래프적 개념으로 번역하지 못하였다. 다만, 그래프로 그려보도록 안내하는 문제를 풀어본 후, 두 대수식이 의미하는 바가 서로 평행인 일차함수를 의미한다는 것을 인식하였다. 주어진 그래프 표현과 기호적 표현사이의 관계를 알고 상호적으로 번역하도록 학생들에게 특정값을 제시하지 않고 그래

프 개형으로 판단하도록 요구하자, 일부 학생들은 기호적 표현에서 기울기,  $y$ 절편,  $x$ 절편 등의 개념 해석을 옳게 하고 있음에도 불구하고, 그라프 상에서는 제대로 표현하지 못하는 오류를 저질렀다.

셋째, 해석과제에서 나타난 오류는 두 가지 유형으로 분류된다. 먼저, 표에 주어진 변수 관계를 해석할 때 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류인 변수 관계의 해석 오류가 발생하였다. 특히, 학생들은 3번 문제를 풀 때 주어진 식에 수를 대입하여 함수값을 구하면서도 독립변수  $x$ 와 종속변수  $y$ 의 관계로 해석하지 못하였다. 둘째는 표현 간 번역에서 관계 해석의 오류로, 표현 간 번역을 할 때 그 내포된 관계인 기울기,  $x$  절편,  $y$  절편, 평행이동, 연립 방정식의 해와 두 일차함수의 교점의 관계 등을 잘못 해석하여 발생하는 오류와 일차방정식과 같은 대수식 형태의 함수식을 등식의 성질 개념을 활용하여 변형할 때 범하는 연산 오류<sup>9)</sup>, 기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류가 이에 해당된다.

넷째, 척도과제에서 나타나는 오류는 척도 변화 인식의 오류로 주어진 그래프에서 시각적인 직선의 기울기에만 의존하여 척도를 고려한 기울기를 계산하지 않아서 발생한 오류이다. 대부분의 학생들은 모눈 칸에 주어진 단위거리를 인식하지 않고 기울기의 경사가 가파르면 빠른 것으로 생각하는 오류를 범하였고, 소수의 학생들은 기울기를  $x$ 의 증가량과  $y$ 의 증가량으로 해석하지 못하는 오류를 범하였다.

마지막으로, 질적 함수의 해석에서 나타난 오류 유형은 문맥 해석 오류와 표현 전환 오류

가 있다. 문맥 해석 오류는 주어진 문제의 맥락을 해석하여 그 안의 숨은 수학적 관계나 관련된 표현을 선택하여 서로 연결하여 해석할 때 오류를 저지르는 것을 의미한다. 예를 들어 학생들은 그릇의 용기의 단면적이 작을수록 수면의 높이가 빠르게 올라간다는 것을 기울기와 관련시켜 해석하는 것을 어려워하였다. 표현 전환 오류는 해석한 문맥의 그라프 표현으로의 전환 오류와 해석한 문맥의 기호적 표현으로의 전환 오류로 분류될 수 있다. 물통과 물의 높이에서 내포된 관계를 옳게 해석하였음에도 불구하고 해석한 문맥을 그라프 표현으로 잘못 전환하여 발생하는 오류는 해석한 문맥의 그라프 표현으로의 전환 오류의 예이며, 해석한 문맥에 특정한 수치를 주고 이를 대수적인 식과 같은 기호적 표현으로 변환하여 기울기 등으로 계산하도록 할 때 연산실수로 발생하는 오류는 해석한 문맥의 기호적 표현으로의 전환 오류이다.

이상의 오류 유형을 범주화하여 정리하면 <표 III-2>와 같다.

#### IV. 연구 결과

본 장에서는 앞서 분석한 오류 범주를 경험적 구조주의에서 살펴본 6가지 자발적 정신용량과 그 특성을 기준으로 재분류하려고 한다.

양적-관계적 정신용량 중 차원-방향 구성 및 조정 능력의 오류로 발생하는 오류로는 예측 과제 중 그라프의 시각적인 정보 읽기에만 의존하는 오류와 척도 과제 중 시각적인 직선의 기울기에만 의존한 오류, 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류 중 연산 실수의 오류가 있다. 그라프의 시각적인 정보 읽기에만 의

9) 함수식에서의 동치변형의 오류로 명명한다.

