

---

# SA 여파기의 차수에 따른 성능 평가

송종관\* · 윤병우\*

The performance of SA filters according to the filter order

Jongkwan Song\* · Byung Woo Yoon\*

---

이 연구는 2004학년도 경성대학교 연구년 과제로 수행된 것입니다

---

## 요 약

SA 여파기는 다단 여파기의 일종으로 첫째단을 이루는 부여파기의 최대 크기를 제한함으로써 여파기 성능과 구현의 복잡도를 조절할 수 있는 매우 유연한 구조를 가진다. 본 연구에서는 부 여파기의 함수(max, min, exclusive-OR, med)에 따른 성능의 변화와 잡음의 특성에 따른 성능 변화, 그리고 차수(filter order) 변화에 따른 성능 변화를 알아본다. 이를 위하여 평균 최소 자승 오차(MSE: mean squared error)를 최소화 하는 최적 여파기를 설계하고, 모의실험을 통하여 각 SA 여파기 성능의 변화를 보였다. 실험 결과 여러 가지 잡음에서 여파기 설계에 관한 기초적 가이드라인을 제시하였으며, 지금까지 밝혀지지 않았던 몇 가지 새로운 사실을 밝혔다.

## ABSTRACT

The SA filters have a very flexible structure by limiting the maximum subwindow size. This flexible structure presents an effective trade-off between the complexity and performance of the filters. In this paper, experimental results showing the performance variation according to the change of filter order and subfilter type(such as (max, min, exclusive-OR, med) are presented. We designed optimal SA filters minimizing MSE for the various noise conditions. These results show several new properties of SA filters.

## 키워드

SA filters, LWOS filters, ETBF, median filters, nonlinear filters, SAM filters, optimal filter design

## I. 서 론

SA(subset averaged) 여파기는 ETBF[1]의 새로운 다진 영역 표현으로 임계치 분해 성질[2]을 갖는 모든 여파기를 포함한다. 따라서 SA 여파기는 선형 FIR 여파

기 뿐 아니라 순서통계에 기초한 미디언 여파기, 가중치 미디언 여파기[3,4], L- 여파기[5], 스택 여파기[6], TBF[7] 등과 같은 매우 광범위한 여파기 군(filter class)을 포함 한다.

SA 여파기[8]는 다단 여파기(multi-stage filters)의 형

태를 가지며 두개의 단(stage)으로 구성된다. 이 여파기의 첫 번째 단계는 max(maximum), min(minimum), xor(exclusive-OR)와 같은 비선형 연산자가 사용되며, 이들 첫번째 출력들의 가중 평균으로 최종 출력이 주어진다. 첫번째단에 사용된 연산자의 종류에 따라서 SA 여파기는 SAMAX, SAMIN, SAXOR 여파기로 명명되며, 첫번째단 여파기의 최대 부윈도우 크기(maximum subwindow size)를 제한함으로써 여파기의 성능을 다소 희생하면서 구현의 복잡도를 줄일 수 있다. 물론 부여파기(첫번째단에 사용된 여파기)의 크기에 제한이 없는 경우 각 SA 여파기(SAMAX, SAMIN, SAXOR)는 ETBF와 동일한 여파기 군을 형성하며 따라서 각 SA 여파기는 이론적으로 모두 동일한 성능을 보인다.

SA 여파기는 이와 같은 구조적 특성으로 인해 신호 및 잡음의 특성과 요구되는 구현의 복잡도를 고려한 유연한 여파기의 설계가 가능해진다. 그러나 이를 위해서는 여러 가지 잡음 환경에서 부여파기(첫번째단에 사용된 여파기)의 단(order), 즉 첫번째단 부여파기의 최대 창 크기의 변화에 따른 여파기 성능의 변화에 대한 연구가 반드시 이루어져야 한다. 따라서 본 연구에서는 가우스 잡음, 임펄스 잡음 및 이들 잡음이 동시에 존재하는 혼합 잡음 환경에서 최소자승오차(MSE: mean squared error)를 최소화하는 최적 SA 여파기를 설계하고, SA 여파기의 차수 변화에 따른 성능을 평가한다.

