大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 15 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.4, 375-399. Nov 2005

분수 개념과 알고리듬 지도 양상 비교: McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로[1)]

강 흥 규*

이 논문에서는 세 종류의 초등 수학 교재—McLellan, MiC, 한국의 교재—의 분수 영역을 비교하여 여러 공통점과 차이점을 변별한 다음, 그들을 각 교재가 기초하고 있는 보다 일반적인 교수학에 비추어 평가하였다. McLellan의 교재(1902)는 Dewey의 경험주의 수학교육론을, MiC 교재(1997)는 Freudenthal의 현실주의 수학교육론을 기초로 삼고 있다.

연구를 통하여 도달한 결론은 세 교재 모두 분수의 현상학적 전모를 반영하지 못하고 있다는 사실이다. McLellan의 교재는 추상성이 높은 측정수 모델만을 배타적으로 채용한 결과 낮은 수준의 맥락을 도외시하게 되었고, MiC 교재는 낮은 수준의 현실맥락을 지나치게 중시한 결과 유리수에 근접한 높은 수준의 모델과 그 속에서의 형식화를 도외시하게 되었으며, 한국의 교재는 알고리듬의 형식화와 적용 연습에 치우친 나머지 개념과 그것이 구현된 현실맥락을 소홀히 하고 있다.

이 논문의 세 교재에 대한 시각은 어느 하나가 다른 하나보다 우월하다거나 열등하다는 이분법이 아니라 통합적이고 상보적인 관점이었다. 차후에 개발되는 교재는 위의 세 교재의 장점을 모두 취하여 분수라는 단일체의 현상학적 전모를 드러낼 수 있어야 한다고 판단된다.

Ⅰ. 서 론

이 논문에서는 서로 대비되는 세 종류의 초등 수학 교재의 분수 영역을 분석·비교하여 각각의 교재에서 분수 개념과 알고리듬을 어떻게 다루고 있는지 고찰하였다. 세 종류의 교재는 Dewey의 이론을 따른 McLellan과 Ames의 교재, Freudenthal의 이론에 따른 MiC[2)] 교재, 그리고 한국의 제 7차 초등 수학 교과서이다.[3)] 이 세 교재를 분석·비교의 대상으로 선택한 이유는, 첫째 각 교재가 내세우고 있는 분수의 교수학이 뚜렷한 정체성을 가지고 서로 명확히 구별되기 때문이며, 둘째 각 교재의 분수의 교수학은 그 교재의 바탕을 이루는 일반적인 수학교육 이론과 밀접하게 연결되어 있다는 것, 다시 말해서 각 교재의 배경 이론의 특성이 분수라는 영역에 잘 투영되어 있다는 것 때문이다.

세 교재를 분석·비교하기 위한 관점은 두 방향에서 만들어졌다. 하나는 분수 내적인 차원의 관점으로서 분수가 가지는 다양한 개념과 알고리듬 그리고 그것이 구현된 모델은 무엇인가 하는 것이다. 다른 하나는 일반적인 차원의

* 공주교육대학교, unitolpes@hanmail.net
1) 이 논문은 공주교육대학교 2005 교수학술 연구과제 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) Mathematics in Context.
3) 이후부터는 각 교재를 간편하게 'McLellan의 교재', 'MiC 교재', '한국의 교재'로 부르겠다.

관점으로서 추상적인 개념과 알고리듬을 효과적으로 가르치기 위한 교수학적 원리는 무엇인가 하는 것이다.

이 논문에서 숙고한 질문은 다음과 같다. "분수 개념은 무엇인가?" "분수 모델은 무엇인가?" "분수 개념과 알고리듬을 이해시키기 위하여 어떤 모델을 사용하는가?" "구체적인 모델에서 추상적인 분수 개념으로 이행하기 위하여 어떤 방법을 사용하는가?"

이 논문의 목적은 분수의 개념과 알고리듬의 지도 방법에 있어서 세 교재의 공통점과 차이점을 명료하게 드러낸 다음, 그것을 각 교재가 터하고 있는 보다 일반적인 분수의 교수학에 비추어 이해하고, 그 결과를 종합하여 세 교재를 모두 조망할 수 있는 통합적 관점을 구축하는 것이다. 흔히 비교한다는 말의 의미는 어느 하나가 다른 하나보다 우월하거나 열등하다는 판단을 내리는 것으로 이해되기도 하지만, 이 논문에서는 그렇지 않으며, 대신 둘 사이의 차이점을 변별하여 상보적으로 종합하는 것을 지칭하였다.

II. 분수의 개념과 알고리듬 및 모델

이 장에서는 각 교재에 대한 분수 내적인 관점을 준비한다.[4] 흔히 분수는 여러 의미를 갖는 것으로 여겨진다. 강지형 외(2004: 174)에 의하면 분수의 의미는 등분할의 의미, 양의 의미, 몫의 의미, 비의 의미, 연산자의 의미의 다섯 가지가 있으며, 제 7차 초등학교 교육과정 해설(교육인적자원부, 1998: 63)에 의하면 분수에는 등분할 분수, 양으로서의 분수, 비율로서의 분수, 몫으로서의 분수 등 네 가지 의미가 있다. 그러나 그들 사이에는 '의미'라는 하나의 범주로 분류되기에는 무리가 있어 보이는 성격상의 큰 차이가 있다. 예를 들어 등분할과 비를 생각해 볼 때 비는 일반 개념으로서 순수한 정신적 존재인 반면에, 등분할은 사물을 수반한 물리적 활동이다. 또한 등분할은 비 개념과 함께 작용소 개념을 함유한다. 예를 들어 종이띠를 똑같이 '세 조각으로 가른 것 가운데 한 조각'이라는 표현 속에는 세 배라는 비 개념과 함께 전체를 똑같이 가르고 그 중에 하나를 취한다는 작용소가 내재한다.[5]

따라서 이 논문에서는 기존에 분수의 의미라는 하나의 범주를 개념과 모델이라는 두 범주로 세분하고자 한다. 개념은 추상적이고 정신적인 존재이고 모델은 구체적인 물리적 활동이다. 세 교재를 분석하고 종합한 결과, 분수의 개념에 속하는 것에는 비, 작용소, 나눗셈의 세 가지가 변별되었으며, 분수의 모델에 속하는 것에는 분배, 전체-부분, 측정 활동, 비교 그리고 측정수의 다섯 가지가 추출되었다.[6] 이 장에서는 이러한 분수의 여러 개념과 모델에 대해서 상세하게 고찰하고자 한다.

1. 분수의 개념과 알고리듬

분수가 추구하는 가장 일반적이고 추상적인

---

4) 연구의 진행 순서에서만 본다면 이 장은 제 Ⅳ장 다음에 와야 하지만, 논문 구성의 편의상 앞에 배치하였다.

5) 분수에서의 등분할과 비 개념과의 관계는 자연수에서의 '세기(counting activity)'와 '기수 개념'과의 관계와 유사하다. 기수는 일반 개념으로서 순수한 정신적인 존재인 반면에 세기는 사물을 포함하는 물리적 활동이다. 또한 세기는 그 속에 기수 개념뿐만 아니라 서수 개념도 함유한다.

6) 분수의 의미라는 기존의 교수학적인 범주를 분수의 개념과 모델이라는 두 범주로 세분한 것은 필자의 주관적인 견해이다. 하지만 철학과 실제 면에서 서로 현저하게 대비되는 세 교재(McLellan, MiC, 한국)의 분수 관련 내용을 모두 망라하여 분석하고 종합한 자료에 근거하였기 때문에, 여타의 분수 교재에 대한 효과적인 분석 도구가 될 수 있을 정도의 일반성을 확보하였다고 생각된다.

존재는 말할 것도 없이 유리수이다. 유리수는 자연수의 순서쌍의 동치류의 집합으로서 자연수로부터 형식 불역의 원리를 따라서 연산이 주어지고 그것은 대수적으로 체(field)를 이룬다. 유리수에서 한 단계 구체적인 수준으로 내려오면 세 가지 분수 개념이 있다. 나눗셈, 비, 그리고 작용소가 그것이다.

가. 자연수의 나눗셈

두 자연수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$는 $a \div b$이다.

고등 수학적 관점에서 볼 때 나눗셈으로서의 분수는 자연수에서 유리수로의 수의 확장의 본질이다. 음의 정수가 뺄셈이 가능하도록 자연수를 확장한 것이듯 유리수는 나눗셈이 가능하도록 자연수를 확장한 것이기 때문이다. 초등 교육과정에서는 나눗셈 개념은 가분수를 대분수로 고치는 과정과 분수를 소수로 고치는 과정에서 사용된다.

나. 자연수의 비(ratio)

두 자연수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$는 $a:b$이다.

비라는 용어는 자연수가 아닌 대상, 예를 들어 선분이나 넓이에도 적용되지만 여기서는 순수한 자연수에만 적용되는 것으로 한다. 순수한 분수 $\frac{a}{b}$에는 어떤 양적인 개념도 개재되지 않는다. 그러나 분수가 처음부터 이러한 '순수한 두 자연수'의 비로 인식될 수는 없다. 예를 들어 '피자의 $\frac{2}{3}$'라는 표현 속에는 $2:3$보다는 전체를 똑같은 여러 조각으로 나누는 작용(operation)이 더 현저하기 때문이다.

흔히 비 개념은 두 자연수 사이의 배(倍) 관계[7]와 동일시되기도 하지만, 엄밀하게 말한다면 그 관계의 확장이다. 배 개념이 자연수의 곱셈과 나눗셈에 대응하는 것이라면 비는 유리수에 대응한다. 따라서 비 개념은 배 개념보다 훨씬 풍부한 수학적 구조를 가진다.[8] 그러나 초등수준에서는 양자를 동일시해도 무방하다고 판단되어 이 논문에서는 비 개념을 두 자연수 사이의 배 개념으로 볼 것이다.

다. 작용소(operator)

두 자연수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$는 어떤 대상을 동등하게 b 조각으로 가르고 그 가운데 a 조각을 취하는 조작(operation)이다. 가르는 것은 '분석 조작'이고 취하는 것은 '종합 조작'이다.

작용소 개념은 두 양 사이의 상대적인 역관계에서 명시적으로 드러난다. 예를 들면 "두 선분 A, B에 대하여 A가 B의 $\frac{2}{3}$이면 B는 A의 $\frac{3}{2}$이다"와 같은 표현이 그것이다. 이러한 역관계는 Freudenthal이 강조했던 비교 모델이나 Dewey가 강조했던 측정수 모델에서 나타난다. 한국의 제7차 교육과정에서 말하는 '등분할로서의 분수의 의미'에도 작용소 개념이 내포되어 있다.

Freudenthal은 분수 개념으로서의 작용소를 분할 작용소(fracturer operator), 비 작용소(ratio operator), 분수 작용소(fraction operator)의 세 가지로 구분한다. 구분의 기준은 작용소가 작용하는 매체가 어느 정도 구체적인가하는 것이다. 분할 작용소는 사물에 구체적으로 작용하며 그 때에 사물의 양적인 성격은 분할의 균등성을 판정하는 기준이고, 비 작용소는 사물이 아니라 양에 직접 작용하며, 분수 작용소는 순수한 수에 작용한다.

---

7) 곱절 관계, 승법적 관계 등 여러 용어가 사용된다.

8) Freudenthal(1983: 157)에 의하면 배 개념을 수학적으로 정확히 정의하면 '반군(semigroup)'이 되고 이 반군을 대수적으로 확장하여 얻은 '군(group)'이 바로 엄밀한 의미에서의 비이다.

