응용통계연구 제 18권 3호, 2005년, pp. 617-625

강도 3의 직교배열을 평가하기 위한 측도

장대흥[1)]

요 약

우리는 직교배열로서 직교계획, 즉 강도(strength)가 2인 직교배열을 주로 이용한다. 그러나, 강도 3인 직교배열은 주효과들과 2인자교호작용이 포함되는 가법모형 하에서 전체최적화(universal optimality)하다는 것이 밝혀져 있다. 그러므로 임의의 배열이 강도 3인 직교배열인가를 평가하는 측도가 필요하다. 이를 확장하면 임의의 배열이 강도 $t(\geq 2)$인 직교배열인가를 평가하는 측도를 제안할 수 있다.

주요용어: 직교배열, 강도

1. 서론

통계적 품질관리나 실험계획법에서 요인의 수가 과다하게 많은 경우 주로 직교배열을 이용하여 실험을 한다. 요인배치법을 완전하게 쓸 수 없을 때 요인배치법의 일부실시법(fractional factorial design), 포화계획(saturated design) 또는 초포화계획(supersaturated design)을 사용한다. Lin(1993, 1995), Li와 Wu(1997), Crosier(2000), Fang, Lin과 Ma(2000)는 이러한 (초)포화계획에 대하여 연구하였다. Fang, Lin, Winker와 Zhang(2000)은 일양계획(uniform design)이라는 개념을 제시하였다. 요인배치법의 일부실시법에 대한 연구는 최근까지 계속되고 있다(Mukerjee와 Wu(1999), Bisgaard와 Gertsbakh(2000), Liao와 Lyer(2000), Suen과 Chen(2000), Zhang과 Park(2000), Cheng과 Mukerjee(2001), Ma, Fang과 Lin(2001)). 비대칭(asymmetric) 직교배열(Dey(2002))이나 직교배열을 Lean 계획과 결합한 방법(Chan, Ma와 Goh(2003))에 대한 논문도 나타나고 있다. 그러나, 우리가 실험계획으로서 직교배열이 아닌 근사직교배열(nearly orthogonal array)을 쓰는 경우 이 근사직교배열의 직교성의 정도를 아는 것이 중요하다. Ma, Fang과 Liski(2000)는 직교배열이나 근사직교배열을 만들기 위하여 필요한 열직교기준을 제시하였다. Jang(2002)은 Ma, Fang과 Liski(2000)이 제안한 개념을 이용하여 근사직교배열의 직교성의 정도를 알 수 있는 측도들을 제안하였다. 이 측도들은 임의의 배열이 강도 2인 직교배열인가를 평가하는 측도들이다.

강도 3인 직교배열은 주효과들과 2인자교호작용들이 포함되는 가법모형 하에서 전체최적화(universal optimality)하다는 것이 밝혀져 있다(Das, Dey와 Midha(2003)). '전체최적화'란 하나의 특별한 판단기준이 아닌 판단기준들의 전체에 대하여 최적화함을 의미한다(Markiewicz(1997), Xu(1999), Druilhet(2004)). Kreher(1996), Chateauneuf, Colbourn과 Kreher(1999), Chateauneuf와 Kreher(2002)는 강도 3인 직교배열에 대하여 언급하고 있다. 그러므로 임의의 배열이 강도 3인 직교배열인가를 평가하는 측도가 필요하다. 이를 확장하면 임의의 배열이 강도 $t(\geq 2)$인 직교배열인가를 평가하는 측도를 제안할 수 있다.

1) (608-737) 부산광역시 남구 대연3동 599-1 부경대학교 수리과학부 통계학전공, 교수
E-mail: dhjang@pknu.ac.kr

2. 배열의 직교성을 평가하기 위한 측도

배열의 직교성(강도가 2인)을 따질 때 다음과 같은 두 가지 조건을 이용한다.

(직교조건 1) 각 열에서 각 수준이 같은 빈도로 나타난다.
(직교조건 2) 임의의 두 개의 열에서 각 수준의 조합이 같은 빈도로 나타난다.