## II. SA 여파기

$X(n)$ 을 입력 신호라 하고  $\mathbf{X}(n)$ 을 시간  $n$ 에서 윈도우(window) 안에 있는  $N$  개의 입력 샘플로 구성되는 벡터라 하자. 즉,

$$\mathbf{X}(n) = [X(n-L_1), \dots, X(n), \dots, X(n+L_2)]^t \\ = [X_1(n), \dots, X_k(n), \dots, X_N(n)]^t.$$

여기서  $N = L_1 + L_2 + 1$ 이며  $X_k(n) = X(n-L_1-1+k)$ 이다. 이 때 입력 샘플  $X_k$ 는  $\{0, 1, \dots, M\}$  중의 한 값을 갖는다고 가정한다. 앞으로는 표기(notation)를 간단히 하기 위하여 시간 계수  $n$ 을 생략한다.

ETBF는 다음과 같이 정의된다[1].

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{m=1}^M f_B(\mathbf{x}^m) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}^m = [T_m(X_1), T_m(X_2), \dots, T_m(X_N)]^t$ 이며,  $T_m(X_k)$ 는  $X_k \geq m$ 이면 1을 아니면 0을 출력으로 내는 임계 연산자(threshold operator)이다.  $f_B: \{0, 1\}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 은 이진 입력 벡터  $\mathbf{x}$ 를 실수  $f_B(\mathbf{x})$ 로 대응시키는 함수이다. 이 때  $f_B(\cdot)$ 가 부울 함수인 경우 ETBF는 TBF[6]가 되며,  $f_B(\cdot)$ 이 양 부울 함수(positive Boolean function)인 경우 ETBF는 스택 여파기[5]가 되고,  $f_B(\cdot)$ 이 가중 평균 연산자라면 ETBF는 선형 FIR 여파기가 된다. 식 (1)의 ETBF는 이진 영역 함수인  $f_B(\cdot)$ 에 의해 완전히 규명된다. 또 다른 방법으로, 식 (1)의 ETBF는 모든 가능한 입력 벡터와 그것에 대응하는 결과 값을 나열하는 확장 진리표[1]에 의해 기술되어질 수 있다.

윈도우의 크기가  $N$ 인 SA 여파기는 다음과 같이 주어진다.

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{h}^t \mathbf{Z}_f = h_0 + \sum_{i=1}^N F_f^i(\mathbf{X}) \quad (2)$$

여기서

$$F_f^i(\mathbf{X}) = \sum_{\substack{m_i=1 \\ m_i \neq m_{i-1} \neq \dots \neq m_1}}^3 \dots$$

$\dots \sum_{m_1=1}^3 h_i(m_1, \dots, m_i) f(X_{m_1}, \dots, X_{m_i})$  이 고

$f(\cdot)$ 는 max, min, xor에 해당하는 다진 영역 연산자(multi-level operator)이다[8]. 또한 벡터  $\mathbf{h}$ 와  $\mathbf{Z}_f$ 는  $2^N$ 의 길이를 갖는 계수 벡터(coefficent vector)와 관측 벡터(observation vector)로 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1(1), \dots, h_1(N), h_2(1,2), h_2(1,3), \dots \\ \dots, h_2(N-1, N), \dots, h_N(1, \dots, N))^t \\ \mathbf{Z} = (1, X_1, \dots, X_N, f(X_1, X_2), f(X_1, X_3), \dots$$

$$\dots, f(X_{N-1}, X_N), f(X_1, \dots, X_N))^t$$

예를 들어  $N=3$ 인 경우 SAMIN 여파기는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} F(\mathbf{X}) &= h_0 + F_{\min}^1(\mathbf{X}) + F_{\min}^2(\mathbf{X}) + F_{\min}^3(\mathbf{X}) \\ &= h_0 \\ &\quad + h_1(1)X_1 + h_1(2)X_2 + h_1(3)X_3 \\ &\quad + h_2(1,2)\min(X_1, X_2) \\ &\quad + h_2(1,3)\min(X_1, X_3) \\ &\quad + h_2(2,3)\min(X_2, X_3) \\ &\quad + h_3(1,2,3)\min(X_1, X_2, X_3) \\ &= \mathbf{h}^t \mathbf{Z}_{\min} \end{aligned}$$

여기서

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1(1), h_1(2), h_1(3), h_2(1,2), h_2(1,3), h_2(2,3), h_3(1,2,3))^t$$

$$\mathbf{Z}_{\min} = (1, X_1, X_2, X_3, \min(X_1, X_2),$$

$$\min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3), \min(X_1, X_2, X_3))^t$$

이며, 관측 벡터의 차원( $K$ )은  $2^3 = 8$ 이 된다.