존하는 오류와 시각적인 직선의 기울기에만 의존한 오류는 양적-관계적 정신용량 중 차원-방향 구성 및 조정 능력의 오류로 발생하는 것으로 분석된다. 그래프의 특성과 정보를 양적 상세화 능력에 의해 서술하고 이를 차원-방향 구성 능력에 의해 기하 척도로 구성한 뒤 그래프 관련 개념 중 공변 요인을 차원-방향 조정 능력에 의해 상호 관련시켜 처리해야 하는데 이 과정에서 관련 정보를 인출하여 구성하고 조정하지 못하고 양적 특성에만 집중하여 시각적인 정보에만 의존하는 오류가 발생한 것으로 해석할 수 있다. 이와 같이, 학생이 그래프의

시각적 정보와 특성에만 의존하는 오류가 빈번하게 나타나고 교정이 어려운 이유는 영역-특수성의 원리, 형식-질차적 특수성의 원리, 상징적 편향의 원리에 의해 학생들 나름대로의 연역적, 논리적 추론을 확고하게 보이기 때문이다. 또한 연산 실수의 오류는 양적 상세화와 표현의 능력이 적용되는데, 이 과정에서 연산을 하기 위한 성질들을 산술체계와 측정체계의 용어로 특수화하고 부호화하여 서술할 때 오류를 범하게 되어 나타나는 것으로 해석할 수 있다. 질적-분석적 정신용량과 언어적-명제적 정신용량이 발달적 변화의 원리에 의해 발생하는

<표 III-2> 오류 유형 분류<sup>10)</sup>

오류 유형			합계(200명)
예측 과제	그래프 정보의 해석 오류	그래프의 시각적인 정보 읽기에만 의존하는 오류	84%(168명)
		그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옮겨 번역하지 못하여 발생한 오류	6%(12명)
변역 과제	일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류	일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류	51%(102명)
		연산 실수로 인한 오류	16%(32명)
표현 간 번역의 오류	기호적 표현과 기호적 표현의 번역 오류	기호적 표현→그래프적 표현 번역에서의 오류	81%(162명)
		그래프적 표현→기호적 표현 번역에서의 오류	67%(134명)
	기호적 표현과 언어적 표현의 번역 오류	기호적 표현과 언어적 표현의 번역 오류	56%(112명)
		그래프 표현과 언어적 표현의 번역 오류	53%(106명)
해석 과제	변수 관계의 해석 오류	표에 주어진 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류	49%(98명)
	표현 간 번역에서 관계 해석의 오류	표현 간 번역을 할 때, 내포된 관계의 해석 오류 함수식의 동치변형에서의 연산 오류 기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류	73%(146명) 23%(46명) 68%(136명)
척도 과제	척도변화 인식의 오류	시각적인 직선의 기울기에만 의존한 오류 기울기 개념의 해석 오류	86%(172명) 13%(26명)
질적 함수 해석 오류	문맥 해석 오류	주어진 문체의 맥락 해석의 오류	85%(170명)
	표현 전환 오류	해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류 해석한 문맥의 기호적(대수적) 표현으로의 전환 오류	12%(24명) 85%(170명)

10) 기호적 표현과 그래프적 표현은 양방향을 구분하고 기호적 표현과 언어적 표현, 그래프적 표현과 언어적 표현은 양방향을 구분하지 않은 것은 검사문항의 형식이 서로 다르기 때문이다. 기호적 표현과 그래프적 표현은 한 문항이 하나의 번역방향을 묻도록 제작된 문항으로 검사하였고, 그래프적 표현과 언어적 표현, 기호적 표현과 언어적 표현간 번역을 묻는 문항은 짹짓기 형식의 문항으로 검사하였다.

오류에는 예측 과제의 그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옮겨 번역하지 못하여 발생한 오류와 질적 함수의 해석 오류 중 주어진 문제의 맥락 해석의 오류가 있다. 그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옮겨 번역하지 못하여 발생한 오류는 그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옮겨 번역하지 못하여 발생한 오류는 질적·분석적 정신용량에 의해 주어진 맥락으로부터 일련의 성질을 분리·도출하고 이를 정확하게 부호화하여 효과적으로 작동시켜야 하는 과정에서 오류가 발생한 것으로 볼 수 있다. 즉, 함수식으로 옮겨 번역하지 못하는 오류는 문제의 맥락으로부터 성질을 도출해야 하는데 함수식이라는 개념을 도출하지 못하여 오류가 발생한다. 그리고 함수식을 도출할 수 있다하더라도 이를 인지구조 내에 부호화하고 효과적으로 작동하도록 언어적·명제적 정신용량에 의해 학습자가 인식한 문맥·의미론적 추론에 의해 관련된 동일 개념을 매번 로드해야 하는데 문맥과 의미를 잘못 연결하여 문제를 풀 때마다 잘못 로드하여 오류를 범하는 것으로 해석할 수 있다. 주어진 문제의 맥락 해석 오류는 질적·분석적 정신용량에 의해 맥락으로부터 일련의 성질을 도출하고 그 정보의 차원적 구조가 수직적인지, 수평적인지, 연속적인지를 판단해야 하는데 이 때 질적인 성질을 잘못 적용하여 오류가 발생한다. 또한, 이 때 인식주체인 학습자의 언어와 형식적 추론, 변증법적 논리 등과 같이 정보의 의미를 논리적으로 다루게 된다. 이처럼 학생들이 언어적·명제적 정신용량을 적용할 때 형식적 관계와 문맥의 의미론적 관계를 제한적으로 해석함으로써 문맥 해석의 오류가 발생하는 것으로 분석할 수 있다.