이상으로 분수의 세 가지 개념에 대해서 살펴보았다. 다음에는 분수의 알고리듬을 간략히 고찰한다. 분수의 사칙계산은 매우 명료한 알고리듬을 갖고 있으며 다음과 같이 형식적으로 표현될 수 있다.

두 자연수 a, b에 대하여

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}.$$

두 자연수 a, b에 대하여

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}.$$

두 자연수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}.$

두 자연수 a, b에 대하여

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}.$$

물론 초등 수학 단계에서 이런 분수 개념이나 알고리듬을 위에서 제시한 것처럼 형식적이고 직접적으로 다루지는 않으며 한 단계 더 구체화시키고 특수화시켜서 다룬다. 이처럼 개념이나 알고리듬보다 덜 일반적이면서 개념이나 알고리듬에 도달하기 위한 수단으로 사용되는 것을 이 논문에서는 '분수 모델'이라고 부를 것이다. 분수 교수의 목표는 이러한 구체적이고 물리적인 모델을 사용하여 아동으로 하여금 추상적이고 정신적인 개념과 알고리듬에 도달하도록 하는 것이다. 분수 모델이 분수 개념보다는 일반성의 정도가 낮은 것은 사실이지만, 그렇다고 해서 전적으로 개별물인 것은 아니다. 그들 또한 어느 정도는 일반적인 것이며 따라서 개념과 개별물 사이의 중간 지점에 위치한다고 볼 수 있다.

2. 분수의 모델

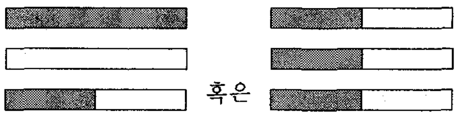
세 교재를 분석·비교한 결과 분수 모델은 분배 모델, 전체-부분 모델, 측정 활동 모델, 비교 모델 그리고 측정수 모델의 다섯 종류로 변별되었다. 이 절에서는 각 모델의 특성에 대해서 고찰한다.

가. 분배 모델

분배는 똑같은 n개의 사물을 m명의 사람에게 공평하게 나누어 주는 것이다.

예를 들면 피자 n판을 m명의 사람에게 공평하게 나누어줄 때 한사람이 받는 피자의 크기를 $\frac{n}{m}$으로 나타낸다. 이 모델은 자연수의 나눗셈의 등분제 해석의 확장이다. 예를 들어 "병아리 6마리를 2사람에게 똑같이 나누어주면 한 사람당 몇 마리씩 받는가"와 같은 자연수의 등분제 문제는 자연수의 나눗셈 $6\div2=3$ 으로 해결된다. 만약 이 문제가 "피자 6판을 4사람에게 똑같이 나누어 주면 한 사람이 얼마의 피자를 받는가"와 같은 보다 일반적인 문제로 바뀐다면, 자연수로는 해결이 불가능하게 되고, 따라서 분수를 반드시 필요로 하는 분배모델이 된다.[9)]

이 모델은 선분, 원, 정사각형 등과 같이 서로 합동인 여러 개의 도형을 통해서 시각화될 수 있다. $\frac{3}{2}$를 예로 들면 다음과 같다.



[그림 II-1]

9) 자연수의 나눗셈의 등분제 해석과는 달리 포함제 해석은 분수에 적합하도록 확장되기 어렵다. 예를 들어 "피자 4판을 한 모둠으로 할 때 피자 6판은 몇 모둠인가"라든가 "1m 안에 3m가 몇 번 들어가는가"와 같은 질문은 유의미하게 해석하기 어렵다.

위 [그림 Ⅱ-1]에서 도형의 넓이는 무한 분할이 가능한 연속량이고 그들이 여러 개 존재하므로, 이 표현 방법에는 연속량과 이산량이 공존한다고 볼 수 있다. 이 모델에서 $\frac{n}{m}$이 의미하는 것은 처음에는 구체적인 사물(피자 조각)이지만 나중에는 추상적으로 발전하여 나눗셈 $(n \div m)$이 된다. 이 모델 속에는 비와 작용소도 내포되어 있기는 하지만 나눗셈만큼 명시적이지는 못하다.

이 모델의 취약점은 분수의 사칙계산 알고리듬을 설명하지 못한다는 점이다. 설명하기는커녕 오히려 분수의 덧셈에서 아동이 범하는 전형적인 오류를 기묘하게 정당화한다. 예를 들어 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$의 경우 다음과 같이 혼돈스럽게 해석된다. "$\frac{1}{2}$은 피자 한 개를 두 사람이 똑같이 나누었을 때의 한 조각이고 $\frac{2}{3}$는 피자 두 개를 세 사람이 똑같이 나누었을 때의 한 조각이다. 따라서 더하면 피자 세 개를 다섯 사람이 똑같이 나누었을 때의 한 조각이다. 즉 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}$이다!"(Smith III, 2002).

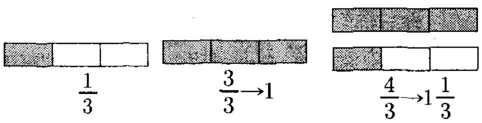
나. 전체-부분 모델

전체-부분은 전체를 똑같은 여러 부분으로 가르는 것이다.

전체를 똑같은 m개의 부분으로 가른 것 가운데 n개의 부분을 $\frac{n}{m}$이라고 한다. 예를 들면 피자 한 판을 똑같이 세 조각으로 나눈 것 가운데 두 조각을 $\frac{2}{3}$라고 한다. 정의에 의하여 분자는 분모보다 클 수 없다.

이 모델은 분수 교수에서 전통적으로 가장 널리 사용된 것이다. 우리말의 '분수(分數)', 영어의 'fraction', 독어의 'Bruch'가 공통으로 의미하는 것은 전체의 일부분이라는 뜻이다. 특히 우리말에서 분수를 읽는 방식인 '몇 분의 몇'은 '전체를 몇 조각으로 나눈 것 가운데 몇 개'의 뜻으로서 전적으로 전체-부분 모델을 대변한다.[10)]

Freudenthal과 Dewey가 지적하였듯이 이 모델의 큰 제한점은 분자가 분모보다 큰 분수, 즉 가분수를 나타낼 수 없다는 점이다. 이 모델에서 덧셈과 곱셈을 하다보면 부분들을 합하거나 곱한 결과가 '전체를 초과하는' 상황이 필연적으로 발생하는데, 계산은 언제나 전체 '안에서' 이루어져야만 하기 때문에 '$\frac{4}{3}$컵' 같은 표현은 불가하며, 따라서 그것은 '$1\frac{1}{3}$컵'과 같은 대분수로 변환되어야만 한다. 다리를 건설할 때 그 옆에 가교(假橋)를 세우고 그것을 이용하듯이, 가분수는 대분수에 이르는 가교와 같은 것이다. 이 과정을 자세히 설명하면 다음과 같다. i) 전체를 직사각형 모양의 막대 한 개로 표현, ii) 막대의 등분할로 단위분수 $\frac{1}{n}$을 정의, iii) $\frac{n}{n}$은 전체가 되므로 막대 한 개를 1로 표현, iv) 온전한 막대의 중첩은 자연수로, 막대의 부분은 분수로 표현.



[그림 Ⅱ-2]

그러나 이 방법의 문제점은 [그림 Ⅱ-2]에서 $1\frac{1}{3}$을 나타내는 셋째 그림에 있다. 이 그림에서 전체는 막대 하나인가 아니면 둘인가? 전

10) 영어도 마찬가지이다. 예를 들어 $\frac{2}{3}$은 'two-thirds'로서 '삼등분조각이 둘'이라는 뜻이다.

체-부분 모델에 충실하다면 전체는 막대 둘이어야 마땅하고, 그렇게 되면 이 그림이 나타내는 분수는 $1\frac{1}{3}$이 아닌 $\frac{4}{6}$가 된다. 따라서 엄밀하게 말한다면 이 그림은 전체-부분 모델의 시각화로 볼 수 없다. 결국 전체-부분 모델에서 대분수를 표현하는 와중에 새로운 분수 모델이 생겨난 셈이다. 서로 합동인 여러 도형의 중첩은 자연수로 나타내고 그 도형의 일부분은 분수로 나타냄으로써 대분수를 표현하는 이러한 모델을 이 논문에서는 '변종 전체-부분 모델'이라고 부를 것이다. 변종 전체-부분 모델의 핵심은 '도형 하나를 1로 나타내는 이유'에 있다. 그것은 출발부터 정의되는 것이 아니라, 부분 $\frac{1}{n}$을 n번 중첩하면 전체가 된다는 사실로부터 도출된 것이다(교육인적자원부, 2002c: 96; 교육인적자원부, 2002d: 9). 이것이 전체-부분 모델에서 $\frac{1}{n}$을 단위분수[11]로 부르는 이유이다. 한국의 교재는 전체-부분 모델과 함께 이 변종 전체-부분 모델을 중요 모델로 채용하고 있다.

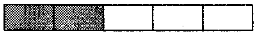
Freudenthal(1983: 147)은 대분수를 표현하기 위하여 전체-부분 모델을 변종 전체-부분 모델로 전환하는 활동은 현실과의 현상학적인 연결고리 없이 종이 위에서 인위적으로 이루어지는 것이라고 지적하면서 비판한다. 혹자는 전체-부분 모델에서 가분수 $\frac{4}{3}$를 통하여 대분수 $1\frac{1}{3}$로 나아가고 그 과정을 통해서 가분수 $\frac{4}{3}$를 이해하는 것이 정당화될 수 있다고 주장하기도 한다. 하지만 이것이 사실일지라도 이것이 가분수 문제로 인한 전체-부분 모델의 제한점을 보완해 주지는 못한다. 가분수는 여전히 대분수로 고쳐져야만 하는 가짜 분수로 남아있으며, 결론적으로 분수 $\frac{b}{a}$가 비 $b:a$를 의미하는 것을 저해한다. 왜냐하면 $\frac{2}{3}$는 비 $2:3$을 의미하지만 $\frac{4}{3}$은 $4:3$이 될 수가 없기 때문이다(Thompson & Saldanha, 2003).

전체-부분 모델은 비 개념과 작용소 개념을 내포한다. 한 컵을 세 등분한 것 가운데 두 조각으로서의 $\frac{2}{3}$컵 속에는 비 $2:3$과 함께 전체를 여러 부분으로 가르고 모으는 조작이 내포되어 있다. 하지만 낮은 발달 수준에서는 대부분 구체적인 양을 지칭한다. 이것은 '$\frac{2}{3}$컵', '$\frac{2}{3}$통'과 같이 전체를 가리키는 기호를 분수 뒤에 붙일 때 더욱 분명해진다. 이처럼 전체-부분 모델이 비나 작용소보다는 구체적인 양을 현저하게 지칭할 때, Freudenthal(1983: 147)은 이를 가리켜 '부분으로서의 분수(fraction as parts of something)'라고 부른다. 부분으로서의 분수는 분수의 덧셈 알고리듬을 설명하는데 효과적이다.

이 모델은 선분, 정사각형, 직사각형, 원 등과 같은 하나의 도형 안에 전체와 부분을 동시에 나타냄으로써 시각화 된다.[12] 한국의 교재는 이런 시각화 표현을 다양하게 사용하고 있으며, MiC 교재의 중심적인 시각화 표현인 분수 막대(fraction bar)도 이러한 전체-부분 모델의 시각화에 속한다.

전체-부분 모델은 전체의 성격에 따라서 세

11) 영어에서는 'simple fraction'이다.