위의 두 가지 조건을 만족하는 계획을 우리는 흔히 직교계획이라 부른다. 그러나 우리는 때에 따라 강도가 3 이상인 직교배열을 찾고자 할 때가 있다. 한 가지 예로 강도가 3인 직교배열은 주효과들과 2인자교호작용들이 포함되는 가법모형 하에서 전체최적화(universal optimality)하다는 것이 밝혀져 있다. 강도가 3인 직교배열은 (직교조건 1)과 (직교조건 2) 외에 다음과 같은 (직교조건 3)을 요구한다.

(직교조건 3) 임의의 세 개의 열에서 각 수준의 조합이 같은 빈도로 나타난다.

이 개념을 확장하면 $N \times r$행렬인 임의의 배열$A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r)$이 강도가 $t(t = 2, 3, \ldots, r)$인 직교배열이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

(직교조건 1) 각 열에서 각 수준이 같은 빈도로 나타난다.
(직교조건 2) 임의의 두 개의 열에서 각 수준의 조합이 같은 빈도로 나타난다.
...
(직교조건t) 임의의 t개의 열에서 각 수준의 조합이 같은 빈도로 나타난다.

이 때 우리는 임의의 배열이 강도 $t(\geq 2)$인 직교배열인가를 평가하는 측도가 필요하게 된다.

Jang(2002)은 근사직교배열의 직교성의 정도를 알 수 있는 측도들을 제안하였다. 이 측도들은 임의의 배열이 강도 2인 직교배열인가를 평가하는 측도들이다. Jang(2002)의 방법을 확장하면 우리는 차원이 $N \times r$이고, i번째 열의 구성요소가 $1, 2, \ldots, q_i$로 이루어져 있는 임의의 배열$A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r)$이 강도가 $t(t = 2, 3, \ldots, r)$인 직교배열인가를 평가하는 측도를 다음과 같이 만들 수 있다.

$$f_{\phi_j}(\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}) =$$

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{j} q_{i_s}} \sum_{k_1=1}^{q_{i_1}} \sum_{k_2=1}^{q_{i_2}} \cdots \sum_{k_j=1}^{q_{i_j}} \phi_j(|N_{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}}(k_1, k_2, \ldots, k_j) - \frac{N}{\prod_{s=1}^{j} q_{i_s}}|)$$

$$D_j(A) = \frac{1}{\binom{r}{j}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq r} \theta_j(f_{\phi_j(\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j})})$$

$$D(A) = \sum_{j=1}^{t} D_j(A)$$

$$O(A) = \frac{1}{1 + D(A)}$$

여기서, $\phi_j(\cdot), \theta_j(\cdot)(j = 1, 2, \ldots, t)$는 각각 $[0, \infty)$에서 단조증가함수이며 $\phi_j(0) = \theta_j(0) = 0(j = 1, 2, \ldots, t)$인 함수이다. $\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}$는 A의 임의의 j개의 열이고, $N_{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}}(k_1, k_2, \ldots, k_j)$는 $\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}$ j개의 열에서 $(k_1, k_2, \ldots, k_j)$수준조합의 빈도수이고, $\frac{N}{\prod_{s=1}^{j} q_{i_s}}$은 $\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}$ j개의 열에서 각 수준조합의 평균빈도수이다.

$O(A)$가 1에 가까울수록 강도가 t인 직교배열에 가깝고 1보다 작을수록 강도가 t인 직교배열에서 멀어진다. $D_j(A)$는 (직교조건 j)를 평가하게 된다. $D_j(A)$값이 0이면 (직교조건 j)를 만족하게 되고, 0보다 클수록 점점 (직교조건 j)를 만족하지 못 하게 된다. 우리는 차례로 $D_1(A), D_2(A)$ 등의 값이 0이 되는 지 검토해 나가다가 $D_t(A)$값까지 0이 되면 이 배열은 강도가 t인 직교배열이 되는 것이다.

Pielou(1966)이 제안한 다양성지수를 이용하면 차원이 $N \times r$인 임의의 배열이 강도가 $t(t = 2, 3, \ldots, r)$ 인 직교배열인가를 평가하기 위한 측도로서 다음과 같은 또 다른 측도를 제시할 수 있다.

$$E_j(A) = \frac{1}{\binom{r}{j}} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_j \le r} J_{i_1, i_2, \ldots, i_j}$$

$$E(A) = \sum_{j=1}^{t} E_j(A)$$

여기서, $J_{i_1, i_2, \ldots, i_j}$는 A에서 임의의 j개의 열인 $\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_j}$ 열들에 대한 균등지수(evenness index)이다.

$E(A)$의 값이 t에 가까울수록 강도가 t인 직교배열에 가깝고 t보다 작을수록 강도가 t인 직교배열에서 멀어진다. $E_j(A)$는 (직교조건 j)를 평가하게 된다. $E_j(A)$값이 1이면 (직교조건 j)를 만족하게 되고, 1보다 작을수록 점점 (직교조건 j)를 만족하지 못 하게 된다. 우리는 차례로 $E_1(A), E_2(A)$ 등의 값이 1이 되는 지 검토해 나가다가 $E_t(A)$값까지 1이 되면 이 배열은 강도가 t인 직교배열이 되는 것이다.

3. 수치 예

차원이 $N \times r$이고, i번째 열의 구성요소가 $1, 2, \ldots, q_i$로 이루어져 있고, 강도가 $t(t = 2, 3, \ldots, r)$인 직교배열을 $OA(N, r, q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_r, t)$라 표기하자. $\phi_j(x) = \theta_j(x) = x$라 놓고 2절에서 제안한 측도를 다음과 같은 3가지 배열 $\mathcal{D}1, \mathcal{D}2, \mathcal{D}3$에 대하여 적용하여 보자.

3.1. $2_{III}{}^{7-4}$계획

이 계획은 선명도(resolution)가 III인 2^7 요인실험법의 $\frac{1}{16}$일부실시법으로서 다음과 같은 정의대비를 이용하면

$$I = ABD = ACE = BCF = ABCG$$

다음과 같이 표현된다.

$$\mathcal{D}1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

참고로 주효과 A의 별명관계를 살펴보면

$$A = BD = CE = FG = BCG = BEF = CDF = DEG = ABCF = ABEG = ACDG$$

$$= ADEF = ABCDE = ABDFG = ACEFG = BCDEFG$$

이 계획은 주효과 끼리는 교락되어 있지 않지만 주효과와 2인자 교호작용이 교락되어 있는 계획이다. 이 계획의 강도를 조사하기 위하여 2절에서 제안한 측도를 계산하면 표 3.1과 같다. 표 3.1을 통하여 이 계획은 강도가 2인 계획임을 알 수 있다. 즉, $OA(8,7,2,2)$라 표기할 수 있다.

표 3.1: 직교성 평가 측도

j	$D_j(A)$	$E_j(A)$
1	0	1
2	0	1
3	0.2	0.9333

3.2. $2_{IV}{}^{7-3}$계획

이 계획은 선명도(resolution)가 IV인 2^7 요인실험법의 $\frac{1}{8}$일부실시법으로서 다음과 같은 정의대비를 이용하면

$$I = BCDE = ACDF = ACEG$$

다음과 같이 표현된다.

$$\mathcal{D}2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

참고로 주효과 A와 A와 관계된 2인자교호작용의 별명관계를 살펴보면

$$A = BDG = BEF = CDF = CEG = ABCDE = ADEFG = ABCFG$$
$$AB = DG = EF = ACDE = ACFG = BCDF = BCEG = ABDEFG$$
$$AC = DF = EG = ABDE = ABFG = BCDG = BCEF = ACDEFG$$
$$AD = BG = CF = ABCE = AEFG = BDEF = CDEG = ABCDFG$$
$$AE = BF = CG = ABCD = ADFG = BDEG = CDEF = ABCEFG$$
$$AF = BE = CD = ABCG = ADEG = BDFG = CEFG = ABCDEF$$
$$AG = BD = CE = ABCF = ADEF = BEFG = CDFG = ABCDEG$$

이 계획은 주효과 끼리, 주효과와 2인자 교호작용끼리 교락되어 있지 않은 계획이다.

이 계획의 강도를 조사하기 위하여 2절에서 제안한 측도를 계산하면 표 3.2와 같다. 표 3.2를 통하여 이 계획은 강도가 3인 계획임을 알 수 있다. 즉, $OA(16,7,2,3)$이라 표기할 수 있다. 강도가 3이란 사실을 위에서 언급한 A와 관계된 2인자교호작용의 별명관계에서 살펴보면 A와 관계된 2인자교호작용은 A와 관계된 또다른 2인자교호작용과는 교락되어 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 A와 관계없는 2인자교호작용과는 교락되어 있음을 알 수 있다.

표 3.2: 직교성 평가 측도

j	$D_j(A)$	$E_j(A)$
1	0	1
2	0	1
3	0	1
4	0.2	0.95

3.3. $2_{VII}{}^{7-1}$계획

이 계획은 선명도(resolution)가 VII인 2^7 요인실험법의 $\frac{1}{2}$일부실시법으로서 다음과 같은 정의대비를 이용하면

$$I = ABCDEFG$$

다음과 같이 표현된다.

$$
\mathcal{D}3' = \begin{pmatrix}
0111111011111111111111110000001111000000000111111000000000000000 \\
0111110111111111110000001111110000111000000100000111110000000000 \\
0111101111110000001111111111110000000001111001000010000111000000 \\
0111011110001110001110001110001110111011101001000010001000111000 \\
0110111101001001101001101001101101110111011000100001000100100110 \\
0101111100100101010101010101011011101110111000010000100010010101 \\
0011111100010010110010110010110111011101111000001000010001001011
\end{pmatrix}
$$

참고로 주효과 A와 A와 관계된 교호작용 중 일부의 별명관계를 살펴보면

$$
\begin{aligned}
A &= BCDEFG \\
AB &= CDEFG \\
ABC &= DEFG \\
ABCD &= EFG
\end{aligned}
$$

3인자 교호작용이 4인자교호작용과 교락되어 있음을 알 수 있다. 이 계획의 강도를 조사하기 위하여 2절에서 제안한 측도를 계산하면 표 3.3와 같다. 표 3.3를 통하여 이 계획은 강도가 6인 계획임을 알 수 있다. 즉, $OA(64, 7, 2, 6)$이라 표기할 수 있다.

표 3.3: 직교성 평가 측도

j	$D_j(A)$	$E_j(A)$
1	0	1
2	0	1
3	0	1
4	0	1
5	0	1
6	0	1
7	0.5	-

4. 결론

본 논문을 통하여 임의의 배열이 강도가 $t(\geq 2)$인 직교배열인가를 평가하는 측도를 제안하였다. 이 측도는 품질관리 산업현장에서 주어진 실험계획을 평가할 수 있는 도구로서 활용될 수 있을 것이다. 또한, 이 측도는 수학의 조합론(combinatorial mathematics) 영역에서도 유용한 도구로 사용할 수 있을 것이다.

참고문헌

Bisgaard, S. and Gertsbakh, I.(2000). 2^{k-p}Experiments with binary responses: Inverse binomial sampling, *Journal of Quality Technology*, **32**, 148-156.

Chan, L., Ma, C., and Goh, T. N.(2003). Orthogonal arrays for experiments with Lean designs, *Journal of Quality Technology*, **35**,123-138.

Chateauneuf, M. A., Colbourn, C. J., and Kreher, D. L.(1999). Covering arrays of strength 3, *Design Codes and Cryptography*, **16**, 235-242.