심상적·공간적 정신 용량과 관련된 오류로는

번역 과제의 그래프 표현과 기호적 표현들이 상호 관련될 때 나타나는 오류가 해당된다. 이러한 오류는 심상적·공간적 정신용량 중 개조와 변형 능력에 의해 문제해결에 적합하도록 필요한 표현 스키마들을 변화에 적합하게 재배열하고 엮어내는 것과 관련된다. 그러나 학생 나름대로 선호하는 기호적 표현, 그래프적 표현 스키마를 인출한 뒤 이를 다른 표현으로 잘못 개조하고 변형하여 오류가 발생하는 것이다. 또는 참조적 조절에 의해 각 표현 관계를 보다 확장된 표현이 연합된 구조로 변형하거나 표현들을 동시에 하나 이상 행할 수 있어야 하는데 이를 잘못 수행하여 오류가 발생할 수 있다.

인과적 실험적 정신용량과 관련된 오류로는 예측 과제 중 일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류, 해석 과제의 변수 관계의 해석 오류와 표현 간 번역에서 관계 해석의 오류, 일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류, 척도 과제 중 기울기 개념의 해석 오류가 있다. 표현 간 번역에서 관계 해석의 오류 중 내포된 관계 해석의 오류, 표에 주어진 독립 변수와 종속 변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류는 각각의 표현과 관련된 스키마를 심적 스크린에 투영할 수 있는데 표현 간 번역을 할 수는 있지만 내포된 관계를 잘못 해석하여 연결을 하는 경우는 각각의 표현 스키마를 보다 넓은 공존 구조에서 연결시켜 정의하기 위한 방법적인 측면의 사고가 부족하기 때문에 오류가 발생할 수 있고, 이러한 인과적 연결들에 대하여 예측을 옳지 않게 행하고 이를 직접 자신의 인지 구조에서 실험해 볼 때 공존 변인을 찾을 수 없기 때문에 오류가 발생할 수도 있다. 이러한 학생들의 경우는 공존 구조의 표현 스키마들 간의 가능한 조합을 모두 생산하고 이를 조합하는 인과적·실험적 용량 중 조합 능

력이 부족하거나, 자료 패턴에 기초하여 함수 표현에 내포된 관계들을 서로 인과적으로 연결해보려고 하는 예측과 이를 직접 실험하여 공존변인을 추론해보는 가설 형성 능력과 실험 능력의 부족으로 인하여 오류가 발생하는 것으로 해석할 수 있다.

일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류, 척도 과제 중 기울기 개념의 해석 오류, 함수식의 동치변형에서의 연산 오류, 기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류는 일차함수와 일차방정식이 서로 공존하는 인지구조에서 일차함수식과 대수식의 상호 대응관계, 기울기 개념과 계수, 또는 그래프 상의 기울기와 대수식과 그 의미를 연결시켜 구체화 해볼 때 다른 대상들의 스키마와 공존 변인을 적용해보는 실험적 능력이 부족하고, 두 종류의 관계를 표현할 수 있는 상대적으로 일관성 있는 모델을 만들 때 오류를 범하기 때문이다. 즉, 여러 개념들의 스키마와 공존 변인을 찾아보려고 구체적인 시도를 하는 실험 능력과 실험의 결과를 원래의 가설과 적절하게 사상하여 수용 가능한 이론적 분석틀을 만드는 모델 구성능력이 잘못 발현되어 오류가 나타나는 것으로 해석할 수 있다. 또한 위의 표 III-15에서 볼 수 있듯이, 학생들이 함수 과제와 관련하여 가장 많이 범하는 오류들은 인과적-실험적 정신 용량의 요소 능력들과 깊은 관련이 있었다.