12) 하나의 도형에 전체와 부분을 모두 나타내다 보니 아동들은 다음과 같은 혼돈을 겪기도 한다. 다음 그림이 나타내는 분수는 $\frac{2}{5}$일 수도 있지만 $2:3$이므로 $\frac{2}{3}$일 수도 있으며 좌우로 돌린다면 $\frac{3}{5}$일 수도 있다. 

유형으로 재분류될 수 있다.[13] 첫째는 피자 나누기에서처럼 전체가 수치로 명확히 규정되지 않은 질적인 단일체인 경우이다(교육인적자원부, 2002a: 91). 다른 두 유형은 전체가 수치로 명확하게 규정된 경우인데, 그중 하나는 '사과 6개의 $\frac{1}{2}$'에서처럼 전체가 이산량 단위를 통하여 측정된 양인 경우이고(교육인적자원부, 2002c: 92-95) 다른 하나는 '$6m^2$의 $\frac{1}{2}$'에서처럼 전체가 연속량 단위를 통하여 측정된 양인 경우이다. 마지막 유형, 즉 전체가 연속량 단위로 측정된 양인 경우는 다음에 논할 측정수 모델과 유사하다.

다. 측정 활동 모델

측정 활동은 어떤 사물을 단위로 정하고 '1'로 나타낸 다음 그 단위가 n번 중첩되면 그것을 자연수 n으로 나타내는 것이다. 이 때 단위량보다 작은 자투리가 필연적으로 발생하는데, 처음의 단위를 세분하여 보다 정교한 이차 단위를 만듦으로써 이 자투리를 측정한다. 이 이차적인 측정이 끝나면 또 자투리가 생기는데 이는 이차 단위를 세분하여 얻은 삼차 단위로 측정한다. 이렇게 하다보면 측정량은 $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$등과 같이 자연수와 함께 분모가 점점 커지는 여러 분수의 합으로 표현된다(변희현, 2005).[14]

이 모델은 앞서 논했던 변종 전체-부분 모델과 유사하다. 하지만 1을 규정하는 방식에서 근본적인 차이가 있다. 변종 전체-부분 모델에서의 정의 순서는 전체→단위분수→1→대분수이지만, 여기에서는 1→진분수→대분수이다. 또 다른 차이점은 어떤 것을 분할하는 이유에 있다. 변종 전체-부분 모델에서는 그 이유가 인위적인 반면, 측정 활동 모델에서는 '보다 정확한 측정'이라는 현실적인 맥락이 있다. 또한 그 하위 단위 생성이 한 단계에 그치는 것이 아니라 이차, 삼차로 계속된다는 점도 차이점이다. 보다 정확한 측정이라는 동기는 분배 모델과의 차이점이기도 한다. 분배 모델에서는 공평한 분배가 분할의 목적이었다.

이 모델과 다음에 논할 측정수 모델과의 차이점은 다음과 같다. 측정수 모델은 '기성의 완성된 측도'를 사용하는 반면, 측정 활동 모델은 측도 체계를 발생적으로 재현한다. 측정수 모델에서는 측정량을 표시하는데 있어서 하나의 분수만이 사용되지만 측정 활동 모델에서는 분모가 다른 여러 분수가 사용된다는 점도 차이점이다. 이 모델은 McLellan이나 한국의 교재에서는 등장하지 않으며 MiC 교재에서 일부 등장한다.

라. 비교 모델

기준량이 m개의 사물, 비교하는 양이 n개의 사물이 있을 때 비교하는 양은 기준량의 $\frac{n}{m}$이다. 한국의 교재에서는 짧게 등장하지만 MiC 교재에서는 비중 있게 다루어진다.

비교는 구체적인 양이 아니라 양 사이의 관계, 즉 비에 대해서 이루어지는 것이므로 이 모델에서는 비 개념이 현저하게 드러난다. 측정수 모델과 마찬가지로 이 모델도 서로 분리된 두 선분으로 시각화되는데(이 논문의 제 IV

---

13) Freudenthal(1983: 140)에 의하면 전체-부분 모델은 전체의 특성(이산량인가 연속량인가, 유계인가 무계인가, 구조가 있는가 없는가), 분할하는 방법(구조화되었는가 안되었는가), 부분의 특성(연결되었는가 아닌가), 주의가 어디에 집중되는가(하나의 부분인가 여러 부분인가 모든 부분인가)와 같은 여섯 가지 기준의 조합에 의해서 모두 $2^5 \times 3 = 94$ 종류로 구분할 수 있을 정도로 다양하다.

14) 단위가 $10, 10^2, 10^3, \cdots$ 과 같이 10의 거듭제곱으로 세분할되는 측정 활동은 소수(decimal fraction) 표현으로 이어진다.

장 3절 참조), 이러한 방식은 비교를 용이하게 하고 비 개념을 드러내는데도 도움이 된다. 또한 비의 상호 비교는 'A가 B의 $\frac{2}{3}$이면 B는 A의 $\frac{3}{2}$이다'와 같은 크기의 역관계를 나타내기 쉽도록 만들고 나아가 작용소의 추상화를 용이하게 한다. 결과적으로 이 모델의 추상성은 높은 편이다. 그러나 분수의 사칙계산 알고리듬을 설명하지 못한다는 단점을 가진다.

마. 측정수 모델

측정수 모델은 Dewey가 중시했던 것으로서 McLellan 교재에서 중심 모델로 채용되고 있다. 측정수 모델에서 분수는 명확하게 정의된 단위를 통하여 측정된 양을 의미한다. 예를 들어 $\frac{2}{3}m$는 $\frac{1}{3}m$를 단위로 하여 2배함으로써 측정된 양이다. 이때의 측정 단위 $\frac{1}{3}m$는 $1m$를 똑같이 세 조각으로 갈라서 얻는 것으로서 $1m$를 기준으로 명확하게 정의된 단위이다. $1m$를 일차단위, $\frac{1}{3}m$를 이차단위라고 부른다.

Freudenthal(1938: 149)과 Dewey(1895: 127)가 말했듯이 측정수 모델에는 다른 모델보다도 비 개념과 작용소 개념이 명시적으로 나타나 있다. 두 선분을 통한 시각화 표현에서 드러나듯이 $\frac{2}{3}m$는 2 : 3으로 쉽게 이어질 수 있으며(이 논문 제 Ⅳ장 1절 참조), 분모 3은 분석 조작을, 분자 2는 종합 조작을 명시적으로 나타낸다.[15] 따라서 여타의 어떤 모델보다도 일반적이고 추상적이다. 즉 유리수에 가장 가까운 모델이다.

측정수 모델의 장점 중의 하나는 가분수를 인정한다는 것이다(Dewey, 1895: 133). $\frac{4}{3}m$는 측정 단위 $\frac{1}{3}m$가 네 번 반복되었음을 뜻하는 것이며, 이는 $\frac{2}{3}m$에 비해서 하등 이상할 것이 없다. 측정수 모델에서 $\frac{4}{3}m$은 더 이상 '가짜 분수(假分數)'가 아니다.

측정 단위가 원시 단위와의 관련 하에서 명확하게 정의된다는 점에서, 측정수는 앞서의 '부분으로서의 분수'와 구별된다. 예를 들어 $\frac{2}{3}$컵과 $\frac{2}{3}m$는 외형상으로는 비슷해 보이지만 $\frac{2}{3}$컵에는 $\frac{2}{3}m$와는 다르게 명확하게 단위를 정의하는 측면이 없다.

지금까지 여섯 가지 분수 모델에 대해서 살펴보았다. 이제는 분수의 사칙계산 알고리듬과 모델과의 관계를 간략하게 고찰한다.

분수의 덧셈은 다분히 자연수적이다. 즉 비나 작용소 같은 개념을 명시적으로 사용하지 않고 '부분으로서의 분수'만으로도 설명이 가능하다. 전체-부분 모델, 측정 활동 모델, 측정수 모델 등이 사용된다.

덧셈과는 다르게 곱셈과 나눗셈은 비 개념과 작용소 개념이 명시적으로 드러나고 사용된다. 변종 전체-부분 모델이나 추상도가 높은 측정수 모델이 주로 사용된다. 특히 곱셈과 나눗셈의 경우 그것을 설명하는데 있어서 모델의 독특한 '해석'이 사용된다. 측정수 모델에서의 곱셈의 해석은 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$ 이 아니라 $(\frac{3}{4}m)\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}m$와 같은 것이어야 한다(Dewey, 1895: 142). 즉 피젯수는 측정단위, 제수는 순수한 분수(작용소), 결과는 측정량을 나타낸다. 나눗셈은 곱셈의 역이므로, 측정수 모델에서의 나눗셈은 미지수가 무엇인가에 따라 포함제와 등분제의 두 종

15) 그러나 나눗셈 개념으로 이어지기는 어렵다. 왜냐하면 $\frac{2}{3}m$는 $2m$를 세 조각으로 나누는 것이 아니기 때문이다.

류로 해석될 수 있다. 포함제 해석은 $(\frac{3}{4}m)\times\square = \frac{6}{20}m$ 와 같이 작용소(순수한 분수)가 미지수인 경우이고 등분제 해석은 $\square\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}m$와 같이 측정단위가 미지수인 경우이다.

이외에도 곱셈과 나눗셈은 몇 가지 독특한 해석이 있다. 첫째는 곱셈의 작용소 해석이다. 작용소 해석에서는 곱셈식에 등장하는 세 분수가 모두 작용소이다. 둘째는 곱셈의 직사각형 넓이 해석으로서 $(\frac{3}{4}m)\times(\frac{2}{5}m)=\frac{6}{20}m^2$와 같다. 마지막으로 나눗셈의 비례표 해석이 있다. 이 세 가지 해석에 대해서는 이 논문의 제 Ⅳ장 2절에서 상세하게 다룰 것이다.

Ⅲ. 분수의 교수학

이 장에서는 일반적인 차원에서의 각 교재에 대한 관점을 준비한다. 분수의 추상적인 개념과 알고리듬을 어떻게 하면 효과적으로 가르칠 수 있는가라는 질문에 대하여 각 교재는 어떤 교수학적 원리를 내세우는가? McLellan의 교재는 Dewey의 경험주의 수학교육론을 바탕으로 하고 있으며 MiC 교재는 Freudenthal의 현실주의 수학교육론을 바탕으로 하고 있다. 한국의 교재는 여러 저자에 의해서 공동으로 저술되기 때문에 Dewey나 Freudenthal처럼 명시적인 배경 이론을 가지고 있지 않다. 따라서 제 7차 교육과정 해설서를 참조할 것이다.

1. McLellan의 교재

이 절에서는 McLellan 교재의 기저에 깔려있는 분수의 교수학을 Dewey와 McLellan의 공저인 「수의 심리학」을 중심으로 살펴보고자 한다.

Dewey의 분수 교육론의 핵심적인 내용은 분수와 자연수의 연속성이다. Dewey에게 있어서 분수와 자연수의 본질은 똑같이 비 개념이고, 이 비 개념의 기원은 사물을 똑같은 여러 조각으로 분석하고 종합하는 조작 활동이다. 분수와 자연수의 차이점은 비 개념이 얼마나 명시적으로 드러나 있느냐 하는 것뿐이다. 따라서 수 교육은 비 개념을 암묵적으로 내재하고 있는 사물의 분석과 종합 활동을 통해서 자연수를 시작하고, 비 개념이 명시적으로 드러나는 자연수의 곱셈과 나눗셈을 거쳐,[16] 비 개념이 완성된 분수에 도달하는 것이다. 즉 피자 나누기와 같은 분할 활동은 분수를 도입할 때가 아니라, 그보다 훨씬 이전에 자연수를 다룰 때부터 도입되어져서 자연수의 곱셈과 나눗셈을 거치면서 성숙한다. 즉 Dewey에게 있어서 분수를 위한 준비는 자연수에서 모두 이루어져야만 하는 것이다.