Chateauneuf, M. A. and Kreher, D. L.(2002). On the state of strength-three covering arrays, *the Journal of Combinatorial Designs*, **10**, 217-238.

Cheng, C. and Mukerjee, R.(2001). Blocked regular fractional factorial designs with maximum estimation capacity, *Annals of Statistics*, **29**, 530-548.

Crosier, R. B. (2000). Some new two-level saturated designs, *Journal of Quality Technology*, **32**, 103-110.

Das, A., Dey, A. and Midha, C. K.(2003). On a property of orthogonal arrays and optimal blocking of fractional factorial plans, *Metrika*, **57**, 127-135.

Dey, A.(2002). Asymmetric orthogonal arrays, *Design Workshop Lecture Notes*, 97-115.

Druilhet, P.(2004). Conditions for optimality in experimental designs, *Linear Algebra and Its Applications*, to appear.

Fang, K., Lin, D. K. J., and Ma, C.(2000). On the construction of multi-level supersaturated designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **86**, 239-252.

Fang, K., Lin, D. K. J., Winker, P., and Zhang, Y.(2000). Uniform design: Theory and application, *Technometrics*, **42**, 237-248.

Jang, D. H.(2002). Measures for evaluating non-orthogonality of experimental designs, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **31**, 249-260.

Kreher, C. J.(1996). Orthogonal arrays of strength 3, *the Journal of Combinatorial Designs*, **4**, 67-69.

Li, W. W. and Wu, C. F. J.(1997). Columnwise-pairwise algorithms with applications to the construction of supersaturated designs, *Technometrics*, **39**, 171-179.

Liao, C. T. and Lyer, H. K.(2000). Optimal 2^{n-p}fractional factorial designs for dispersion effects under a location-dispersion model, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **29**, 823-835.

Lin, D. K. J.(1993). A new class of supersaturated designs, *Technometrics*, **35**, 28-31.

Lin, D. K. J.(1995). Generating systematic supersaturated designs, *Technometrics*, **37**, 213-225.

Ma, C., Fang, K., and Lin, D. K. J.(2001). On the isomorphism of fractional factorial designs, *Journal of Complexity*, **17**, 86-97.

Ma, C., Fang, K., and Liski, E.(2000). A new approach in constructing orthogonal and nearly orthogonal arrays, *Metrika*, **50**, 255-268.

Markiewicz, A.(1997). Properties of information matrices for linear models and universal optimality of experimental designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **59**, 127-137.

Mukerjee, R. and Wu, C. F. J.(1999). Blocking in regular fractional factorials: A projective geometric approach, *Annals of Statistics*, **27**, 1256-1271.

Pielou, E. C.(1966). The measurement of diversity in different types of biological collections, *Journal of Theoretical Biology*, **33**, 305-325.

Suen, C. and Chen, H.(2000). A family of regular fractional factorial designs with maximum resolution, *Journal of Statistical Computing and Simulation*, **66**, 67-78.

Xu, H.(1999). Universally optimal designs for computer experiments, *Statistica Sinica*, **9**, 1083-1088.

Zhang, R. and Park, D.(2000). Optimal blocking of two level fractional factorial designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **91**, 107-121.

[2004년 6월 접수, 2005년 6월 채택]

Measures for Evaluating the Orthogonal Array of Strength 3

Dae-Heung Jang[1)]

ABSTRACT

We usually use orthogonal designs-orthogonal array of strength 2 as orthogonal arrays. It was shown that fractional factorial plans represented by orthogonal arrays of strength 3 are universally optimal under the additive models that includes the mean, all main effects and all two-factor interactions. Therefore, we need the measure for evaluating the orthogonal array of strength 3. We can extend this measure as the measure for evaluating the orthogonal array of strength $t(\geq 2)$.

Keywords: Orthogonal Array, Strength

1) Professor, Division of Mathematical Sciences, Pukyong National University, 599-1, Daeyeon-dong, Nam-gu, Busan 608-737, KOREA
E-mail : dhjang@pknu.ac.kr