초인지-반성적 정신용량과 관련된 오류는 질적 함수의 해석 오류 중 해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류, 해석한 문맥의 기호적(대수적)표현으로의 전환 오류, 표현간 번역의 오류 중 기호적 표현과 언어적 표현의 번역 오류이다. 초인지-반성적 정신 용량은 다른 정신 용량들을 변형, 적용, 처리하는 것과 관련이 있다. 즉, 주어진 문제를 해결하기 위해 학습자가

언어적-명제적 정신용량에 의하여 문제 맥락을 해석하여 만들어낸 스키마와 인과적-실험적 정신 용량에 의해 표현 간 번역을 구성하여 만들어낸 스키마에 초인지-반성적 정신용량은 순서와 규칙을 부여하고 문제해결에 적합한 전략을 결정하는 것과 관련이 된다. 해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류와 해석한 문맥의 기호적(대수적)표현으로의 전환 오류는 과제-정신용량 제휴 추정자에 의해서 질적 과제를 해석하여 문맥을 파악하고 이를 언어적-명제적 정신용량과 관련시켜 보고, 과제의 문맥을 표현하는 스키마와 관련된 인과적-실험적 정신용량과 같은 여러 정신용량들과 제휴하면서 과제와 표현관련 정신용량이 문제 해결에 적합한지를 처리 부하 추정자에 의해 면밀히 검토하고 성공 추정자에 의해서 적절한 정신용량을 선택했는지를 검토할 때 발생할 수 있다.

<표 III-2>에서 분류한 오류 범주를 경험적 구조주의의 6가지 자발적 정신용량과 그 특성을 기준으로 재분류하면 <표 IV-1>과 같다.

## V. 결론 및 제언

기존의 연구들은 수학학습과정의 내용영역과 연관된 특정한 수학적 오류들을 다양하게 분류하고, 연구자마다 그 오개념에 대한 다양한 처방을 제안하고 있다. 그러나 수학적 오류가 단순한 개인적 차원의 문제가 아니라면, 수학적 오류를 체계적으로 이해하기에는 한계가 있을 수 있다. 수학 학습 과정에서 나타나는 오류의 발생 요인과 체계가 있을 것으로 가정할 때, 특수한 수학적 내용 영역에서 연구자 각자의 실험을 바탕으로 학생들의 수학적 오개념을 범주화하고 그 처방을 제안하는 종래의 연구 방식은 오류의 근원적이고 공통적인 인지적 발생

요인과 체계를 밝히기는 제한적일 수 있기 때문이다. 또한 학생들의 수학적 오류를 분류하는 기준도 특수한 수학적 내용 영역에서 연구자 각자의 실험을 바탕으로 범주화 하므로 공통된 기준이나 체계에 대한 연구도 아직까지는 부분적인 특징을 설명하는데 초점을 맞추고 있

는 단계이다. 이에, 본 연구에서는 수학학습과정에서 오류가 나타나는 공통되고 핵심적인 인지기제에 대한 좀 더 일치된 설명을 하기 위해 인지심리학적 관점에서 이를 분류하고자 하였다.