이들 SA 여파기의 차수를 제한함으로써 여파기의 여러 가지 부분군(subclass) 여파기가 가능해진다. 앞의 예제처럼 윈도우의 크기가 3인 경우, 여파기 차수(부여파기의 최대 입력 샘플 수)를 2로 제한하면 관측 벡터의 길이  $K=7$ 이 되며, 차수를 1로 제한하면  $K=4$ 가 된다. 차수가 1인인 경우  $h_0=0$ 로 가정하면 이 여파기는 선형 FIR 여파기가 된다.

### III. SA 여파기의 최적 설계

원 신호를  $S(n)$ 이라고하고, 이 신호가 잡음에 의해 왜곡되어 입력 신호  $X(n)$ 으로 주어진다고 하자. 이때 최적화를 위해서는 입력 샘플의 집합  $X(n), X(n-1), \dots, X(n-N+1)$ 로부터 원 신호  $S(n)$ 을 추정하여야 한다. 앞에서와 마찬가지로 표기를 간단히 하기 위하여 입력신호와 원 신호에서 시간 계수  $n$ 을 생략하고 각각  $\mathbf{X}$ 와  $\mathbf{S}$ 로 표기하기로 한다.

다음의 평균자승오차(MSE: mean squared error)를 고려해 보자

$$J(\mathbf{h}) = E[(S - \mathbf{h}^t \mathbf{Z}_f)^2] \quad (3)$$

여기서  $E[\cdot]$ 는 기대치 연산자(expectation operator)를 나타내며,  $\mathbf{h}$ 와  $\mathbf{Z}_f$ 는 각각  $K$ 차원을 갖는 여파기 계수 벡터와 관측벡터이다.  $J(\mathbf{h})$ 를 최소화하는  $\mathbf{h}$ 를 구하는 문제는 일반적인 선형 추정이론의 문제이며 그 결과는 다음과 같이 주어진다.

$$[\mathbf{R}_{xx}] \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}_{dx} \quad (4)$$

여기서  $[\mathbf{R}_{xx}] = E[\mathbf{Z}_f \mathbf{Z}_f^t]$ 로 정의되는  $K \times K$  자기상관행렬이며,  $\mathbf{R}_{dx} = E[\mathbf{S} \mathbf{Z}_f]$ 로 주어지는 상호상관행렬이다. 만일  $[\mathbf{R}_{xx}]$ 와  $\mathbf{R}_{dx}$ 가 알려져 있다면 최적 여파기의 설계는 단순히 식 (4)를 푸는 것으로 완료된다. 그러나 실제의 경우에는  $[\mathbf{R}_{xx}]$ 와  $\mathbf{R}_{dx}$ 가 알려져 있지 않으며, 신호에서 직접 추정하여야 한다.

SA여파기의 성능을 알아보기 위하여 본 연구에서는 가산성 백색 잡음에 의해 오염된 AR(autoregressive) 신호를 사용하였다. 사용된 신호는 다음과 같은 1차 AR 신호이다.

$$S(n) = \rho S(n-1) + W(n) \quad (5)$$

여기서  $W(n)$ 은 평균이 0이고 분산이 1인 백색 가우스 잡음이며, 상수  $\rho$ 는 0.9로 설정하였다. 입력 신호  $X(n)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$X(n) = S(n) + \eta(n) \quad (6)$$

여기서  $\eta(n)$ 은 가산 잡음으로, 실험에서는 세 가지 잡음을 사용하였다. 첫째, 잡음  $\eta(n)$ 의 분산이 2.0인 가우스 잡음을 사용하였다. 둘째, 확률  $P_\eta = 0.05$ 인 임펄스 잡음으로 임펄스의 크기는  $\pm 10.0$ 이며 양과 음의 잡음이 동일 확률을 갖는다. 셋째, 혼합 잡음으로 앞의 가우스 잡음과 임펄스 잡음이 동시에 존재하는 경우이다. 이 세 가지 잡음 환경에서 SA 여파기를 각

각 최적 설계하고 그 성능을 비교하였으며 그 결과를 표 1에 보였다.

표 1. AR 신호에 대한 최적SA여파기의 성능 (a) 가우스 잡음( $\sigma_\eta^2 = 2.0$ ), (b) 임펄스 잡음 ( $P_\eta = 0.05$ , 임펄스 높이는  $\pm 10.0$ ), (c) 혼합잡음  
 Table 1. The performance of optimal SA filters for AR signal. (a) Gaussian noise( $\sigma_\eta^2 = 2.0$ ), (b) impulsive noise( $P_\eta = 0.05$ , 임펄스 높이는  $\pm 10.0$ ), (c) mixed noise

Order (L)	K	SAMAX	SAMIN	SAXOR
1	6	1.395041	1.395042	1.395041
2	16	1.394908	1.394908	1.394908
3	26	1.394780	1.394784	1.394780
4	31	1.394610	1.394607	1.394610
5	32	1.394396	1.394399	1.394396

(a)

Order (L)	K	SAMAX	SAMIN	SAXOR
1	6	1.564534	1.564534	1.564534
2	16	1.564197	1.564193	1.564196
3	26	0.758425	0.758425	0.758423
4	31	0.757789	0.757790	0.757789
5	32	0.724176	0.724157	0.723967

(b)

Order (L)	K	SAMAX	SAMIN	SAXOR
1	6	2.104364	2.104364	2.104364
2	16	2.104145	2.104143	2.104143
3	26	1.798272	1.798259	1.798269
4	31	1.797864	1.797856	1.797861
5	32	1.797100	1.797097	1.797102

(c)

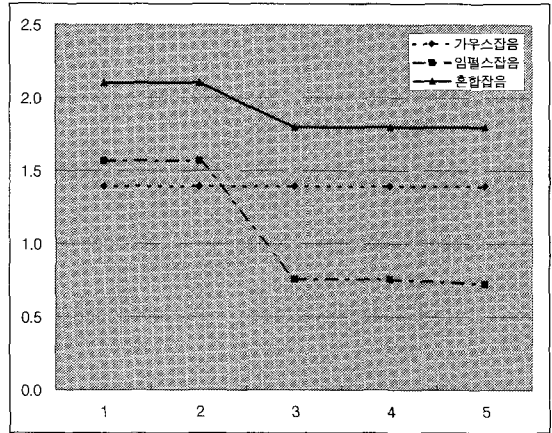


그림 1. SAMAX 여파기의 차수 증가에 따른 성능 변화

Fig. 1. The performance of SAMAX filters versus filter order

이 실험 결과에서 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

첫째, 가우스 잡음 환경에서는 여파기의 차수(L)가 증가하여도 성능의 향상이 이루어지지 않는다. 이는 이미 충분히 예견된 결과로 가우스 잡음 환경에서의 최소자승오차 기준에서의 최적 여파기는 선형 여파기라는 알려진 사실과 부합된다. 따라서 가우스 잡음 환경에서는 여파기의 차수를 키우는 것은 성능향상에 도움이 되지 않으며 같은 구형 복잡도 하에서는 여파기 윈도우의 크기를 키우는 것이 성능을 향상 시킨다.

둘째, SA여파기의 부여파기 종류가 다른 경우에도 모든 잡음 환경 하에서 동일한 성능을 보인다. 즉, SAMAX, SAMIN, SAXOR여파기가 모두 동일한 성능을 보인다는 사실이다. 여파기 차수가 여파기의 윈도우 크기와 동일한 경우 즉, full-order SA 여파기의 경우 SAMAX, SAMIN, SAXOR여파기는 모두 ETBF를 모두 포함하므로 이들 여파기는 동일 여파기 군을 표현한다는 사실은 이미 이론적으로 증명된 사실이다[8]. 그러나 여파기의 차수가 윈도우의 크기보다 작은 경우에도 동일한 성능을 보인다는 사실을 매우 주목할 필요가 있다. 예를 들어 차수가 3인 SAMAX 여파기와 차수가 3인 SAMIN 여파기의 성능이 동일하다는 점이다. 이는 이론적으로 증명된 바 없는 것으로 앞으로 규명되어야 할 새로운 사실이다.

셋째, 표 1의 결과를 그래프로 표시한 그림 1의 결

과에서 보듯이 짝수 차수의 증가는 성능의 향상에 도움을 주지 않는다는 사실이다. 그림 1의 결과는 앞의 논의에서 밝혔듯이 SAMAX, SAMIN, SAXOR 여파기가 모두 동일한 성능을 보이므로 이들 중 SAMAX 여파기 한 가지 경우에 대하여만 도시하였으며 차수의 증가가 성능향상에 도움이 되는 임펄스 잡음과 혼합 잡음의 경우에만 결과를 표시하였다. 이 여파기의 차수가 1에서 2로(또는 3에서 4로) 증가하면 여파기의 구현 복잡도의 기준이 되는  $K$ 는 6에서 16으로(26에서 31로) 증가하나 여파기 성능의 향상은 거의 없다. 그러나 차수가 2에서 3으로 증가하면 여파기의 성능은 크게 향상됨을 볼 수 있다.

## V. 결 론

SA 여파기는 두 번째 단이 선형 여파기의 형태를 취하고 있으므로, 기존의 선형 여파기의 최적 설계 방식을 그대로 적용할 수 있다. 본 연구에서는 최소자승 오차(MSE)를 최소화하는 최적 SA 여파기를 설계하는 방법을 제시하고, 이들 여파기의 차수의 변화에 따른 성능 평가를 위하여 실험을 수행하였다.

이번 연구를 통하여 가우스 잡음 환경 하에서 최적 여파기가 선형 FIR 여파기라는 이론적 사실을 실험적으로 확인하였다. 또한 부여파기의 종류의 차이에도 불구하고 각 차수에서 여파기의 성능이 동일하다는 사실과 여파기의 짝수차수 부여파기가 여파기의 성능 향상에 기여하지 못한다는 새로운 사실들을 밝혔다. 이러한 사실은 SA 여파기의 설계에 관한 중요한 가이드 라인을 제시하고 있으며, 보다 면밀한 이론적 규명을 요구한다.

## 참고문헌

[1] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Minimum mean square error filtering over the class of extended threshold

Boolean filters," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp. 97-100, Adelaide, South Australia, 1994.

- [2] J. P. Fitch, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Median filtering by threshold decomposition," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 1183-1188, Dec. 1984.
- [3] O. Yli-Harja, J. Astola, and Y. Neuvo, "Analysis of the properties of median and weighted median filters using threshold logic and stack filter representation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-39, pp. 395-410, Feb. 1991.
- [4] M. K. Prasad and Y. H. Lee, "Analysis of weighted median filters based on inequalities relating the weights," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 11, pp. 115-136, Jan. 1992.
- [5] A. C. Bovik, T. S. Huang, and D. C. Munson Jr., "A generalization of median filtering using linear combinations of order statistics," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 1342-1350, Dec. 1983.
- [6] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Stack filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 898-911, Aug. 1986.
- [7] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Threshold Boolean filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-42, pp. 2022-2036, Aug. 1994.
- [8] 송종관, "ETBF의 새로운 다진영역 표현: SA 여파기", *해양정보통신학회논문지*, 제7권, 제7호, pp. 1556-1562, 2004
- [9] D. H. Kang, J. Song, and Y. H. Lee, "Analysis and optimization of subset averaged median filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 742-746, March, 1996.

저자소개



송종관(Jongkwan Song)

1966년 2월 18일생.  
1989년 2월 부산대학교 전자공학과 졸업(공학사).  
1991년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사).

1995년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학 박사).

1995년~1997년 한국이동통신 중앙연구소 선임연구원으로 근무.

1997년~현재 경성대학교 전기전자·메카트로닉스공학부 부교수로 재직.

※관심분야 : 영상처리 및 통신 등임



윤병우(Byung-Woo Yoon)

1987년 부산대학교 전자공학과 공학사

1989년 부산대학교 전자공학과 공학석사

1992년 부산대학교 전자공학과 공학박사

1993년~1995년 한국전자통신연구원 선임연구원

1995년~현재 경성대학교 전기전자·메카트로닉스공학부 부교수

※관심분야 : 배열안테나, 적용신호처리, 음성신호처리, VLSI 설계 등임