Dewey의 이러한 주장과는 달리 분수와 자연수의 근원이 다르다고 보는 진영도 있다. 이 진영에서는 분수의 종국적인 개념이 자연수의 곱셈과 나눗셈에 기초한 '두 자연수 사이의 배 관계'라는 Dewey의 생각에는 동의하면서도, 분수의 출발과 자연수의 출발은 근본적으로 다르다고 본다. 그들에 따르면 자연수의 출발은 단위의 중첩이고 분수의 출발은 단위의 분할이다. 예를 들어 "사과 세 개를 두 사람에게 똑같이 나누기" 위해서는 단위-이전에는 결코 분할한 적이 없었던-를 분할해야만 하고 이 새로운 일을 나타내는 것이 분수라는 것이다. 따라서 피자 나누기 같은 분할 활동은 자연수에서는 불필요하고 분수를 도입할 때 처음으로 제시된다.

16) $6m$의 $\frac{2}{3}$가 $4m$인 것은 $4\times3=12$이고 $12\div3=4$인 것과 밀접하다.

요컨대 이 진영의 주장은 자연수에서는 고정 단위, 분수에서는 상대단위를 취해야 한다는 것이다. 이에 대하여 Dewey는 자연수와 분수 모두 상대 단위관을 취함으로써 양자를 통합하는 것이 교육적으로 바람직하다고 주장한다. Dewey(1895: 140)에 의하면 분수뿐만 아니라 자연수의 출발점도 '분할'이어야만 하며, 다만 분수에서는 비 개념이 명시적이고 완전하게 드러나 있다는 점에서 자연수와 구별될 뿐이다. 따라서 분수의 지도는 사과 '한 개, 두 개'와 같이 부정확한 단위가 아니라 '$1m$, $2m$'와 같이 명확한 단위를 사용하는 측정수에서 이루어져야만 한다. 다시 말하면 분수의 지도 단계에서는 사과나 피자와 같은 '질적인' 전체를 똑같이 여러 부분으로 나눔으로써 얻어진 조각을 단위로 사용되어서는 안된다는 것이다.

분수의 개념 지도와 관련하여 Dewey는 두 가지 교수학적 원리를 말한다. 첫째 '점진적인 자각의 원리'이다. Dewey에 의하면 분수의 본질로서의 비 개념과 분석·종합이라는 심리적 조작은 분수를 다루기 이전에 자연수와 함께 시작되어야만 한다. 왜냐하면 비 개념과 분석·종합 조작은 이산량의 세기활동 안에 암묵적으로 존재하다가[17] 자연수의 곱셈과 나눗셈에서 나타나기 시작하여 분수에 이르러 명시적으로 드러나기 때문이다. 따라서 비 개념과 분석·종합 조작은 측정활동 속에 내재해있는 형태로 자연수와 함께 조기에 도입되어 무의식적으로 사용되다가 분수에 이르러 완전하게 발현되도록 해야 한다.

둘째는 '발생적 구성의 원리'이다. Dewey에 의하면 일반 개념은 어떤 사물이 만들어지고 발생하는 양식 혹은 기능으로서 그 개별물의 생성 과정 안에 암묵적으로 존재한다. 따라서 그러한 개념에 도달하기 위해서는 그 개념에 속하는 하나의 개별물을 발생적으로 구성해야만 한다. 예를 들어 삼각형의 경우 그 개념을 아는 유일한 길은 구체적인 세 선분을 결합하여 하나의 삼각형을 구성하는 것이다(Dewey, 1891: 144). 마찬가지로 분수는 측정의 양식으로서 하나의 측정량이 생성되는 과정 속에 암묵적으로 존재한다. 예를 들어 일반 개념으로서의 $\frac{2}{3}$는 개별물로서의 $\frac{2}{3}m$와는 구별되지만, $\frac{2}{3}m$의 형성과정 속에 '양식' 혹은 '기능'으로서 내재한다. 따라서 $\frac{2}{3}m$를 구성하는 과정을 거침으로써 일반 개념 $\frac{2}{3}$를 형성하게 된다(Dewey, 1895: 132).

2. MiC 교재

Freudenthal에 의하면 출발에서부터 유리수에 이르기까지의 전 과정에서 나타나는 분수의 본질적인 양상은 작용소(operator) 양상으로서 그것은 분할 작용소와 비 작용소 그리고 분수 작용소이다(이 논문의 제 Ⅱ장 참조).

Freudenthal(1983: 149)에 의하면 전통적인 분수의 교수학의 문제점은 오직 분수의 분할 작용소 양상만을 다루고, 그 다음의 두 양상은 생략한 채로 가장 끝 계열인 유리수로서의 분수로 나아간다는 점이다. 이러한 점은 전통적인 방식이 전체-부분 모델에 과도하게 치중했던 것에서 잘 드러난다.

Freudenthal(1983: 144)에 의하면 전체-부분 모델, 즉 전체를 똑같은 여러 부분으로 "가르고, 쪼개고, 자르고, 색칠하는 때"에 분수는 자신을

17) 사과 세 개를 '하나, 둘, 셋' 세는 행위는 '셋 가운데 하나', '셋 가운데 둘', '셋 가운데 셋', 즉 전체의 3분의 1, 3분의 2, 3분의 3인 것이다. 또한 그 행위는 모호한 전체를 세 조각으로 분석한 다음 하나의 명확한 전체로 종합하는 과정이다.

가장 잘 드러내는 것이 사실이기는 하지만,[18] 전체-부분 모델을 통해서 분수로 접근하는 것은 현상학적으로나 수학적으로나 매우 제한적인 것이다. 그 이유는 이 모델이 제한된 동치 개념 하나만 가지고도 기술될 수 있는 것으로서 어떤 것을 똑같이 n개의 같은 조각으로 가르는 것 이상을 요구하지 않으며 결과적으로 분할 작용소만을 나타내기 때문이다. 또한 진분수 이상을 넘지 못한다는 것도 큰 약점이다.

Freudenthal(1983: 134)에 의하면 교수에서는 분수의 풍부한 현상학적 맥락을 반영함으로써 현실로부터 분수를 거쳐 유리수로 올라가는 경로를 다양하게 해야 한다. 이를 위해서는 다양한 모델을 통하여 분수의 다양한 개념을 모두 다루어야 하며, 특히 세 가지 연산자 양상이 그러하다. 분수의 곱셈을 예로 들면 Freudenthal (1983: 170)은 작용소 해석에 더 중심을 두면서도 전통적으로는 중시되었던 직사각형의 넓이 해석을 전적으로 무시하지는 않으며, 이 둘이 서로 잘 조화될 수 있다고 말한다.

이제 일반적인 개념 지도에 관한 Freudenthal의 견해를 간략하게 살펴보자. Freudenthal은 개념을 가르칠 때 완성된 개념에서 출발하여 그 개념이 적용되는 여러 사례를 찾는 방식, 즉 첫째는 개념이고 둘째는 응용이라는 '구상화(concretization)' 방식은 교수학적으로 마차를 말 앞에 두는 것과 같다고 비판하면서, 대신에 '심상(mental object)' 구성을 주장한다(정영옥, 1997: 70). 심상의 구성은 구상화와는 반대 방향의 접근으로서, 조직되기를 기다리는 현상에서부터 출발하여 이러한 현상들을 조직하는 수단을 조작하도록 하는 것이다. 구상화 방식에서는 적용 사례가 일시적으로만 중요하지만 심상의 구성에서는 그렇지 않다. 예를 들어 피자 나누기는 학습자가 분수를 알고리듬으로 숙달하자마자 잊혀지지만 분수의 심상을 구성하는 데 참여하는 재료는 영속적이고 명확한 가치를 가진다(Freudenthal, 1983: 33).

심상 구성 방법의 가장 큰 특징은 학생이 교사로부터 개념이나 알고리듬을 먼저 알려 받기보다는, 현실 문제를 해결하는 과정에서 학생이 그러한 개념이나 알고리듬을 스스로 만들어 가는 것이다. 개념이나 알고리듬이 현실 문제 상황 속에 암묵적으로 내재해 있기 때문에 이것이 가능하다.

3. 한국의 교재

현재 우리나라 초등 수학 교과서는 국정 교과서 체제로 발행되고 또 여러 저자에 의해서 공동으로 씌었기 때문에 McLellan이나 MiC 교재처럼 명시적으로 표명된 분수의 교수학은 없는 실정이다. 여기에서는 제 7차 교육과정과 그 해설서에서 표방하고 있는 분수 교육의 목표와 그에 도달하기 위한 방법을 간략하게 고찰한다.

첫째 목표는 구체적인 조작활동을 통하여 분수의 다양한 의미를 이해시키는 것이다. 초등학교 교육과정 해설(교육인적자원부, 1998: 55, 57, 60, 63)에서는 "분수에는 일반적으로 등분할 분수, 양으로서의 분수, 비율로서의 분수, 몫으로서의 분수 등 네 가지 의미가 있다 … 분수의 여러 가지 의미를 이해한다"고 말한다. "구체적

18) Freudenthal의 이러한 견해는 분수의 본질을 분석과 종합 조작으로 파악했던 Dewey의 견해와 일치한다. 하지만 자연수에서는 두 사람은 견해가 다르다. Dewey는 분수뿐만 아니라 자연수도 이러한 조작을 통해서 도입하고 지도해야 한다고 주장한 반면, Freudenthal(1983: 150)은 자연수에서는 조작보다는 기수와 서수의 뿌리가 연합하여 성장하는 것이 더 결정적이며 그런 과정을 거쳐서 자연수의 심상(mental object)이 형성된 연후에 그들에 대하여 작용소가 작용하는 것이 순서라고 말하면서, 작용소를 자연수 교육의 중심에 놓는 것에 반대한다.

인 조작을 통하여 연속량을 등분하게 하고 … 연속량의 등분할은 색종이 접기와 같은 조작활동을 통하여 도입한다"라고 말하며, "연속량에서의 등분할을 바탕으로 분리량에서도 구체물의 등분할을 통하여 분수를 이해하고"라고 말하며, "구체물의 조작활동을 통하여 대분수와 가분수의 관계를 알게 한다"라고 말한다.

둘째 목표는 구체적인 조작활동을 통하여 분수의 여러 알고리듬을 이해시킨 다음 그것을 형식화시켜서 연습함으로써 계산 기능을 숙달시키는 것이다. 초등학교 교육과정 해설(교육인적자원부, 1998: 67, 70, 75)에서는 "분수와 자연수의 곱셈은 동수누가, 구체물, 수직선 등을 이용한 활동을 통하여 계산 원리를 이해하고, 이를 기호화하여 형식적인 계산 기능을 익히게 한다"고 말하며, "구체적인 조작활동을 통하여 (분수)÷(자연수)의 계산 원리를 이해하고, 정수를 역수로 곱하여 계산할 수 있다는 것을 알게 하고 형식화하여 계산할 수 있게 한다"라고 말하며, "구체물이나 수직선을 통하여 수가 분수인 나눗셈의 계산 원리를 이해하게 하고, 계산 형식을 익혀 능숙하게 계산할 수 있도록 한다"라고 말한다.

요컨대 추상적인 개념이나 알고리듬을 다루는데 있어서 한국의 교재가 취하는 교수 방법은 일차적으로 구체적인 활동을 통한 이해이고 그 다음이 형식적인 훈련과 연습이다.

개념과 알고리듬의 측면에서 바라본다면 한국의 교재는 개념보다는 알고리듬에 더 큰 비중을 둔다. 분수 개념은 네 종류에 지나지 않지만 알고리듬은 통분, 약분, 가분수와 대분수의 전환, 대소 비교, 사칙계산, 소수로 고치기 등 매우 많다. 또 개념은 두 단계(3-가, 3-나)에서만 다루어지지만 각종 알고리듬은 여섯 단계(4-가, 4-나, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나)에서 다루어지고 있다.

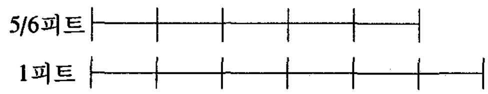
Ⅳ. McLellan, MiC, 한국의 교재 분석

이 장에서는 앞서 제 Ⅱ장과 Ⅲ장에서 제시했던 분수 내적인 차원과 일반적인 차원에서의 두 가지 관점을 견지하면서 각 교재에 나타난 분수 개념과 알고리듬 및 그 모델에 대해서 분석한다. 각 교재의 특징이 잘 반영되어있는 부분을 추출하여 요약하였고 그에 대한 간단한 주석을 덧붙이는 형식을 취하였다.

1. McLellan의 교재

McLellan & Ames는 Dewey & McLellan의 「수의 심리학」에 기초하여 「The public school arithmetic for grammar grades(1902)」를 저술하였다. 분수는 이 책의 제 11장의 124쪽에서 169쪽에서 다루어진다. 교재의 핵심적인 내용을 요약하면 다음과 같다.

【84】 '$\frac{5}{6}$피트'는 5개의 측정단위로 이루어지며, 이 측정 단위는 1피트를 여섯 등분한 것이다. 이때의 1피트를 일차단위, $\frac{1}{6}$피트를 측정(파생)단위라고 한다. 다음 그림에서 알 수 있듯이 분수 $\frac{5}{6}$는 일차 단위 1피트에 대한 $\frac{5}{6}$피트의 비를 표현한다.[19]



[그림 Ⅳ-1]

19) 【 】 안에 있는 숫자는 원 교재의 기호 그대로이다.

【87】 분수 $\frac{5}{6}$는 1피트에 대한 $\frac{5}{6}$피트의 관계(비)를 나타낸다. 유사하게 분수 $\frac{5}{6}$는 \$6에 대한 \$5, 6시간에 대한 5시간, 6마일에 대한 5마일, 일반적으로 6단위에 대한 5단위의 비를 나타낸다.

➡ 측정수 모델을 통하여 분수를 도입한다. 두 개의 선분을 사용하여 분수를 시각화하고 그를 통하여 분수 $\frac{5}{6}$은 5 : 6 임을 설명한다. 측정수 모델에서부터 비 개념을 급격히 형식화한다.

【91】 어떤 사람의 자본은 20개의 단위로 나타낼 수 있다. 그는 그것의 $\frac{1}{4}$을 땅에 투자하고 나머지는 은행 주식에 저축했다. 몇 단위를 은행에 투자했으며 그것은 그의 전체 자본의 몇 부분인가?

➡ 측정수에서 작용소 개념으로 급격하게 상승한다.

【연습 90-5】 '$\frac{3}{4}$파운드 + $\frac{5}{8}$파운드 + $\frac{13}{16}$파운드'를 계산하여라. 단위를 온스로 바꾸어서도 계산하고 그 결과를 통분해서 계산한 것과 비교하여라. 두 분수의 합을 계산하는 원리를 명료하게 설명하여라.

➡ 단위의 일치를 통해서 통분의 필요성을 유도하고, 측정 단위 변환을 통해서 통분을 설명한다. 덧셈 알고리듬을 명시적으로는 제시하지는 않는다.

【101】 (1) 1야드당 $\frac{3}{4}$달러인 천 12야드의 가격은? 풀이: $\$\frac{3}{4}\times\frac{12}{1}=\$9$.

(2) 야드당 12달러인 천 $\frac{5}{6}$야드의 가격은? 풀이: $\$12\times\frac{5}{6}=\$10$.

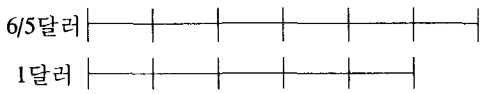
(3) 길이가 12피트이고 폭이 9피트 9인치인 마루의 넓이를 구하여라.

➡ 측정수 해석과 직사각형의 넓이 해석으로 곱셈을 시작한다.

【연습 99-2】 땅의 $\frac{3}{4}$에 감자를 심고 나머지의 $\frac{2}{3}$에 밀을 심었다. 전체의 몇 부분에 심었는가?

➡ 곱셈의 작용소 해석이다. 분수의 곱셈 알고리듬을 명시적으로 제시하지 않은 상태에서 풀어야 한다.

【104】 원시단위 1달러에 대한 $\frac{6}{5}$달러의 비는 $\frac{6}{5}$이다. 반대로 $\frac{6}{5}$달러에 대한 1달러의 비는 $\frac{5}{6}$이다. 이와 같이 관련된 두 수를 '역수'라고 한다.



[그림 IV-2]

➡ 측정수를 통한 역수의 정의로서 이는 McLellan 교재의 독특한 측면이다. 역수 개념은 나눗셈 알고리듬에서 중요하다.

【연습 102-11】 4피트 길이의 선을 그려라. 그것을 $\frac{1}{3}$피트 길이의 조각들로 나누어라. 모두 몇 조각인가? 이 조각들 몇 개가 $\frac{2}{3}$피트인가? 12개의 조각들 안에는 $\frac{2}{3}$피트가 몇 개 있는가?

【연습 102-12】 위에서 처음에 12를 얻기 위해서 4에 얼마를 곱했는가? 그리고 6을 얻기 위해서 12를 무엇으로 나누었는가?

【연습 102-13】 4와 같은 수를 분수로 어떻게 나누는가?

➡ '$\frac{2}{3}$피트×□ = 4피트'이므로 나눗셈의 포함제 해석이다. 포함제 해석을 써서 분수의 나눗셈 알고리듬을 발견시키려 한다.

【106】 어떤 천 $\frac{3}{4}$야드의 값이 48센트이다. 1야드의 가격은?

➡ '□ × $\frac{3}{4}$ = 48센트'이므로 전체량과 수 값이 주어지고 단위량을 구하는 문제, 즉 나눗셈의 등분제 해석이다.

【111】 두 아들이 340에이커의 땅을 나누어 가진다. 작은 아들의 $\frac{3}{4}$은 큰 아들의 $\frac{2}{3}$와 같다. 각각의 넓이는? 풀이: (작은아들)×$\frac{3}{4}$=(큰아들)×$\frac{2}{3}$, (작은아들)=(큰아들)×$\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}$, (작은아들)=(큰아들)×$\frac{8}{9}$, (큰아들)×($\frac{8}{9}+\frac{9}{9}$)=340에이커, (큰아들)=340에이커÷$\frac{17}{9}$.

➡ 나눗셈은 곱셈의 역이라는 것을 이해하고 나눗셈 알고리듬을 적용하는 문제이다.

2. MiC 교재

MiC 교재는 Freudenthal의 수학교육 사상과 NCTM(1989)의 「수학교육과정과 평가의 새로운 방향」을 토대로 1997년에 미국의 위스콘신 교육연구소와 네덜란드의 Freudenthal 연구소가 공동으로 저술한 교재이다. 수, 대수, 기하, 확률과 통계의 네 영역에 걸쳐 총 40권이 만들어졌으며, 대상은 초등학교 5학년에서부터 중학교 3학년까지이다. 교재의 핵심적인 내용을 간략하게 요약하여 제시한다.

【Some of the Parts, Section A. Sharing Food】 네 명이 세 개의 샌드위치를 똑같이 나눌 때 한사람이 먹게 되는 양을 주어진 막대 그림에 색칠하고 분수로 나타내시오.[20]

➡ 분배 모델이다.

【Some of the Parts, Section B. Measure Up】 무인도에 난파당한 어떤 사람이 빈 깡통을 이용하여 코코넛 우유를 잰다. $\frac{3}{4}$통과 $\frac{1}{2}$통을 한 통에 부으면 얼마인가? $\frac{5}{4}$통이라고 써도 되는가?

➡ 전체-부분 모델(부분으로서의 분수)이다. 한 통이 가득 차고 $\frac{1}{4}$통이 되므로 $1\frac{1}{4}$통이다. 대분수라는 용어는 명시적으로 도입되지만 가분수라는 용어는 도입되지 않는다. 알고리듬 없이 비형적인 방법으로 덧셈을 수행하도록 격려한다.

【Some of the Parts, Section D. How Much】 4인분 피자를 만드는데 필요한 향신료가 $\frac{1}{4}$컵이다. 24인분의 피자를 만들려면 얼마가 필요한가?

➡ 측정활동 모델이다. 비례표를 통해서 분수의 곱셈을 비형식적으로 수행한다. 비례표는 MiC 교재에서 사용하는 핵심 도구이다.

【Some of the Parts, Section E. How Far】 어느 신도시에서 한 골목의 거리는 $\frac{1}{8}$마일이다. 17골목은 몇 마일인가? 5마일은 몇 골목인가?

➡ 분수 곱셈의 측정수 해석이고 나눗셈의 포함제 해석이다. 알고리듬은 없이 현실 상황 속에 있는 의미에 의존해서 곱셈과 나눗셈을

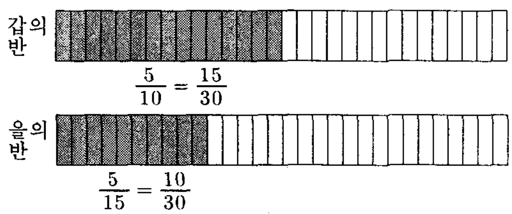
20) 【 】 안의 문장은 단원과 절의 이름이다.

수행해야만 한다.

【Measure for measure, Section A. On being precise】 피마자 기름을 짜서 원기둥 모양의 큰 항아리에 모았다. 측정 막대에는 눈금이 일정하게 그어져 있는데, 한 눈금은 한 병을 뜻한다. 측정 막대를 항아리에 담갔다가 꺼냈더니 측정 막대에 기름이 묻어나왔다. 기름을 병에 옮기면 몇 개의 병이 되겠는가?

➡ MiC 교재에서만 등장하는 전형적인 측정 활동 모델이다.

【Fraction times, Section A. Comparing results】 갑 선생님의 반 학생들 10명과 을 선생님의 반 학생들 15명에게 수학 과목을 좋아하는지를 물었더니, 두 반 모두 5명이 좋아한다고 대답하였다. 두 학급의 자료를 두개의 분할된 막대(segmented bar)에 각각 나타내어라. 전체 학생의 수가 다르기 때문에 두 학급을 비교하기가 쉽지 않다. 분할된 막대에서 칸의 개수가 서로 같다면 두 학급의 자료를 비교하기 편할 것 같이 생각된다. 왜 그런가? 어느 반이 수학을 더 좋아하는가?



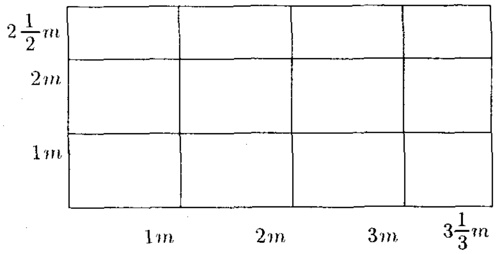
[그림 Ⅳ-3]

➡ 전체-부분 모델과 비교 모델이 혼합되어 있으며 MiC의 핵심적인 시각화 수단인 '분할된 막대(segmented bar)'를 통해서 시각화된다. 공통분모라는 개념을 암묵적으로 다룬다. 수학을 좋아하는 학생을 분수로 나타내면 갑의 반에서는 $\frac{5}{10}$, 을의 반에서는 $\frac{5}{15}$이다. 비교의 대상은 부분 자체가 아니라 그 부분이 전체에서 얼마를 차지하고 있는가, 즉 비이기 때문에 비 개념이 현저하다.

【Fraction times, Section E. Fractional parts and ratios】 어떤 공원에서 방문객들이 1년 동안에 버리는 깡통은 $250Kg$이다. 그 중에서 $\frac{4}{5}$가 공원 여기저기에 설치된 수거통으로 들어간다. 이 수거통의 $\frac{1}{10}$이 재활용 공장으로 가는 동안 분실된다. 수거통으로 들어가는 깡통의 양은? 재활용되는 깡통의 양은? 재활용되는 깡통의 양은 전체의 얼마큼인가?

➡ 분수 곱셈의 작용소 해석이다.

【Cereal Numbers, Section E. Fractional Areas】 Hiroko는 가로가 $3\frac{1}{3}$미터, 세로가 $2\frac{1}{2}$미터인 자기 사무실의 넓이를 계산하려고 한다.



[그림 Ⅳ-4]

➡

$$6m^2+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{6}m^2=8\frac{1}{3}m^2$$

분수 곱셈의 직사각형 넓이 해석이다. 알고리듬 없이 직사각형의 넓이를 이용해서 곱셈을 수행한다.

【Cereal Numbers, Section E. Serving Proportions】 새로 나온 시리얼을 테스트하고자 한다. $1\frac{1}{4}$

컵의 시리얼로 네 명이 시식할 수 있다고 한다. 한 명이 시식하기 위해서는 몇 컵이 필요한가? 60명이 시식하기 위해서는 몇 컵이 필요한가?

컵 수	$1\frac{1}{4}$	5	$\frac{5}{16}$	20	$18\frac{3}{4}$
사람 수	4	16	1	64	60

[그림 IV-5]

➡ 측정 활동 모델이다. 비례표 해석을 이용하여 나눗셈을 비형식적으로 수행한다. 비례표는 MiC 교재의 중요한 도구이다. 숙달되면 아동은 비례표 없이도 $1\frac{1}{4}$컵 ÷ 4사람 = 5컵 ÷ 16사람 = $\frac{5}{16}$과 같이 추론하게 된다. 비례표 풀이에는 비 개념이 현저하다.

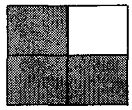
3. 한국의 교재

한국의 교재에서 분수는 <3-가> 단계에서부터 <6-나> 단계까지 모두 여덟 단계에 걸쳐서 다루어진다. 교재의 핵심적인 내용을 간략하게 요약하여 제시한다.

【3-가: 91-93】 정사각형 모양의 색종이를 똑같이 둘로 나누어 보시오.

➡ 전체-부분 모델. 다양한 도형(원, 정삼각형, 정사각형, 직사각형, 정오각형, 정육각형 등등)을 등분할 하는 문제가 제시된다. Dienes가 말한 다양성의 원리에 입각한 것으로 생각된다.

【3-가: 98】 색칠한 부분은 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3입니다. 이것을 $\frac{3}{4}$이라 씁니다.



[그림 IV-6]

➡ 전체-부분 모델로서 하나의 도형 안에 전체와 부분을 동시에 나타냄으로써 시각화된다. 전체와 부분이라는 용어를 명시적으로 사용한다. 여기서의 전체는 수치를 통해서 명확히 규정되지 않은 '질적인' 전체로서 다양한 평면도형으로 형상화된다. 따라서 전체를 똑같이 나누는데 수치에 근거할 수 없으며, 그 대신 넓이라는 양에 대한 '직관'에 의존해야만 한다.

【4-가: 92-93】 부분은 전체의 얼마인지 분수로 나타내는 방법을 알아보시오. 3cm는 12cm의 $\frac{\square}{\square}$입니다. 9cm는 12cm의 $\frac{\square}{\square}$입니다.

【4-가: 94-95】 전체에 대한 분수만큼은 얼마인지 알아보시오. 12의 $\frac{1}{3}$은 □입니다. 12의 $\frac{2}{3}$는 □입니다.

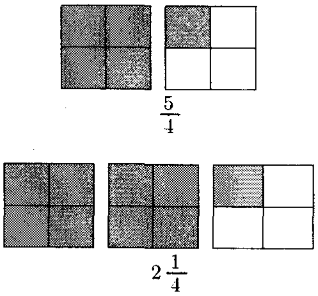
➡ 전체-부분 모델이다. 그러나 여기서의 전체는 '질적인 전체'가 아니라 '자연수로 규정된 이산량'이라는 점에서 앞서의 질적인 전체-부분 모델과는 구별된다. 여기서 등장하는 '전체의 □분의 □'이라는 표현은 앞서의 '전체를 □로 나눈 것 중의 □'라는 표현과는 크게 다르다. '전체의 □분의 □'이라는 표현에서는 '부분으로서의 분수'의 성격이 강하지만 여기서는 '작용소 개념'이 더 두드러진다.

【4-가: 96-97】 $\frac{1}{4}$이 5이면 얼마인지 색을 칠하고 분수로 나타내어 보시오.

약속하기: $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$와 같이 분자가 분모와 같거나 분모보다 큰 분수를 가분수라고 합니다.

종이 2장과 $\frac{1}{4}$만큼을 색칠하고 분수로 나타내어 보시오.

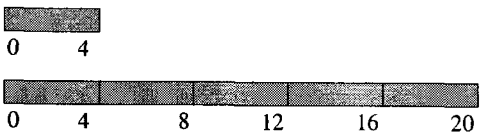
약속하기: $2\frac{1}{4}$같은 분수를 대분수라고 합니다.



[그림 Ⅳ-7]

➡ 전체-부분 모델에서부터 출발하여 가분수를 거쳐 대분수로 나아가는 변종 전체-부분 모델이다. 여기서 중요한 것은 전체가 왜 1로 나타내어지는가이다. 그것은 단위분수 $\frac{1}{4}$이 네 번 중첩된 것으로부터 '도출'되는 것이지 처음부터 '정의'되는 것이 아니다.

【4-나: 6-7】 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내시오.



[그림 Ⅳ-8]

➡ 비교 모델이다. 전체-부분 모델과는 달리 두개의 나란한 선분으로 시각화된다.

【4-나: 8】 $3m$짜리 색 테이프를 네 사람이 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 사람이 가지는 색 테이프를 색칠하시오. 몇 미터입니까? $3 \div 4$는 분수로 얼마라고 생각합니까? (자연수)÷(자연수)를 분수로 나타내는 방법을 말하여 보시오

➡ 분배 모델이다. 나눗셈으로서의 분수개념으로 급격히 나아간다.

【5-가: 70-75】 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$를 색칠하여 나타내어 보시오. $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$를 통분하여 보시오. $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$가 얼마라고 생각합니까? 분모가 다른 두 분수의 합을 구하는 방법을 말하여 보시오. 그림에 $2\frac{1}{2}$과 $3\frac{2}{5}$를 색칠하여 나타내어 보시오. $2\frac{1}{2}+3\frac{2}{5}$는 얼마라고 생각합니까? 두 대분수의 합을 구하는 방법을 말하여 보시오.

➡ 변종 전체-부분 모델이다. 알고리듬의 형식화가 급격히 진행된다.

【5-가: 121-122】 직사각형의 가로를 4등분한 다음, 직사각형의 $\frac{3}{4}$만큼 노란색을 칠하여 보시오. 세로를 7등분한 다음, 노란색을 칠한 부분의 $\frac{5}{7}$만큼 파란색을 겹쳐서 칠하여 보시오. 겹쳐서 색칠한 부분은 전체의 얼마입니까? $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$은 얼마라고 생각합니까?

➡ 가로와 세로를 나타내는 분수에 명확한 길이 단위를 붙이지 않았기 때문에 직사각형의 넓이 모델이라고 보기 어렵다. 제수와 피제수 그리고 결과 모두 작용소로 보아야 하므로 분수 곱셈에 대한 작용소 해석이다. 알고리듬의 형식화가 급격하게 진행된다.

【6-나: 6-9】 $\frac{5}{6}m$를 $\frac{2}{6}m$씩 자르면 □도막이 되고, 나머지는 $\frac{2}{6}m$에 대하여 □입니다.

$5 \div 2$와 $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6}$의 몫이 같다고 생각합니까? $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = \square \div \square$. 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 계산하는 방법을 알아보시오.

➡ 한국의 교재에서 드물게도 측정수 모델을 사용한 사례이다. 포함제 해석을 통해서 분수의 나눗셈 알고리듬을 설명한다. 형식화의 속도는 급격하다.

V. McLellan, MiC, 한국의 교재 비교

이 장에서는 지금까지의 분석 결과를 바탕으로 세 교재를 비교하여 그 공통점과 차이점들을 명확히 변별한다. 비교의 첫째 기준은 분수의 어떤 개념과 모델을 채용하는가이고, 둘째 기준은 어떤 방법으로 일반적인 개념과 알고리듬에 도달하는가이다.

우선 McLellan교재의 경우 추구하는 분수 개념은 비와 작용소 개념이며 나눗셈 개념은 나타나지 않는다. McLellan 교재의 가장 큰 특징은 분수 개념과 알고리듬에 도달하는 수단으로서 측정수 모델 하나만을 배타적으로 사용한다는 점이다. 순수한 자연수의 비가 아닌 피자의 등분할과 같은 기하학적인 접근은 전혀 다루어지지 않는다. 이것은 Dewey가 말한 발생적 구성의 원리, 즉 다양한 사례가 아니라 전형적인 하나의 사례가 발생하는 과정을 거칠 때 비로소 그 사례의 생성 과정 속에 잠재해있는 일반적 개념을 알 수 있게 된다는 교수학적 원리에 입각한 것이다. McLellan 교재는 오로지 측정수 모델 하나만을 통해서 비와 작용소 개념, 그리고 분수의 동치관계, 통분, 분수의 사칙계산 등 모든 알고리듬을 설명하고 해석한다.

측정수 모델은 여타의 모델보다도 추상화의 정도가 높기 때문에 분수 개념과 알고리듬을 해석하기에 용이하다는 장점이 있다. 특히 가분수를 정당한 분수로 인정한다는 점도 측정수 모델이 분수 알고리듬을 설명하는데 장점으로 기능한다. 왜냐하면 분수의 사칙계산 알고리듬은 대분수보다는 가분수에서 단순하고 명료하게 설명될 수 있기 때문이다. McLellan교재에서는 측정수 모델을 통해서 분수의 사칙계산 알고리듬을 설명하는 것을 넘어서서 그것을 '발견'시키려고까지 시도한다. 결코 알고리듬을 명시적으로 규정하지 않으며 다양한 적용 상황에서 알고리듬을 무의식적으로 사용하게 함으로써 그것을 점점 자각하도록 유도한다.

비록 알고리듬을 명시적으로 제시하지는 않지만, McLellan 교재에서는 형식적인 훈련을 경시하지 않는다. 형식적인 훈련은 분수의 도입 맥락이자 기반이었던 측정수를 제거하고 순수한 분수에서 사칙계산을 연습하는 것으로서 응용을 위한 준비가 된다. 분수가 적용되는 상황의 종류는 매우 많다고 할 때, 모든 응용 상황을 일일이 다루면서 분수를 추상화하는 일은 불가능할 뿐만 아니라 비경제적이므로, 대부분의 응용 상황은 어떤 일반적인 존재의 특수한 사례로 다루는 것이 불가피하다. '어떤 상황에도 적용할 수 있도록 추상적이고 일반적인 수준에서 익히는 것', 즉 형식적인 훈련이 불가피하다. 예를 들어 분수의 나눗셈 알고리듬은 측정수 모델을 통해서 이해된 다음 형식적으로 훈련을 거쳐서 직사각형 넓이 모델에서의 나눗셈 문제[21]에 응용된다.

McLellan 교재에서는 형식적인 훈련 후에 여

21) 넓이가 $\frac{5}{6}m^2$이고 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}m$일 때 다른 한 변의 길이는 얼마인가?

러 응용 상황을 다룬다. 예를 들면 유산 분배, 광산에의 공동 투자, 물건을 구입해서 이익을 붙여서 파는 문제, 집안의 빚을 형제들이 분할하여 갚는 문제, 집과 대지의 값 계산 문제 등등에 다양하게 적용한다. 이것은 Dewey의 경험주의 교육론에 따라서 수학이 응용되는 다양한 현실 상황을 다루려고 한 시도로 보인다. 그러나 McLellan 교재의 적용 맥락은 그 범위가 상업 거래나 농경 생활에 제한된 것으로서 한국의 교재보다는 풍부하지만 MiC 교재에는 못미친다.

이처럼 McLellan 교재는 측정수라는 튼튼한 기반에 근거하여 비나 알고리듬이라는 일반물에 안전하게 도달하려 했으나 형식적인 훈련 이전에 주어지는 활동이 충분치 못함으로 인해서 그 과정이 급격한 것으로 보인다. 또한 측정수 모델 하나만을 배타적으로 사용한 때문이기도 하겠지만 현실적인 맥락이 풍부하지 못하다보니, 비나 알고리듬을 충실히 이해되기 어려워 보이고 따라서 기계적인 훈련으로 이어질 수도 있을 것 같다. 그러나 이 교재가 나온 시기는 현재와는 비교할 수 없을 정도로 계산 능력이 중시되던 시대였다는 점을 상기한다면, McLellan 교재의 시도는 높이 살 수 있다고 판단된다.

McLellan 교재는 추상성이 높은 측정수 중심이므로 피자 나누기와 같은 기초적인 등분할 활동을 다루지 않는다. 실제로 한국의 교재나 MiC 교재에서 분수를 도입할 때 사용하는 여러 구체적인 조작 활동이 이 교재의 분수 단원에서는 보이지 않는다. 그러나 이 사실로부터 이 교재가 그러한 예비적인 활동을 도외시한다고 볼 수는 없다. Dewey의 분수의 교수학에 의하면 분수와 자연수는 연속적이므로 이러한 예비 활동은 자연수의 사칙계산을 배우는 과정에 이미 충분히 연습되어져야만 하는 것이기 때문이다.

다음으로 MiC 교재를 고찰한다. MiC 교재의 가장 큰 특징은 분수 개념과 알고리듬 지도의 출발점이 형식화되고 공식화된 기성의 완성물(text)이 아니라 현실맥락(context)이라는 점이다. 이 현실맥락은 그 속에 분수의 개념과 알고리듬이 '암묵적으로(implicitly)' 녹아있는 풍부한 의미구조를 가지고 있다. 아동은 현실맥락 문제를 해결하는데 있어서 교사로부터 규격화된 개념과 알고리듬을 건네받지 않고서도, 그 현실상황이 함유하고 있는 풍부한 의미 구조를 바탕으로 비형식적인 전략을 개발하여 스스로 문제를 해결하고, 이 방법을 다양한 현실맥락에 적용시킴으로써 자신의 비형식적인 전략을 점진적으로 세련시켜서, 종국적으로는 교사가 알고 있는 것과 같은 수준은 완전한 개념과 알고리듬에 도달하게 된다. 이것은 Freudenthal이 주장한 개념 지도론인 '심상(mental object)의 구성' 방법에 따른 것이다. 이 방법은 개념이나 알고리듬을 형식화시키고 공식화시켜서 학생들에게 완성된 형태로 제시해준 다음 이러한 정수(精髓)를 간단한 사례부터 시작해서 복잡한 상황에 다양하게 적용함으로써 그 개념과 알고리듬을 점차적으로 이해하게 만들 수 있다는 주장, 즉 '구상화(concretization) 방법'과 대비되는 것이다(Freudenthal, 1983: 33; 정영옥, 1977: 70).

아동이 하나의 현실맥락으로부터 비형식적 전략을 개발하고 그에 따라 주어진 문제를 성공적으로 해결한다면 교사는 아동의 그러한 비형식적 전략을 조기에 형식화시키고 공식화시키려는 유혹을 받기 쉽다. 그러나 아동은 그 속에 내포된 개념과 알고리듬을 무의식적으로 사용할 뿐 아직 명확히 의식하고 있다고 볼 수 없다. MiC 교재에서는 아동의 비형식적 방법을 쉽사리 형식화해서 명시적으로 드러내려 하지

않으며, 대신에 그러한 방법을 다양한 현실상황에서 반복적으로 적용하게 함으로써 아동이 충분히 익숙해질 때까지 기다린다. 사실상 MiC 교재에는 중학교 3학년까지의 교재임에도 불구하고 분수의 사칙계산 알고리듬을 명시적으로는 제시하지 않는다. 또한 현실맥락이 제거된 상태에서 순수한 분수 사이의 형식적인 계산 연습도 전무하다. 이러한 측면은 간단한 사례를 통해서 개념과 알고리듬을 급격하게 공식화시킨 다음 서둘러 형식적인 연습으로 진행하는 McLellan과 한국의 교재에 크게 대비된다.

MiC 교재에서 개념과 알고리듬을 지도하는 과정을 도식으로 정리하면 다음과 같다.

i) 현실맥락(context)
ii) 학생 스스로 비형식적인 문제해결 방법 고안
iii) 이 방법을 다양한 현실맥락에 적용
iv) 충분히 무르익었을 때 점진적으로(progressively) 압축시키고 형식화한다.

이렇듯 현실맥락을 강조하고 형식화를 기피하는 MiC 교재의 철학은 자연스럽게 맥락의 풍부함으로 이어진다. MiC 교재에서는 앞서 II장에서 제시했던 분수의 모든 개념과 모든 모델이 등장한다. 특히 다양한 비교 모델과 측정활동 모델 그리고 분할된 막대(segmented bar)에서의 분수의 비형식적인 덧셈, 비례표를 통한 분수의 비형식적인 나눗셈 등은 여타의 교재와 차별화되는 MiC 교재의 독특함이다.

특히 MiC 교재에서 비 개념은 분수를 넘어서 발전한다. MiC 교재에서 비의 표현 방식은 다양하며(분수, 퍼센트, $a:b$, 소수) 분수는 그 중 하나의 특수한 방식에 불과하다. 이는 비 개념을 분수와 동일시하고 분수를 비의 유일한 표현으로 여겼던 McLellan교재와 대비된다.

이러한 장점에도 불구하고 단점도 존재한다. 첫째는 알고리듬보다 지나치게 개념을 중시한다는 점이다. 수학에서 알고리듬은 개념 못지않게 중요하다. Freudenthal(1973: 141)에 의하면 수학에서 '일체의 개념적인 혁신은 알고리듬이라는 세균으로 자신을 둘러싸며, 알고리듬은 개념적인 깊이를 재는 수단'으로서, 둘 중 어느 하나를 다른 하나보다 높은 것으로 설정함으로써 서로를 대립시켜서는 안 된다.

둘째 문제점은, 알고리듬의 경시와 밀접한 것으로서 형식화와 응용 과정이 전무하다는 것이다. 분수 사칙계산의 알고리듬이 명시적으로 주어지지 않는 것이 그 사례이다. 중학년 3학년 학생이 분수의 알고리듬을 명시적으로 알지 못한다면, 여타의 수학 영역을 배우는데 큰 장애가 될 것은 자명하다. MiC 교재는 완성된 개념과 알고리듬에서 출발하여 그것의 적용을 강조하는 전통적인 방식에 지나치게 반대한 나머지, 반대편 극단으로 달려가서 수학의 본질인 형식화와 그 응용 자체를 부정하는 것이 아닌가하는 의문이 생긴다. Freudenthal이 주장한 것은 '점진적인 형식화'이지 형식화 자체의 부정은 아니라고 생각된다. 극단적인 것은 다시 반작용을 일으켜 반대편 극단으로 치달리게 만드는 새로운 동력이 될 수도 있다.

셋째 문제점은 다양한 현실맥락으로부터의 개념과 알고리듬의 발견을 중시한 나머지 분수에서 유리수까지 이르는 여러 단계 중에서 하위 단계에만 머물고 있다는 점이다. Freudenthal에 의하면 분수의 작용소 양상은 분수의 초기부터 유리수에 이르기까지 세 유형(이 논문 제II장 참조)이 나타나는데 대부분의 교재는 첫째 유형만 다루고 곧바로 유리수로 비약한다는 점에서 문제가 있다. MiC 교재 역시 Freudenthal의 이러한 지적으로부터 자유롭지 못할 것 같다.

마지막은 MiC 교재는 가분수보다는 대분수에

치우쳐 있다는 점이다. 대분수(mixed fraction)라는 용어는 도입하면서도 가분수(improper fraction)라는 용어를 도입하지 않으며 실제로도 가분수는 거의 사용되지 않는다. 대분수보다 가분수가 더 유용한 장면은 알고리듬을 형식화시킬 때라고 한다면, 그러한 형식화 자체를 거부하고 있는 MiC 교재의 입장에서는 굳이 대분수보다 가분수를 중시할 이유가 없을 것이다.

이제는 세 번째로 한국의 교재를 고찰한다. 한국의 교재에서는 분수의 개념 중에서 비와 나눗셈 개념이 나타나지만, 중심이 되는 것은 나눗셈 개념이다. 나눗셈 개념은 분수를 소수로 바꾸는 활동에서 특히 중요하게 사용된다. 그러나 전체적으로 볼 때, 한국의 교재는 개념보다는 알고리듬에 치우쳐 있으며 사칙계산 알고리듬의 형식적인 숙달과 그를 통한 계산 기능의 신장이 보다 중시된다. 한국의 교재에서 알고리듬을 설명할 때 자연수, 진분수, 대분수 등과 같이 여러 경우로 나누는 방식을 취하고 있는데 이것은 알고리듬을 중시하는 것에서부터 자연스럽게 빚어지는 현상이다. 예를 들어 분수의 나눗셈의 경우, (분수)÷(자연수), (대분수)÷(자연수), (분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈), (분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈), (자연수)÷(진분수), (가분수의 나눗셈), (대분수의 나눗셈), (자연수)÷(단위분수)의 모두 여덟 가지 경우로 나누어서 설명되고 훈련되고 있다. 이것은 McLellan교재나 MiC 교재에서는 전혀 나타나지 않고 있는 현상이다.

한국 교재의 둘째 특징은 전체-부분 모델과 변종 전체-부분 모델을 주요 모델로 채용함으로 인해서 가분수보다는 대분수가 중심에 있다는 점이다. 앞서 제 II장에서 고찰하였듯이 한국의 교재에서 진분수는 전체-부분 모델을 사용해서 나타내고, 대분수는 변종 전체-부분 모델을 통해서 나타낸다. 또한 가분수는 정당한 분수로 취급받지 못하며 단지 진분수에서 가분수로 나아가는 가교의 역할을 할 뿐이다. 알고리듬을 설명하는 과정에는 진분수와 대분수 위주의 경향이 잘 나타나 있다. 예를 들어 분수의 곱셈은 가분수의 경우를 배제한 채로 (진분수)×(자연수), (단위분수)×(단위분수), (진분수)×(진분수), (대분수)×(대분수)의 네 경우로만 나누어 설명되고 있다.

그러나 가분수는 그것이 전체-부분 모델을 통해서 나타낼 수 없다는 것 이외에는 가짜 분수라는 부정적인 낙인이 찍혀서 배척될 아무런 이유가 없다. 오히려 가분수는 수학적으로 대분수보다 우수하다. 가분수를 토대로 한다면 분수 곱셈의 알고리듬은 위에서처럼 복잡하게 여러 경우로 나누어 설명할 필요가 없다. $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$ 라든가 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$에서 알 수 있는 것과 같이 분수의 알고리듬은 대분수보다는 가분수에서 가장 단순하고 일반적으로 설명될 수 있다. 또한 중학교 이후부터의 수학에서 대분수는 거의 등장하지 않고 오히려 가분수가 보편적인 분수 표현 양식으로 채용된다. 예를 들어 유리수는 "분자와 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수"로 정의된다(박두일외, 2002: 56). 초등 수학은 중등 수학으로 연속적으로 이어져야함에도 불구하고, 전체-부분 모델로 표현할 수 없다는 점 때문에 가분수를 부인하는 것은 마치 말 앞에 마차를 매단 것과 같이 주객이 전도된 형국이라고 말할 수 있다.

한국의 교재의 또 다른 특징은 분수의 사칙 계산식 안에서는 결코 '$\frac{2}{3}$컵'과 같은 부분으로서의 분수 표현이나 '$\frac{2}{3}m$'와 같은 측정수 표현을 쓰지 않는다는 것이다. 그것은 '계산'은 오직 $\frac{2}{3}$와 같은 '순수한' 분수에 대해서만

실행될 수 있는 것이지, $\frac{2}{3}$컵이나 $\frac{2}{3}m$와 같은 양에 대해서는 불가한 것이라는 견해에 근거한 것으로 생각된다. 이와는 달리 MiC 교재나 McLellan 교재에서는 형식화가 이루어지기 어려운 낮은 수준에서는 반드시 '$\frac{1}{2}$컵 + $\frac{1}{3}$컵 = $\frac{5}{6}$컵'나 '$(\frac{1}{3}m)+(\frac{1}{2}m)=\frac{5}{6}m$' 같은 비형식적 표현을 써야 한다고 말한다.

한국의 교재의 가장 큰 특징은 개념과 알고리듬을 빠르고 강하게 형식화한다는 점이다. 한국의 교재에서는 단순한 하나의 사례만 다룬 후 곧바로 완성된 개념이나 알고리듬을 형식화해서 제시한 다음 숙달을 위한 연습을 거치고 마지막으로 적용문제를 다룬다. 물론 개념이나 알고리듬을 형식화하기 이전에 '생활에서 알아보기'를 통해서 의미를 풍부하게 하려는 시도를 드러내기는 하지만 그 맥락이 그리 풍부하지는 못하며, 따라서 이후의 급격한 형식화에서 비롯되는 의미의 부재를 보충하기에는 미흡하다. 결국 한국의 교재에서 개념과 알고리듬의 이해는 그것이 형식적인 공식으로 제시되기 이전의 생활에서 알아보기와 사례 들기를 통해서가 아니라 그 이후의 다양한 연습과 적용을 통해서 성취된다고 볼 수 있다. 이 방법은 구상화(concretization) 방법과 유사한 것으로서, Freudenthal이 말했던 심상(mental object)의 구성과 대비되는 것이다. 한국의 교재가 취하고 있는 방법을 도식화하면 다음과 같다.

i) 형식화와 공식화를 통해서 개념이나 알고리듬의 정수(精髓)를 제시
ii) 간단한 사례에 적용 연습함으로써 개념과 알고리듬을 이해
iii) 이해된 개념과 알고리듬을 여러 상황에 응용.

사실 이러한 구상화 방법이 성립하기 위해서는 독특한 인식론적인 가정이 전제되어야만 한다. 그것은 첫째 어떤 개념이나 알고리듬과 같은 일반물의 정수는 그것에 속하는 개별물 없이도 독자적으로 아동들에게 심어질 수 있다는 것이고, 둘째 아동들은 이렇게 심어진 정수를 처음에는 이해하지 못하지만 이후 반복적으로 다양한 사례들에의 적용 연습을 거친다면 '점진적으로' 이해할 수 있다는 것이다. 따라서 이 구상화 방법을 따른다면 이해한다라는 것은 아동의 마음에 새로운 무엇이 추가되는 과정일수는 없으며 다만 이미 아동의 마음속에 형식적이고 공식적으로 심어진 정수를 '이전보다 더 명료하게' 파악하게 되는 것일 수밖에 없게 된다.

이 장의 논의는 다음 표와 같이 요약할 수 있다.

<표 V-1>

구 분	McLellan	MiC	한국
현실맥락의 다양성	그저 그렇다	풍부하다	약하다
개념	비	비, 작용소, 나눗셈	비, 나눗셈
개념의 형식화 속도	빠르다	느리다	빠르다
개념의 형식화 정도	강하다	약하다	강하다
알고리듬의 형식화 속도	빠르다	느리다	빠르다
알고리듬의 형식화 정도	약하다	약하다	강하다

VI. 결 론

이 논문에서는 McLellan 교재와 MiC 교재 그리고 한국의 교재의 분수 단원을 분석·비교하여 차이점과 공통점을 변별한 다음, 그것을 보다 일반적인 분수의 교수학 및 각 교재의 배

경 사상과 관련지어 이해하고 평가하였다. 분수의 개념과 알고리듬을 다루는데 있어서 세 교재는 서로 명확하게 구별되는 독특한 특징을 가지고 있으며 그러한 차이는 우연적인 것이 아니라 각각이 근거로 하는 뚜렷한 철학에 기인하는 것임을 알 수 있었다. McLellan의 교재는 Dewey의 경험주의 수학교육론, MiC 교재는 Freudenthal의 현실주의 수학교육론을 반영하고 있었다. 한국의 교재는 하나의 명시적인 단어로 명명될 수 있는 배경철학을 가지고 있지는 않지만, 신속한 형식화와 그 결과를 다양하게 적용하는 연습을 추구하는 전통적인 형식주의 수학교육이론을 따르는 것으로 판단되었다.

그러나 각 교재가 자신의 배경 사상의 주장을 모두 반영하고 있는 것은 아니었다. Dewey는 기계적이고 형식적인 연습을 매우 경계했음에도 불구하고 McLellan 교재는 형식적인 계산 연습에도 많은 비중을 두고 있다. Freudenthal은 분수에서부터 유리수에 이르는 여러 수준을 모두 구현함으로써 분수의 풍부한 교수학적 현상을 반영해야 한다고 주장했음에도 불구하고, MiC 교재는 낮은 수준의 현실맥락에 치우치고 유리수에 가까운 수준의 맥락이 경시되고 있다.

Freudenthal은 분수 모델과 이러한 모델로부터 유리수에까지 오르는 경로는 매우 다양하며 각각의 경로는 여러 수준으로 이루어지므로, 분수의 교수학은 이러한 분수의 현상학적 다양성을 반영하고 특히 분수에서부터 유리수까지의 여러 수준을 모두 구비해야만 한다고 말한다. 그러나 각 교재는 분수의 현상학적 전모를 모두 드러내지 못하고 있다. McLellan의 교재는 추상성이 높은 측정수에만 의존하다보니 하위 수준에서 취약하였고, MiC 교재는 하위 수준에서의 맥락은 풍부하지만 유리수에 근접한 상위 수준에서는 취약하였으며, 한국의 교재는 개념보다는 알고리듬 특히 알고리듬의 형식화와 적용 연습에 치우친 나머지 낮은 수준의 현실맥락을 소홀히 하고 있다. 그 원인을 각 교재의 배경사상 탓으로 돌릴 수는 없을 것 같다. 현상학적으로 볼 때 대양처럼 드넓은 분수 자체의 특성이 통합적이고 일관된 분수의 교수학과 그에 입각한 교재 제작을 어렵게 만드는 주요 원인으로 생각된다. 이 논문에서의 세 교재에 대한 시각은 어느 하나가 다른 하나보다 우월하다거나 열등하다는 이분법이 아니었다. 차후에 개발되는 교재는 위의 세 교재의 장점을 모두 취하여 분수라는 단일체의 현상학적 전모를 드러낼 수 있어야 한다고 생각된다.

참고문헌

강지형 외 6인(2004). **초등수학교육**. 서울: 동명사.

교육인적자원부(1998). **초등학교 교육과정 해설(IV)**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002a). **수학 3-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002b). **수학 3-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002c). **수학 4-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002d). **수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002e). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002f). **수학 5-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002g). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2002h). **수학 6-나**. 서울: 대한

교과서주식회사.

박교식 · 송상헌 · 임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구. **학교수학, 6**(3), 235-250.

박두일 외(2002). **수학 7-가**. 서울: (주)교학사.

변희현(2005). **소수개념의 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

임재훈 · 김수미 · 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2), 103-122.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Abels, M., Gravemeijer, K., Cole, B. R., Pligge, M, A., & Meyer, M. R. (1997). Cereal numbers: *Mathematics in context: a connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

Dewey, J., & McLellan, J. A. (1895). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic.* New York: D. Appleton company.

Dewey, J. (1891). How do concept arise from percept. In J. A. Boydston (Ed.), *John Dewey: the early works 1895-1898,* v. 5. Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

__________(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Galen, F., Wijers, M., Burrill, G., & Spence, M. S. (1997). Some of the parts: *Mathematics in context: a connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

Gravemeijer, K., Boswinkel, N., Meyer, M. R., & Shew, J. A. (1997). Measure for measure: *Mathematics in context: a connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

Keijzer, R., Galen, F., Gravemeijer, K., Shew, J. A., Cole, B. R., & Brendefur, J. (1997). Fraction times: *Mathematics in context: a connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

McLellan, J. A., & Ames, A. F. (1902). *The public school arithmetic for grammar grades.* New York: The Macmillan Company.

NCTM (1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향.** (구광조 · 오병승 · 류희찬, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1989년 출판).

Smith Ⅲ, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright, G. (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and propositions* (2002 yearbook, pp. 2-17). Reston: NCTM.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick et al. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

A Comparative Study on Didactical Aspects of Fraction Concept and Algorithm Appeared in the Textbook of McLellan, MiC, and Korea

Kang, Heung Kyu (Gong-Ju National University of Education)

In this article, I identified many points of commonness and differences appeared in the fraction units of three conspicuous textbooks —McLellan, MiC and Korea. After that, I evaluated these results with reference to more general didactics on which each text-book is based. A background theory of Mc-Lellan's textbook was Dewey's experi-entialism, and that of MiC was Freudenthal's realistic mathematics education.

Through this study, I have reached the fact that these three textbooks could not exhibit the phenomenological wholeness of fraction. Driven by measuring number model which is very abstractive, McLellan's text-book is disregarding the lower level context. MiC textbook, driven by real context, is ignoring higher level model which is close to rational number concept. From an excess of formulation and practice of algorithm, Korea's textbook is overlooking the real context.

It is necessary that a textbook which would display the phenomenological whole-ness of fraction is developed.

* **Key words** : fraction concept(분수 개념), fraction algorithm(분수 알고리듬), fraction model (분수 모델), Dewey, Freudenthal, McLellan, Mathematics in Context

논문접수 : 2005. 9. 28
심사완료 : 2005. 11. 1