학습 과정에서 피할 수 없는 수학적 오류를 학습자의 인지체계의 변화과정에서 나타나는

<표 IV-1> 오류의 경험적 구조주의에 의한 재분류

정신용량	정신용량의 특성 (요소 능력)	재분류한 오류 범주
양적-관계적 정신용량	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 양적상세화 및 표현 능력</li> <li>· 차원-방향 구성능력</li> <li>· 차원-방향 조정능력</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 예측과제에서 그래프의 시각적인 정보 읽기에만 의존하는 오류</li> <li>· 예측과제에서 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류 중 연산 실수의 오류</li> <li>· 척도과제에서 시각적인 직선의 기울기에만 의존한 오류,</li> </ul>
질적-분석적 정신용량	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 성질들의 질적 구조 분석</li> <li>· 성질들에 개인 없이 하나 이상의 기준에 따른 재구성 능력</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 예측과제의 그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옳게 번역하지 못하여 발생한 오류</li> <li>· 질적 함수의 해석오류 중 주어진 문제의 맥락 해석의 오류</li> </ul>
심상적-공간적 정신용량	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 세목가감, 통합능력</li> <li>· 개조와 변형능력</li> <li>· 회전능력</li> <li>· 참조적 조정능력</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 번역 과제</li> <li>· 그래프적 표현과 기호적 표현의 번역 오류</li> <li>· 그래프 표현과 언어적 표현의 번역 오류</li> </ul>
인과적-실험적 정신용량	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 이분법적 조합 능력</li> <li>· 가설형성능력</li> <li>· 가설실험능력</li> <li>· 모델구성능력</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 예측과제에서 일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류</li> <li>· 척도과제의 척도변화인식의 오류 중 기울기 개념의 해석 오류</li> <li>- 해석과제</li> <li>· 변수관계의 해석 오류: 표에 주어진 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류</li> <li>· 표현 간 번역에서 관계해석의 오류: 표현 간 번역을 할 때, 내포된 관계의 해석 오류</li> <li>· 함수식의 동치변형에서의 연산 오류</li> <li>· 기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류</li> </ul>
언어적-명제적 정신용량	처리된 주장과 관련이 없는 의미론적 네트워크의 선택적 표현 및 관련된 의미론적 원소들의 조합 능력	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 예측과제의 그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옳게 번역하지 못하여 발생한 오류</li> <li>· 질적 함수의 해석오류 중 주어진 문제의 맥락 해석의 오류</li> </ul>
초인지적- 반성적 정신용량	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 면식 능력</li> <li>· 과제-정신용량 제휴 능력</li> <li>· 처리 부하 추정자 능력</li> <li>· 성공 추정자 능력</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 질적 함수의 해석 오류 중 표현 전환 오류: 해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류, 해석한 문맥의 기호적(대수적) 표현으로의 전환 오류</li> </ul>

수학적 오개념의 결과로서 실제적인 수행과정에서 발생하며 이를 수행 변화와 관련 있는 정신용량으로 설명할 수 있다면, 특히 다양한 과제에 따라 여러 유형으로 발생하는 수학적 오류를 분류할 수 있는 공통적인 기준도 학습자의 인지체계와 정신용량을 관련하여 설명할 수 있을 것으로 가정하였다. 구체적으로, 본 연구에서는 Demetriou et al.(1987, 1993)의 경험적 구조주의를 바탕으로 하여 수학적 오류의 분류기준을 제안하고 일차함수 활용 단원에서 중학생들의 오류 분류에 대한 사례연구를 실시하였다. 그 결과, 수학적 오류는 경험적 구조주의의 세분화된 인지체계의 기능적인 6개의 자발적 정신용량과 관련하여 설명하고 분류할 수 있었다. 오류 분류 기준은 <표 II-1>의 6가지 자발적 정신용량과 그 양식적 특성으로 정리될 수 있다. 그리고 일차함수를 학습한 중학교 2학년 학생들을 대상으로 함수과제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 세분화하여 각 과제별 학생들의 오류 유형을 <표 III-2>와 같이 분류한 후 경험적 구조주의에 의해 분류한 결과 <표 IV-1>의 결과를 얻었다.

인간의 사고 과정에 대한 이해가 인간 자체에 대한 이해와 더불어 인류 문화의 발달에 중요한 요인임을 고려한다면, 수학적 오류는 교사와 수학교육 연구자들이 구체적으로 잘못된 학생들의 이해를 분석·교정하는 것은 물론 학생들의 수학 학습과정에 대한 이해를 할 수 있도록 돋는 풍부한 정보원이라는 인식은 교육적인 관심에서 중요한 문제이다.

본 연구의 결과는 학생들이 수학 학습에서 보여줄 수 있는 오류에 대한 깊이 있고 일관성 있는 정보를 교사에게 제공할 수 있는 가능성을 보여주었다. 즉, 수학적 오류를 인지구조의 수행 변화와 관련 있는 정신용량으로 설명할 수 있다면, 다양한 과제에 따라 여러 유형으로

발생하는 수학적 오류를 분류할 수 있는 공통적인 기준도 학습자의 인지체계와 정신용량을 관련하여 설명할 수 있다고 볼 수 있다. 이는 학습을 인지구조의 변화를 추구하는 것으로 볼 때, 학생의 인지구조를 발달시키고 변화할 수 있도록 지식 또는 개념뿐만 아니라 그것을 조직하는 과정적 지식까지도 포함하는 인지구조의 변화를 추구할 수 있도록 돋는 토대를 제공한다는 점에서 의의가 있다. 학생들이 수학 학습에서 보여줄 수 있는 오개념과 오류에 대한 깊이 있고 일관성 있는 정보를 교사에게 제공함으로써, 학생들 스스로가 지식구축활동(knowledge construction activity)을 행할 때 교사는 인지심리학적 오류 분류 기준에 근거하여 보다 균원적인 처방이 가능한 학습전략 즉, 수학적 오류에 대한 인지갈등의 효과를 매개하는 학습전략을 구성·활용할 수 있다. 이 때, 지식구축 활동은 구성주의적 입장에서 학생 스스로가 갈등학습을 하면서 개념을 능동적으로 구성하는 활동이다(Chan et al., 1997)

본 연구에서 인지심리학적 관점에서 제안한 학생들의 오류에 대한 인지적 분류기준이 실제에의 적용가능성을 분석하기 위해 실시한 사례 연구는 특정 지역의 중학생들을 대상으로 특정 수학내용인 일차함수 단원에서의 학습과정에만 초점을 맞추었기 때문에 제한적이었다. 따라서 후속 연구로서 여러 학년과 함수, 기하, 방정식 등의 다양한 수학내용 영역과 학습상황에서 학생들의 문제해결과정에서 나타나는 수학적 오류에 대한 경험적 구조주의의 기준을 적용하여 체계적으로 정리해야 할 것이다. 또한, 본 논문에서는 수학적 오류에 대한 인지심리학적 분류를 토대로 실제 수업에 교수학적 도움을 줄 수 있는 학습활동과 그 지도 방안에 대한 연구를 하여 현장의 수업개선에 도움을 주어야 할 것이다.

## 참고문헌

- 신현정(2000). *개념과 범주화*. 서울: 아카넷.
- Abrams, J. P. (2001). Teaching mathematical modelling and the skills of representation. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 269–282). Reston, V.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ashlock, R. B. (2002). *Error patterns in computation: using patterns to Improve instruction, 8th*, Merrill Prentice Hall.
- Carraher, D., & Earnest, D. (2003). Guess my rule revisited. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 2, 173–180.
- Chan, C., Burtis, J., & Bereiter, C. (1997). Knowledge building as a mediator of conflict in conceptual change. *Cognition and Instruction* 15(1), 1–40.
- Chazan, D. (1993).  $F(x)=G(x)$ ? An approach to modelling with algebra. *For the Learning of Mathematics* 13(3), 22–26.
- Demetriou, A., & Efklides, A. (1987). Experiential structuralism and neo-piagetian theories: toward an integrated model. *International Journal of Psychology*, 22, 679–728.
- (1994). Structure, development, and dynamics of mind: a meta-piagetian theory. In A. Demetriou & A. Efklides (Eds.), *Intelligence, mind, and reasoning: structure and development* (pp. 75–109). Amsterdam: North-Holland.
- Demetriou, A., Efklides, A., & Platsidou, M. (1993). The Architecture and dynamics of experiential structuralism as a frame for unifying cognitive developmental theories. *Monographs of the society for research in child development serial No. 234*, 58(5–6). Boston: Blackwell Publishing.
- Demetriou, A., & Raftopoulos, A. (1999). Modeling the developing mind: from structure to change. *Developmental Review*, 19, 319–368.
- Doerr, H. M., & Tripp, J. S. (1999). understanding how students develop mathematical models. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(3), 231–254.
- Dunham, P. H., & Osborne, A. (1991). Learning how to see: students' graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 13(4), 35–49.
- Efklides, A., Papadaki, M., Papantoniou, G., & Kiosseoglou, G. (1997). Effects of cognitive ability and affect on school mathematics performance and feelings of difficulty. *The American Journal of Psychology*, 110(2), 225–258.
- Enright, B., Gable, R., & Hendrickson, J. (1988). How do students get answers like these? nine steps in diagnosing computation errors. *Diagnostique*, 13, 55–63.
- Fischbein, E. (1997). The evolution with age of probabilistic intuitively based misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96–105.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of repre-*

- sentation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, V.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Keil, F. C. (1984). Mechanism in cognitive development and the structure of knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Mechanisms in cognitive development*. New York: Freeman.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.
- Movshovitz-Hadar, N. & Zaslavsky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- Pascual-Leone, J. (1987). Organismic processes for neo-piagetian theoris: dialectical casual account of cognitive development. *International Journal of Psychology* 22, 531-570.
- Pascual-Leone, J., & Johnson, J. (1999). A dialectical constructivist view of representation: role of mental attention, executives, and symbols. In I. Sigel (Ed.), *Development of mental representation: theories and application* (pp. 169-200). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Pinchback, C. L. (1991) Types of errors exhibited in a remedial mathematics course. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(2), 53-62.
- Presmeg, N. (2002). Shifts in meaning during transition. In G. Abreu, A. J. Bishop, N. C. Presmeg (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practices*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* 10, 163-172.
- Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual basis of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 8-27.
- Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade pupils. *Arithmetic Teacher*, 15, 442-446.
- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.

# Cognitive Psychological Approaches for Classification of Students' Mathematical Errors on the basis of Experiential Structuralism

Kim, Bu mi (Ewha Womans University, Graduate School)

This article presents new perspectives for classification of students' mathematical errors on the basis of experiential structuralism. Experiential structuralism's mechanism gives us new insights on mathematical errors. The hard core of mechanism is consist of 6 autonomous capacity spheres that are responsible for the representation and processing of different reality domains. There are specific forces that are responsible for this organization of mind. There are ex-

pressed in terms of a set of five organizational principles. Classification of mathematical errors is ascribed by the theory to the interaction between the 6 autonomous capacity spheres. Different types of classification require different autonomous capacity spheres. We can classify mathematical errors in the domain of linear function problem solving comparing cognitive psychological mechanism of experiential structuralism.

\* **Key words** : mathematical errors(수학적 오류), experiential structuralism(경험적 구조 주의), classification of mathematical errors(수학적 오류 분류)

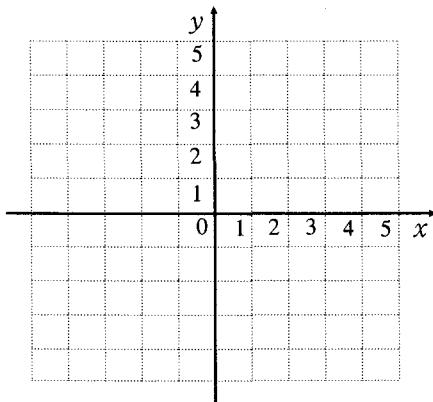
논문접수 : 2005. 9. 30

심사완료 : 2005. 11. 1

<부 록>

1. 오류 검사 문항지(사후검사지)

1. 점 (-3, -5), (2, 5), (3, 7)은 한 직선 위에 있는가? (단, 그래프, 함수식  $y=ax+b$  등 다양한 표현 방법을 이용해도 좋다.)



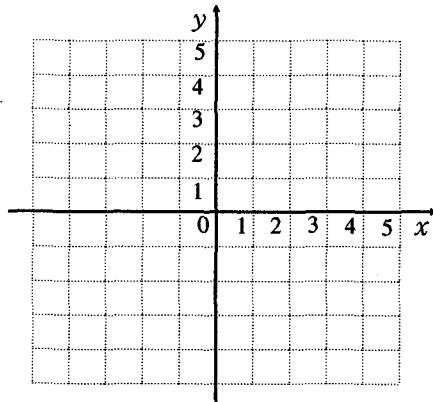
2. 점 ( $\square$ , 15)가 위 문제 1의 직선 위에 있을 때,  $\square$ 의 적당한 수를 구하여라.

3. 다음 표를 완성하고 물음에 답하여라.

x	$-x+6$	$-x+4$
14		
10		-6
8		
-4	10	0
	11	

- (1) x에 대하여 변화하는 두 경우는 서로 어떤 관계가 있는가? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가?

- (2) 각각의 그래프를 그린 후, 두 그래프 사이의 관계는 서로 어떤 관계가 있는가? 그렇게 생각한 이유를 써라.



- (3)  $y = -x$ 의 그래프에 평행하고  $(-4, 10)$ 을 지나는 일차함수를 구하여라(단, 풀이과정도 서술하시오).

- (4) 다음의 문장을 완성하고 그렇게 답한 이유를 쓰세요.

$y = -x + 6$ 의 그래프를  $y$ 축의 ( 양, 음 )의 방향으로 □만큼 평행이동한 그래프는  $(10, -6)$ 을 지난다.

이유:

4. 일차함수  $y = 6x - 5$ 에서  $\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$ 의 값을 구하고, 그렇게 답한 이유를 써라.

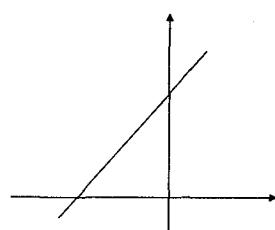
5. 다음의 방정식 중 어느 것이 주어진 직선의 그래프를 나타낼 수 있는 방정식인가? 정답을 골라 ( )에 표시하고 선택한 이유를 써라.

①  $y = x + 5$  ( )

선택 이유:

②  $y = 2x - 4$  ( )

선택 이유:



③  $y = -2x + 3$  ( )

선택 이유:

④  $y = -3x - 5$  ( )

선택 이유:

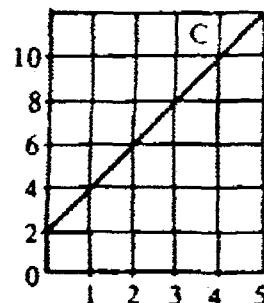
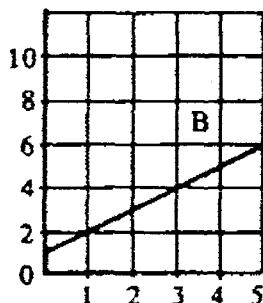
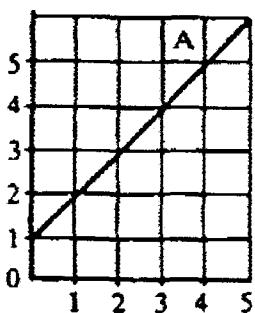
⑤ 위의 방정식 중 어느 것도 주어진 직선의 방정식이 아니다.

왜냐하면, \_\_\_\_\_

6. 다음 두 직선의 방정식  $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ -3x + y = 6 \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라. 그리고 그 이유를 써라.

	예	아니오	이유
(1) 두 직선은 평행한가?			
(2) 두 직선은 같은 y 절편을 가지는가?			
(3) 두 직선은 같은 x 절편을 가지는가?			

7. 다음 그래프의 기울기는 속력을 나타낸다. 두 그래프에서 어느 기차의 속력이 빠른가?

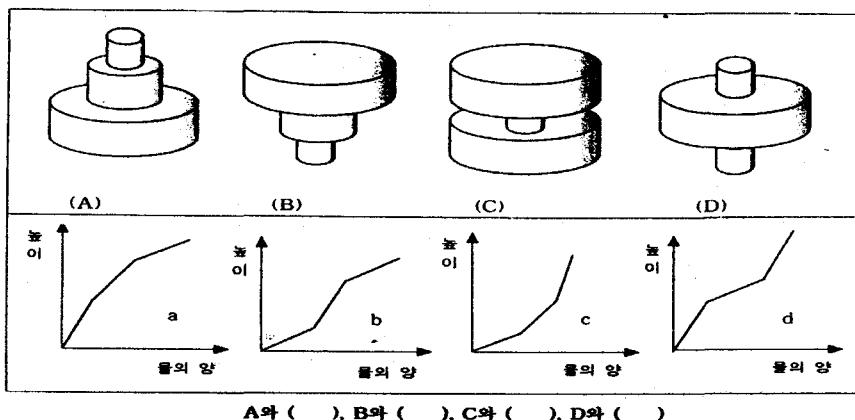


답:

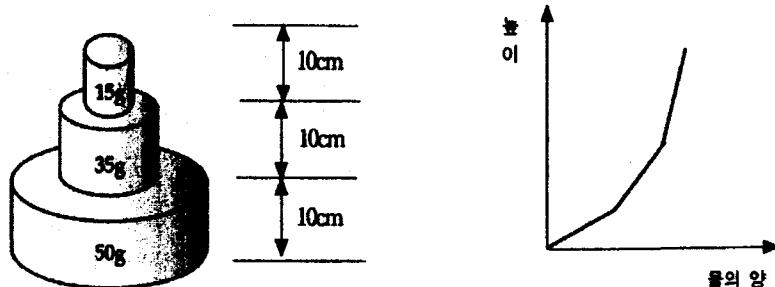
이유:

8. 아래 그림은 모두 100g의 물을 담을 수 있는 물통이다. 일정한 속도를 유지하면서 각각 크기가 다른 네 물통에 호스로 물을 넣을 때, 네 개의 물통에 채워지는 물의 높이와 물의 양 사이의 그래프를 서로 짹지어라.

(1)



(2) 다음은 물통 A의 각 부분의 높이와 각 부분에 들어갈 수 있는 물의 양, 그리고 이 물통과 연결된 그래프를 나타낸 것이다. 물통의 아랫부분, 중간 부분, 윗 부분에 해당하는 그래프의 함수식을 구하여라.



(1) 아랫부분:

(2) 중간부분:

(3) 윗부분: