

PERTURBATION 방법을 이용한 회전안정화 우주비행체 내부 유동의 안정-불안정 영역 결정

강자영
한국항공대학교

DETERMINATION OF STABLE-UNSTABLE REGIONS OF THE SLOSH MOTION IN SPINNING SPACE VEHICLE BY PERTURBATION TECHNIQUE

Ja Young Kang
Hankuk Aviation University, Goyang, Gyeonggi-do 412 791, Korea
E-mail: jaykang@hau.ac.kr

(Received July 12, 2005; Accepted November 8, 2005)

요 약

본 연구의 목적은 회전안정화 우주비행체 내부에 탑재된 유동질량의 운동을 보다 광범위한 파라미터 영역에 대해 해석하고, 관련 분야에서 활용할 수 있는 적절한 설계 기준을 제공하기 위한 것이다. 문제의 해석을 위해 perturbation 기법을 이용하였고, 그 결과로 파라미터 공간에서의 안정-불안정 영역을 결정할 수 있는 Ince-Strutt 선도를 구하였다. 해석 방법 및 확보된 결과의 적정성을 입증하기 위하여 선도에서 취한 여러 파라미터 값에 대한 수치적 시뮬레이션을 수행하였다. 유동체 운동의 위상평면 분석을 통하여 수행된 해석 과정 및 결과가 적절한 것으로 입증되었으며, 회전 비행체에 탑재된 유동질량의 운동은 파라미터 값의 선택에 따라 여러 가지 형태의 안정-불안정 현상을 유발함을 알 수 있었다.

ABSTRACT

The objectives of this study are to perform extensive analysis on internal mass motion for a wider parameter space and to provide suitable design criteria for a broader applicability for the class of spinning space vehicles. In order to examine the stability criterion determined by a perturbation method, some numerical simulations will be performed and compared at various parameter points. In this paper, Ince-Strutt diagram for determination of stable-unstable regions of the internal mass motion of the spinning thrusting space vehicle in terms of design parameters will be obtained by an analytical method. Also, phase trajectories of the motion will be obtained for various parameter values and their characteristics are compared.

Keywords: stability, Ince-Strutt diagram, attitude motion, slosh, phase plane

1. 서 론

회전안정화 위성체, 우주발사체, 대륙간 탄도탄과 같은 비행체 내부에 적재된 액체 연료의 동적 거동은 오랫동안 많은 항공우주분야 기술자들의 관심을 끌어들였다. 하드웨어의 개발 및 시험을 위한

적극적인 프로그램과 광범위한 실험실 연구로서 우주기술의 개발과 함께 발사체나 우주선에 담긴 추진연료 또는 기타 액체의 운동 해석은 설계 개념이나 제작기법에 많은 영향을 끼쳐왔다. 이러한 관점에서 Abramson(1966)은 견고한 용기에 담긴 유체운동을 주제로 하여 많은 학자들이 수행한 연구의 결과를 편집하여 출판했다. Sumner et al.(1964)는 구형 용기에 담겨 운동을 하는 유체를 간단한 기계적 등가 모델로 대체하여 연구를 하였고, Sayer & Baumgarten(1981)은 Sumner가 이용한 기계적 모델이 어떤 특정한 유체의 높이를 제외하고는 구형 탱크의 심한 경계 곡률 때문에 유체진동의 비선형 특성을 나타내는데 부적합함을 지적하였다. Kana(1987)는 일반 선형 진자와 결합된 비선형 구형 진자모델이 액체의 회전 슬로시의 모든 관찰된 거동을 예측하는데 이용될 수 있고, 이러한 복합 진자 모델의 파라미터들은 결과 유효 중량 및 모멘트 응답들이 정확하게 측정될 수 있도록 결정될 수 있다고 주장했다. 액체의 일부는 첫번째 모드 응답 주파수 이하에서부터 그 이상에 이르는 주파수 범위에 걸쳐 회전운동을 하는 구진자와 유사한 거동을 가지며, 나머지 액체는 일반진자처럼 거동한다. Or(1992)와 Yam et al.(1997)의 연구가 유동 물질을 탑재한 회전체의 운동특성을 기술하는데 비교적 가장 근접하였다고 할 수 있으나 모두 선형화된 운동방정식을 이용하였기 때문에 해당 위성의 운동특성을 규명하는데 한계가 있었다. 이러한 문제점을 보완하고 Star 48 로켓모터를 사용하는 upper stage에 발생한 장동운동의 원인을 찾기 위해 강자영(2003a)은 뉴턴-오일러 방법을 이용하여 비선형의 운동방정식을 유도하고, 이에 점근전개법을 적용하여 시스템에 발생할 수 있는 공진조건들을 구하였다. 그리고 실제 시스템 파라미터들의 값이 주어졌을 때 발생 가능성이 가장 높은 공진조건을 선택하고 수치 시뮬레이션을 통하여 유동질량의 운동특성과 위성체의 각운동량 및 섭동모멘트의 관계를 관찰하였다. 처음부터 이 연구는 upper stage 위성체의 자세 불안정 발생 원인과 현상 규명에 초점이 맞추어져 있었기 때문에, 시스템 파라미터의 특정 영역만이 고려의 대상이 되었다. 그러나 동일 계열의 위성을 설계 변경하거나, 또는 시스템 특성이 유사한 위성을 설계하는 경우에 설계자들에게는 시스템의 안정성이 보장되는 파라미터들의 범위를 결정하는 문제가 관심사항이 아닐 수 없었다. 따라서, 그 후속 연구(강자영 2003b)로서 시스템 설계범위의 전역 안정성(global stability)을 조사하기 위한 실험이 수행되었는데, 이 연구는 위성설계자의 관점을 고려하여 위성체 자세에 영향을 주는 유동질량의 안정성이 정상점(stationary point)이 아닌 다른 영역에서는 어떻게 변화하는가를 관찰하는데 있었다. 정상점이 아닌 영역에서의 안정성을 검증하는 것이기 때문에 이전 연구에서 처럼 해석적 방법을 사용하지 않고 컴퓨터를 이용한 수치적 실험을 통하여 안정-불안정의 영역을 판별하였다. 이 연구는 앞서 수행된 연구에 비해 훨씬 넓은 범위의 파라미터에 대한 안정성을 판별할 수 있었다는 장점이 있었으나 수치적 방법을 통한 실험이었기 때문에 상당량의 노력이 필요했다. 따라서 선행 연구들은 너무 제한적으로 수행되었거나 또는 엄청난 양의 컴퓨터 시뮬레이션 작업을 수반하였다.

본 연구에서는 이러한 선행연구의 단점을 보완하고, 문제점 규명을 위한 체계적인 해석방법 및 파라미터 공간에서의 시스템 안정-불안정의 경계를 제시하고자 수행되었다. 따라서 사용되는 시스템 모델 및 수학적 모델은 이전 연구에서 사용한 모델을 그대로 사용하고, 공진조건을 확장하여 폭넓은 파라미터 공간에서 유동 운동의 안정-불안정 영역을 판별하기 위한 Ince-Strutt 선도를 확보한다. 해석 과정 및 확보된 결과의 적정성을 입증하고, 파라미터 값의 선택에 따른 운동의 형태를 분석하기 위해 수치 시뮬레이션과 유동체 운동의 phase-plane 분석을 수행하기로 한다.

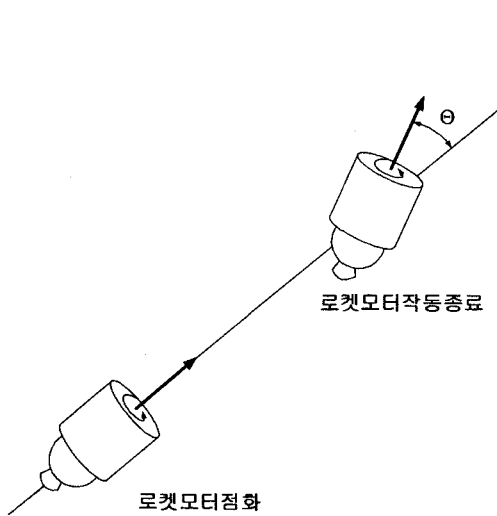


그림 1. 회전형 비행체의 장동 운동.

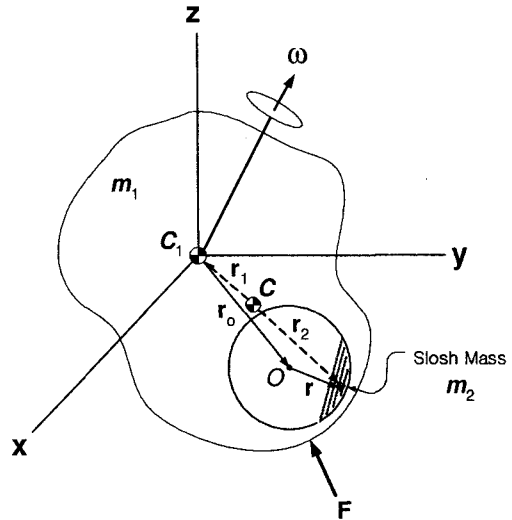


그림 2. 내부에 유동질량이 포함된 시스템 모델.

2. 물리적 모델 및 수학적 모델

그림 1은 로켓모터에 의해 추진되는 회전안정화 우주비행체가 내부 유동으로 인하여 일정 시간이 경과한 이후 자세에 불안정 현상을 보이는 모습을 나타낸 것이다. 즉 로켓모터 점화시에는 비행체는 자세 안정성을 유지하였으나 시간이 경과후 자세운동에 불안정이 발생하였음을 알 수 있다. 그림 2는 이 비행체에 탑재된 유동 질량을 나타낸 것으로서, 이전 연구(강자영 2003a)에서 사용한 비행체 내부 유동체의 일반화된 모델이다. 그림 3은 액체를 구진자로 모델링하고, 추력과 회전축이 축과 일치한다고 가정했을 때의 형상이다. 그림 4는 몸체 좌표계에 대한 각운동량 좌표계의 방향을 나타내고 있다.

내부에 유동질량을 포함하고 있는 비행체는 질량 m_1 , 좌표축 x, y, z 에 대한 주관성모멘트 $I_1 = I_2 > I_3$, 무게중심 C_1 을 갖는다. 강체의 O 지점에 연결된 진자의 무게는 m_2 이고, 길이는 r 이며, 그 상대운동은 변수 θ 와 Ψ 로 정의된다. 그림에서 r_0 는 C_1 에서부터 O 까지의 위치 벡터이고, $r = r(-\sin\theta \sin\Psi \quad \sin\theta \cos\Psi \quad -\cos\theta)^T$ 은 3-1 회전순서 및 역변환을 이용하여 구한 것이다. 그림 3에서 나타낸 바와 같이 단순화를 위해 위치벡터 r_0 와 추력 벡터 F 는 z 축과 일치하고, 진자 피봇에는 마찰토크가 없다고 가정한다. 그리고 C 점에 시스템 각운동량벡터는 $H = (H_1 \ H_2 \ H_3)^T$ 이다.

3. 우주비행체 내부 유동질량의 안정도 해석

3.1 파라미터 공간의 안정도 전이 곡선

시스템 파라미터 값에 따라 유동 질량체 운동에 수많은 공진조건이 존재한다는 것은 이미 강자영(2003a)에서 확인되었다. 그러나 해당 연구의 목적이 문제의 위성체 모델에 대한 공진원인을 찾는 것이었기 때문에 파라미터들의 특정값들에 대한 공진조건만을 유도했으며, 시스템 파라미터 값들의

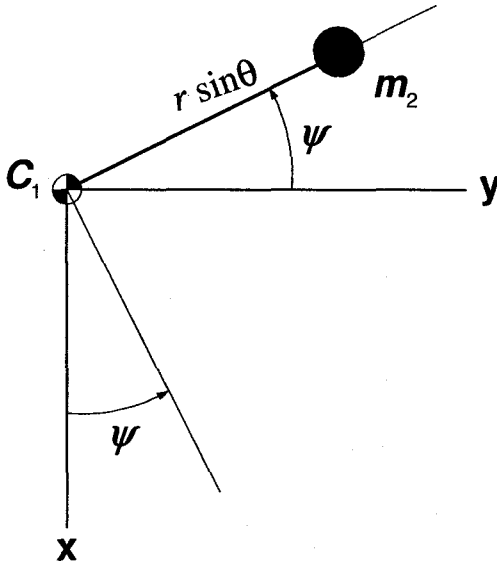


그림 3. 유동 질량의 기계적 등가 모델(평면도).

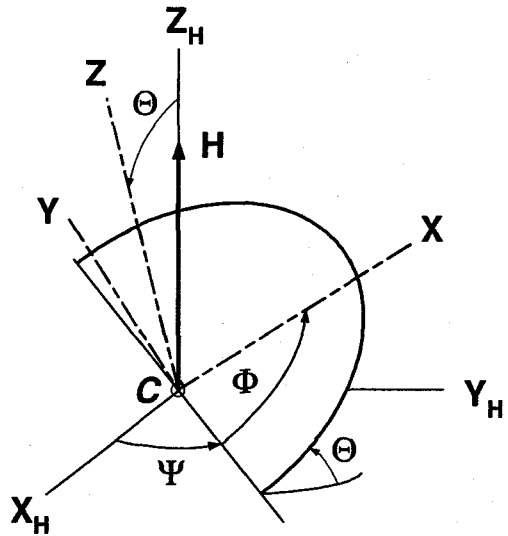


그림 4. 시스템의 각운동량축과 몸체축의 관계.

변화에 따른 공진해석은 수행되지 않았다. 강자영(2003b)에서는 위성체의 스핀속도의 변화에 따라 직접적으로 영향을 받는 유동체 운동의 정상점(stationary point)이 변화할 때 발생하는 위성체의 횡방향 각운동량 지도를 수치적 방법을 통하여 작도하고 위성체의 안정-불안정 영역을 관찰하였다. 그러나 이 방법은 선정된 파라미터의 값을 미소량씩 변화시키면서 파라미터 전구간에 대해 운동방정식을 수치적으로 적분하기 때문에 많은 시간과 노력이 소요되었다.

따라서, 본 연구에서는 해석적인 방법을 이용하여 파라미터 공간에서의 유동체 운동이 공진에 이르게 되는 영역을 판별하는 기준을 구하였다. 이전 연구에서 시스템 모델이 특정 파라미터 값을 가질 때 하나의 공진이 발생한다는 사실은 발견했지만 시스템에 발생할 수 있는 공진들과 시스템 파라미터 값들과의 관계에 대한 분석은 이루어지지 않았다. 본 논문에서는 이러한 관계를 규명하기 위해 유동체 운동의 안정-불안정을 판별하는 파라미터 전이곡선을 유도하고, 이들을 이용하여 Ince-Strutt 선도를 작도하였다. 주기적인 계수자극을 받는 시스템은 외부자극의 형태에 따라 수 많은 공진조건이 존재하지만 본 논문에서는 이전 연구에서 확인된 공진을 포함하여 문제의 시스템에서 발생할 확률이 가장 높은 4개의 공진 조건을 이용하여 시스템 파라미터 선택의 범위를 명시한다. 이들 공진조건은 $\beta \approx 0, 1, 2, 4$ 이며, 강자영(2003a)에 주어진 식 (22)의 특수해를 고찰하여 얻어진다.

먼저 $\beta \approx 0$ 인 경우를 고려하자. 그리고 다음과 같이 놓자.

$$\delta = \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \dots \tag{1}$$

그러면 강자영(2003a)에 주어진 식 (18-20)은 아래와 같이 된다.

$$D_0^2\vartheta_0 = 0 \tag{2}$$

$$D_0^2\vartheta_1 = -\sigma\vartheta_0 - 2D_0D_1\vartheta_0 - 2\alpha_1\vartheta_0 \cos 2T_0 - 2\alpha_2\vartheta_0 \sin 2T_0 + k_1 \cos 2T_0 + k_2 \sin 2T_0 \tag{3}$$

$$D_0^2 \vartheta_2 = -\sigma_2 \vartheta_0 - \sigma_1 \vartheta_1 - 2D_0 D_2 \vartheta_0 - D_1^2 \vartheta_0 - 2D_0 D_1 \vartheta_1 - 2\alpha_1 \vartheta_1 \cos 2T_0 - 2\alpha_2 \vartheta_1 \sin 2T_0 \quad (4)$$

식 (2)의 해를 다음과 같이 놓자.

$$\vartheta_0 = A(T_1, T_2) \quad (5)$$

그러면 식 (3)은

$$D_0^2 \vartheta_1 = -(\sigma_1 + 2\alpha_1 \cos 2T_0 + 2\alpha_2 \sin 2T_0)A + k_1 \cos 2T_0 + k_2 \sin 2T_0 \quad (6)$$

ϑ_1 으로부터 영년항(secular term)을 소거하기 위해서는 $\sigma_1 = 0$ 이 되어야 한다. 그러면 동차해에 관계없이 식 (6)과 (4)는 아래와 같이 된다.

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{2} \left(\alpha_1 A - \frac{1}{8} k_1 \right) \cos 2T_0 + \frac{1}{2} \left(\alpha_2 A - \frac{1}{8} k_2 \right) \sin 2T_0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \vartheta_2 &= -\sigma_2 A - D_1^2 A - \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) A \\ &\quad + \frac{1}{2} (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) + 2D_1 A (\alpha_1 \sin 2T_0 - \alpha_2 \cos 2T_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A - \frac{1}{2} (\alpha_1 k_1 - \alpha_2 k_2) \right] \cos 4T_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[2\alpha_1 \alpha_2 A - \frac{1}{2} (\alpha_1 k_2 + \alpha_2 k_1) \right] \sin 4T_0 \end{aligned} \quad (8)$$

ϑ_2 로부터 영년항을 소거하기 위해서는 식 (9)가 성립해야 한다.

$$D_1^2 A + \left[\sigma_2 + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right] A - \frac{1}{2} (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) = 0 \quad (9)$$

그러면

$$\begin{aligned} A &= a_1 \exp \left(i \sqrt{\sigma_2 + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} T \right) + a_2 \exp \left(-i \sqrt{\sigma_2 + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} T \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)}{\sigma_2 + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 $\sigma_2 \geq -\frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ 이면 ϑ 는 안정성을 갖고 $\sigma_2 < -\frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ 이면 불안정성을 갖는다. 결과적으로 $\sigma_2 = -\frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ 는 안정성과 불안정을 분리하는 기준이 되며, $\delta \approx 0$ 에서 시작된 전이곡선은 다음과 같다.

$$\delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha^2 + O(\varepsilon^3) \quad (11)$$

$\beta \approx 1$ 에서도 마찬가지로, 특수해는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{4(\beta+1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2) A e^{i(2+\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2) \bar{A} e^{-i(2+\beta)T_0}] \\ &\quad + \frac{1}{2(\beta^2-4)} [(k_1 - ik_2) e^{i2T_0} + (k_1 + ik_2) e^{-i2T_0}] \end{aligned} \quad (12)$$

$\beta = 1 - \varepsilon\sigma$ 이므로, 비동조 파라미터(detuning parameter)와 $\delta \approx 1$ 에서 시작된 전이곡선은 다음과 같다.

$$\sigma = \mp \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{16} \varepsilon \alpha^2 \mp \frac{1}{32} \varepsilon^2 \alpha^3 + O(\varepsilon^3) \quad (13)$$

$$\delta = 1 \pm \varepsilon \alpha + \frac{3}{8} \varepsilon^2 \alpha^2 \pm \frac{1}{8} \varepsilon^3 \alpha^3 + O(\varepsilon^4) \quad (14)$$

마찬가지로 $\beta \approx 2$ 일 때 특수해는 식 (15)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = & \frac{1}{4(\beta+1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2)Ae^{i(2+\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2)\bar{A}e^{-i(2+\beta)T_0}] \\ & + \frac{1}{4(\beta-1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2)\bar{A}e^{i(2-\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2)Ae^{-i(2-\beta)T_0}] \end{aligned} \quad (15)$$

$2 = \beta + \varepsilon\sigma$ 이므로 비동조 파라미터는 다음과 같다.

$$\sigma = -\varepsilon \frac{5}{48} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + O(\varepsilon^2), \quad \sigma = -\varepsilon \frac{1}{48} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + O(\varepsilon^2) \quad (16)$$

그러므로 $\delta \approx 4$ 에서 시작된 전이곡선은 식 (17)과 같이 된다.

$$\delta = 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 \alpha^2 + O(\varepsilon^3), \quad \delta = 4 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 \alpha^2 + O(\varepsilon^3) \quad (17)$$

다음은 $\beta \approx 4$ 일 때의 전이곡선을 구하기로 한다. 강자영(2003a)에 주어진 식 (22)에서 영년항을 소거하기 위해서는 $D_1 A = 0$ 이어야 하며, $A = A(T_2)$ 이다. 그러면 특수해는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = & \frac{1}{4(\beta+1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2)Ae^{i(2+\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2)\bar{A}e^{-i(2+\beta)T_0}] \\ & - \frac{1}{4(\beta-1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2)\bar{A}e^{i(2-\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2)Ae^{-i(2-\beta)T_0}] \\ & + \frac{1}{2(\beta^2-4)} [(k_1 - ik_2)e^{i2T_0} + (k_1 + ik_2)e^{-i2T_0}] \end{aligned} \quad (18)$$

강자영(2003a)의 식 (20)에 ϑ_0 와 ϑ_1 을 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} D_0^2 \vartheta_2 + \delta \vartheta_2 = & -2i\beta D_2 A e^{i\beta T_0} - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - i\alpha_2)}{4(\beta+1)} A [e^{i(4+\beta)T_0} + e^{i\beta T_0}] \\ & + \frac{\alpha_1}{4(\beta-1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2)\bar{A}e^{i(4-\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2)Ae^{i\beta T_0}] \\ & - \frac{\alpha_1}{2(\beta^2-4)} [(k_1 - ik_2)e^{i4T_0} + (k_1 + ik_2)] \\ & + i \frac{\alpha_2(\alpha_1 - i\alpha_2)}{4(\beta+1)} A [e^{i(4+\beta)T_0} - e^{i\beta T_0}] \\ & - i \frac{\alpha_2}{4(\beta-1)} [(\alpha_1 - i\alpha_2)\bar{A}e^{i(4-\beta)T_0} + (\alpha_1 + i\alpha_2)Ae^{i\beta T_0}] \\ & + i \frac{\alpha_2}{2(\beta^2-4)} [(k_1 - ik_2)e^{i4T_0} + (k_1 + ik_2)] + C.C. \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 영년항을 소거하기 위해서는 다음과 같은 조건이 성립해야 한다.

$$2\beta D_2 A - i \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4(\beta^2-1)} \right) A = 0 \quad (20)$$

A 와 \bar{A} 에 대해 풀면

$$A = A_0 \exp \left[-i \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2-1)} T_2 - C_0 \right) \right], \quad \bar{A} = A_0 \exp \left[i \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2-1)} T_2 - C_0 \right) \right] \quad (21)$$

따라서, 시스템의 해는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 = \varepsilon\vartheta_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= a_0 \cos \varphi \\ &\quad + \varepsilon \frac{a_0}{4(\beta + 1)} [\alpha_1 \cos(2T_0 + \varphi) + \alpha_2 \sin(2T_0 + \varphi)] \\ &\quad - \varepsilon \frac{a_0}{4(\beta - 1)} [\alpha_1 \cos(2T_0 - \varphi) + \alpha_2 \sin(2T_0 - \varphi)] \\ &\quad + \varepsilon \frac{1}{(\beta^2 - 4)} [k_1 \cos(2T_0) + k_2 \sin(2T_0)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서

$$a_0 = 2A_0, \quad \varphi = \left(\beta - \varepsilon^2 \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2 - 1)} \right) T_0 + C_0 \quad (23)$$

$\beta \approx 4$ 일 때 비동조 파라미터 σ 는 식 아래와 같이 정의하고

$$4 = \beta + \varepsilon^2 \sigma \quad (24)$$

식 (19)에서 $4T_0$ 를 $4T_0 = \beta T_0 + \sigma T_2$ 로 표현하면 식 (19)에서 영년항을 소거하기 위해서는 아래와 같은 조건식이 성립해야 한다.

$$D_2 A + i \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2 - 1)} A - \frac{(\alpha_1 k_2 + \alpha_2 k_1) + i(\alpha_1 k_1 - \alpha_2 k_2)}{4\beta(\beta^2 - 4)} e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (25)$$

A 에 대한 해를 다음과 같이 놓기로 한다.

$$A = (A_r + iA_i)e^{i\sigma t_2} \quad (26)$$

여기에서, A_r, A_i 는 모두 실수이다. 이를 식 (25)에 대입하고, 실수부와 허수부를 분리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_2 A_r - \sigma_s A_i &= f_1 \\ D_2 A_i - \sigma_s A_r &= f_2 \end{aligned} \quad (27)$$

여기에서

$$\sigma_s = \sigma + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2 - 1)}, \quad f_1 = \frac{\alpha_1 k_2 + \alpha_2 k_1}{4\beta(\beta^2 - 4)}, \quad f_2 = \frac{\alpha_1 k_1 - \alpha_2 k_2}{4\beta(\beta^2 - 4)} \quad (28)$$

σ_s 가 영이 아닐 때, 식 (27)은 아래와 같은 일반해를 갖는다.

$$A_r = a_r e^{i\gamma T_2} + a_{r0}, \quad A_i = a_i e^{\gamma T_2} + a_{i0} \quad (29)$$

여기에서 a_r, a_{r0}, a_i 및 a_{i0} 은 식 (30) 및 (31)의 조건이 성립하면 상수값을 갖는다.

$$\gamma^2 = -\sigma_s^2 \quad (30)$$

$$a_{r0} = f_2/\sigma_s, \quad a_{i0} = -f_1/\sigma_s \quad (31)$$

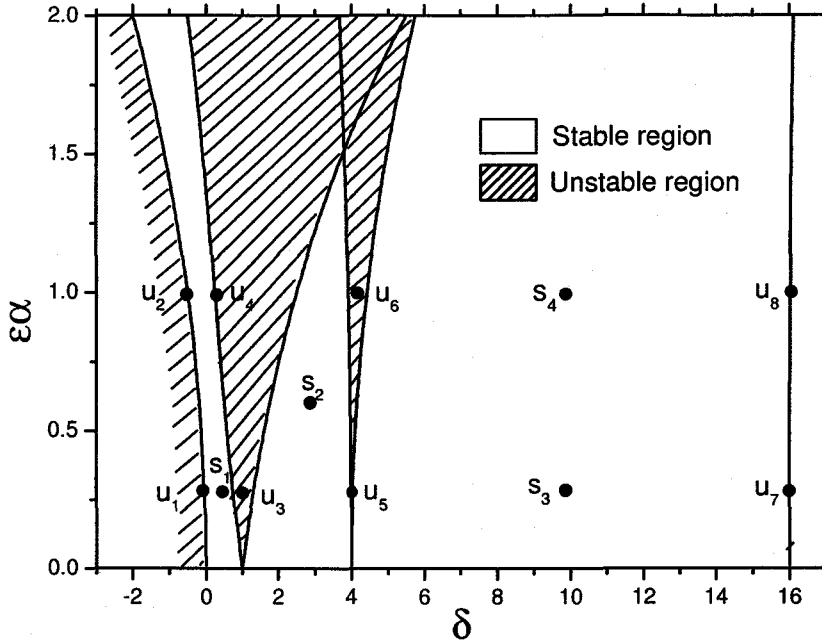


그림 5. Ince-Strutt 선도.

그러면 식 (29) 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 A_r &= a_1 \cos(\sigma_s T_2) + a_2 \sin(\sigma_s T_2) + f_2/\sigma_s \\
 A_i &= -a_1 \sin(\sigma_s T_2) + a_2 \cos(\sigma_s T_2) - f_1/\sigma_s
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

여기에서 a_1 과 a_2 는 상수이다. 만일 σ_s 가 영이라면, 즉 $\sigma = -\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2 - 4)}$ 이면 식 (27)의 해는 $A_r = f_1 T_2 + a_{r0}$ 과 $A_i = f_2 T_2 + a_{i0}$ 이다. 그러므로 식 (26)은 다음과 같이 된다.

$$A = \left[\left(\frac{\alpha_1 k_2 + \alpha_2 k_1}{4\beta(\beta^2 - 4)} + i \frac{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2}{4\beta(\beta^2 - 4)} \right) T_2 + (a_{r0} + i a_{i0}) \right] e^{-i \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4\beta(\beta^2 - 1)} T_2}
 \tag{33}$$

식 (33)은 시간이 증가함에 따라 그 값이 증가하는 것을 볼 수 있다. $\beta \approx 4$ 에서 시작하는 전이곡선은 다음과 같다.

$$\delta = 16 + \frac{1}{30} \epsilon^2 \alpha^2 + O(\epsilon^4), \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}
 \tag{34}$$

그림 5는 유동체 운동의 파라미터 공간에서의 안정도 판별을 위한 Ince-Strutt 다이어그램으로서 위에서 유도한 전이곡선들을 이용하여 작도한 것이다. 일반적으로 Mathieu 미분방정식과 같이 시변형 파라미터를 갖는 rheonomic 시스템에 대한 수학적 해석은 매우 어렵기 때문에 van der Pol & Strutt(1928)은 시스템의 안정도 해석을 위한 Ince-Strutt 다이어그램을 고안하여 발표했다. 그림 5에서 실선은 $\epsilon\alpha - \delta$ 파라미터 평면을 안정-불안정 구역으로 분리하는 전이곡선이고, 이 곡선의 상부에 해당하는 빗금친 부분이 불안정 영역이다. 안정도 선도의 적정성을 입증하기 위해 불안정 영역

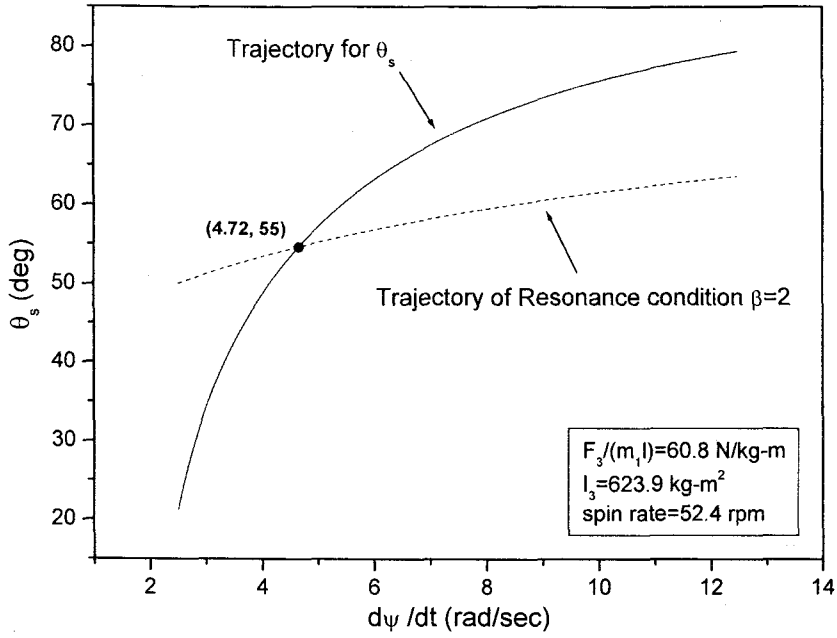


그림 6. QSP 궤적.

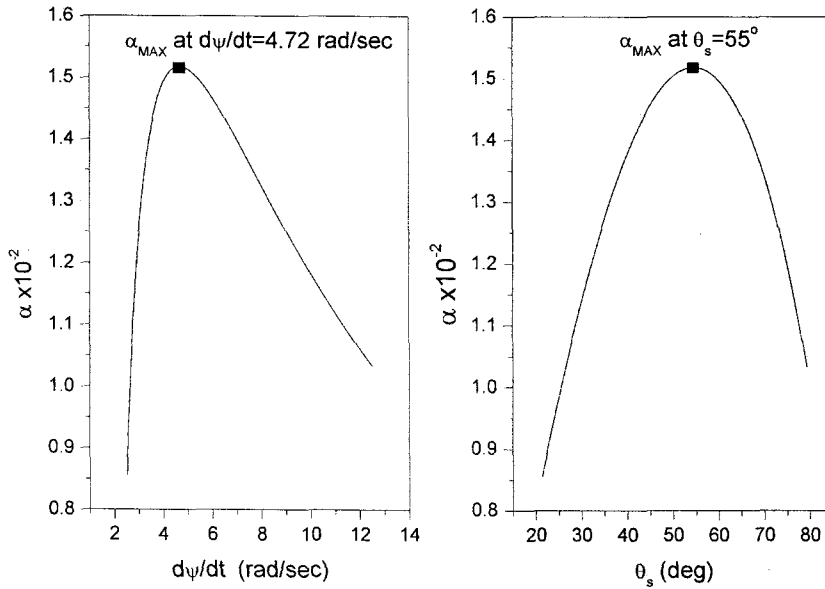


그림 7. $\alpha - \dot{\psi}$ 과 $\alpha - \theta_s$ 의 관계.

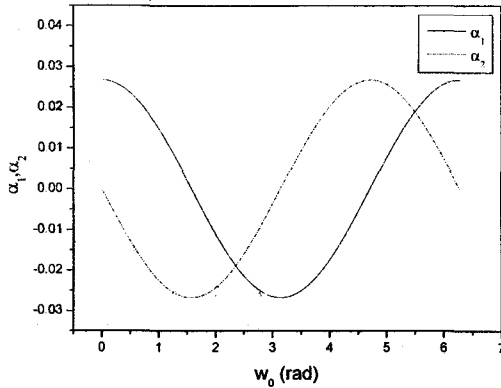


그림 8. α_1 및 α_2 의 변화.

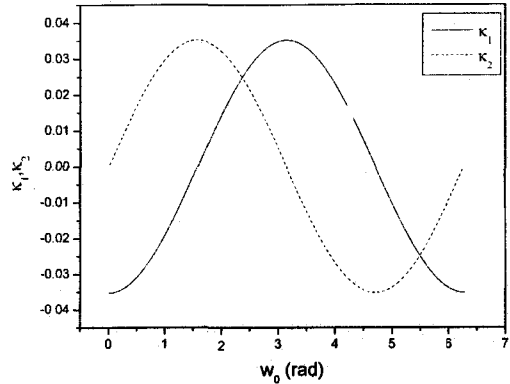


그림 9. k_1 및 k_2 의 변화.

에 속한 점 $u_1 \sim u_8$ 과 안정영역에 속한 점 $s_1 \sim s_4$ 를 선택하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 이 시뮬레이션 결과를 이용하여 수행한 위상평면분석이 다음 절에 주어졌다.

3.2 유동질량의 위상평면 분석

위성시스템은 설계 파라미터의 특정값을 이용하기 때문에 그림 5에 나타난 모든 공진조건이 시스템에 발생하지는 않는다. 지금까지의 분석결과를 적용하기 위해 다음과 같은 기준 파라미터 값을 갖는 비행체를 고려한다.

$$F_3 = 71171.6\text{N}, m_1 = 1950.5\text{kg}, m_2 = 4.4\text{kg}, I_1 = I_2 = 1831.1\text{kg}\cdot\text{m}^2, I_3 = 623.9\text{kg}\cdot\text{m}^2, \\ r_0 = 1.0\text{m}, r = 0.6\text{m}, a = 27.12\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}, \omega_3 = 52.4\text{rpm}.$$

그림 6은 위의 기준 데이터를 적용했을 때의 준정상점(QSP: quasi-stationary point)의 궤적을 보여준다. 유동체가 위성의 회전방향과 동일한 방향으로 회전하는 것으로 고려하면 정상상태 값 θ_s 는 양(+)의 ψ 값에 대하여 계산된다. 예측되는 바와 같이 내부 유동체의 QSP는 ψ 가 증가함에 따라 $\pi/2$ 위치로 이동함을 알 수 있다. 모든 QSP에서 불안정현상이 발생하지 않는다(강자영 2003b). 공진조건 $\beta \approx 2$ 일 때 불안정 운동은 $\dot{\psi} = 4.72\text{rad/s}$ 및 $\theta_s = 55^\circ$ 에서 발생한다. 이 값은 그림 7에서도 증명된다. 유동질량의 불안정 QSP는 α 의 정점에서 결정된다. 즉 진자의 불안정 QSP는 $d\alpha/d\theta_s = 0$ 에 의해 결정된다. 또한 θ_s 가 ψ 의 함수이므로 ψ 의 해당 값도 유사한 방법으로 결정될 수 있다.

그림 8과 9에 도시한 바와 같이 파라미터 α_1 과 α_2 , k_1 과 k_2 는 각각 $\pi/2$ 의 위상차를 갖고 w_0 에 따라 변화한다. 그러므로 α 는 w_0 의 값에 관계없이 항상 일정함을 알 수 있다.

그림 10 ~ 21은 그림 5에 표시된 안정-불안정 지점에서의 유동질량 운동에 대한 위상 궤적을 나타낸 것이다. 그림 10 ~ 17은 2가지 형태의 불안정 궤적을 보여주고 있는데, 첫번째 형태(그림 10 ~ 11)는 유동질량에 의한 에너지가 원점으로부터 어떤 방향성을 갖고 원추형상으로 변화해 가는 모습을 보여주고 있고, 또 다른 형태(그림 12 ~ 17)는 원점을 중심에 두고 나선 모양으로 증가해 가고 있는 모습을 보여주고 있다. 첫번째 형태에 속하는 유동질량의 각변위 운동은 영점축(zero axis)으로부터 벗어난 진동을 하면서 그 진폭이 지수적으로 증가하고, 두번째 형태에 속하는 각변위 운동은 영점축에 대해 교차 진동을 하면서 진폭이 지수적으로 증가한다. 불안정영역의 위상평면을 분석한

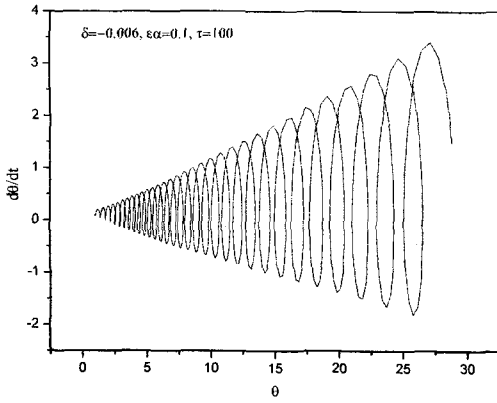


그림 10. u_1 에서의 위상궤적.

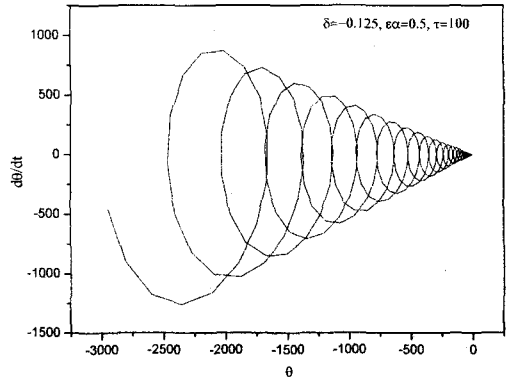


그림 11. u_2 에서의 위상궤적.

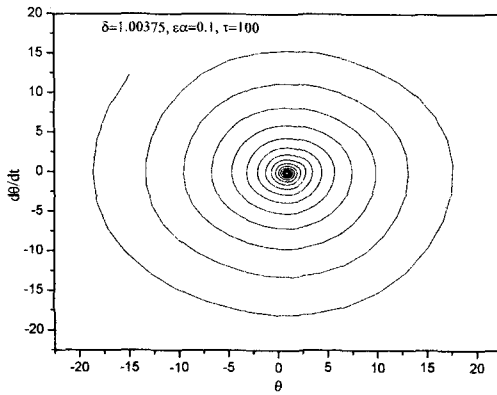


그림 12. u_3 에서의 위상궤적.

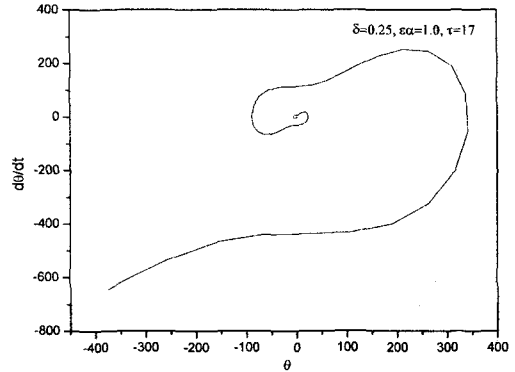


그림 13. u_4 에서의 위상궤적.

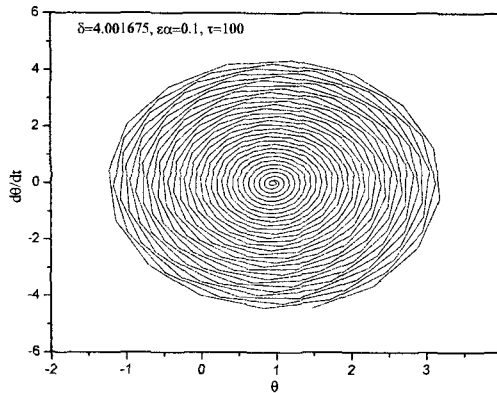


그림 14. u_5 에서의 위상궤적.

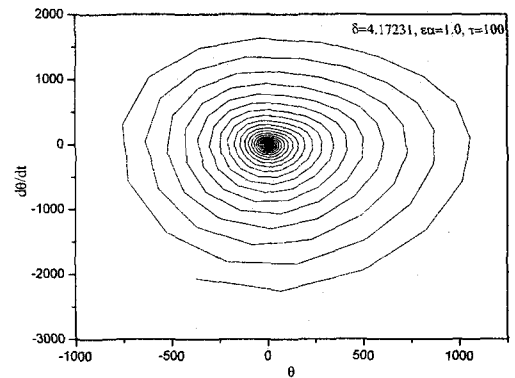


그림 15. u_6 에서의 위상궤적.

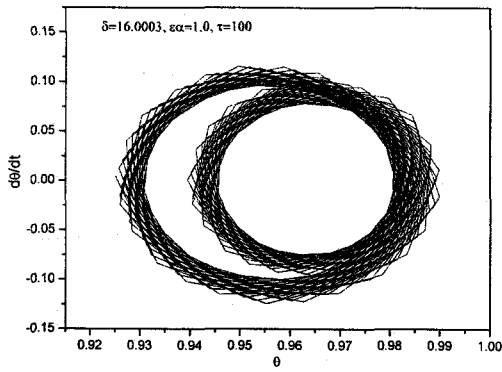


그림 16. u_7 에서의 위상궤적.

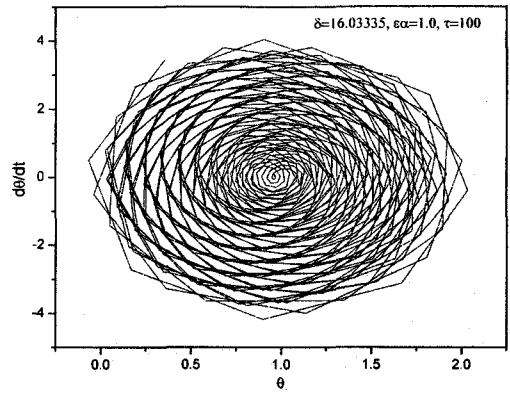


그림 17. u_8 에서의 위상궤적.

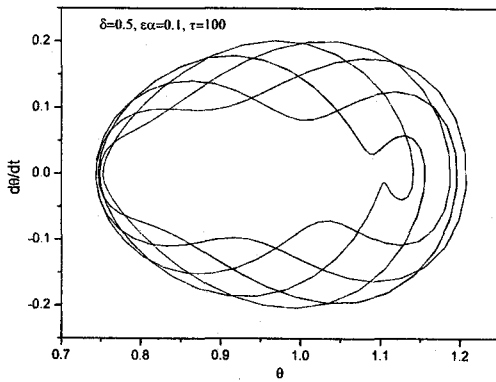


그림 18. s_1 에서의 위상궤적.

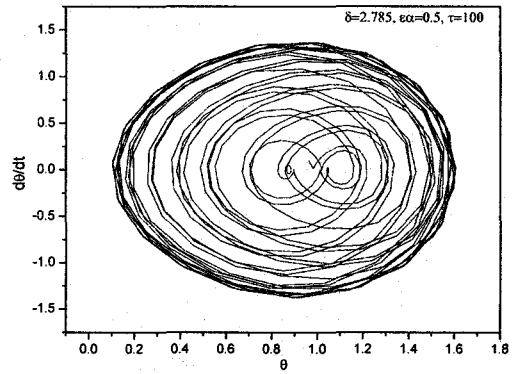


그림 19. s_2 에서의 위상궤적.

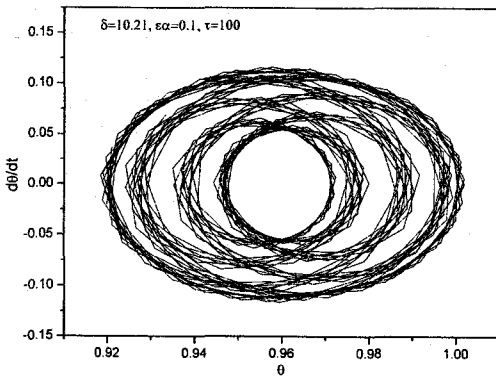


그림 20. s_3 에서의 위상궤적.

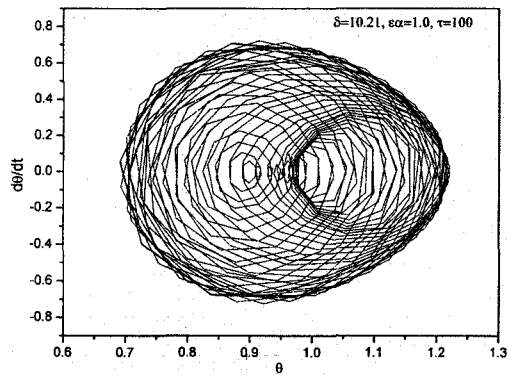


그림 21. s_4 에서의 위상궤적.

결과 동일한 δ 값에 대해 ε 값이 클수록 유동질량에 의해 생성되는 에너지가 급격히 증가함을 알 수 있다. 특히 u_4 에서는 위상계적이 시뮬레이션 시간이 20초도 되기 전에 위상평면의 주어진 범위를 초과하고 있지만, u_5 에서는 시뮬레이션 시간이 100초가 경과되어도 그 증가량은 아주 미미하다.

그림 18 ~ 21은 선도의 안정영역의 몇몇 지점에서 유동질량의 위상계적을 보여주고 있다. 도시된 바와 같이 위상계적은 불규칙한 궤도가 반복되는 폐곡선을 이룬다. 유동질량은 변화가 심한 비선형 진동을 하지만 진폭의 크기가 작고 일정한 범위 내에 있음을 알 수 있다. 또한 s_2, s_3, s_4 에서 유동질량은 beating 현상을 갖는 운동을 하며, 그에 의해 생성되는 에너지도 크기가 매우 작음을 알 수 있다.

4. 결론

우주발사체, 우주선, 위성체 등에 활용할 수 있는 적절한 설계 안정도 기준을 마련하기 위해 회전안정화 우주비행체 내부에 탑재된 유동 질량의 운동을 보다 광범위한 시스템 파라미터 공간에 대해 연구하였다. Perturbation 해석 기법을 이용하여 Ince-Strutt 다이어그램을 구하고, 사용된 방법 및 확보된 결과의 적정성을 입증하기 위하여 안정도 다이어그램에서 취한 안정-불안정 영역의 여러 가지 파라미터 값에 대한 수치 시뮬레이션을 수행하였다. 또한 시스템 파라미터 공간의 선정된 특정 값에 대한 유동체 운동의 위상평면 분석을 통하여 파라미터 값 선택에 따른 운동의 성질을 검토하였다. 다음은 본 연구를 통하여 얻은 결론의 요약이다.

비행체의 안정도 결정을 위해 본 연구에서 유도한 Ince-Strutt 다이어그램은 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 그 유효성이 입증되었으며, 액체연료 등과 같은 내부 유동물질을 포함하는 어떠한 우주시스템의 파라미터 공간에서 안정-불안정 영역을 결정하는데 본 논문에서 이용된 방법과 결과를 확장하여 적용할 수 있다. 위상평면 분석을 통하여 본 연구에서 선택한 회전형 우주비행체 모델의 유동질량은 파라미터(비행체 및 유동체의 스펙 속도의 제곱에 비례)가 1 및 4에서 분기한 불안정 영역에서 파라미터(유동질량 등에 비례)의 값이 클 때 불안정 현상이 급격히 증대되는 것으로 관찰되었다. 그러나 모든 불안정 영역에서 유동질량 운동의 불안정 현상이 발생하였기 때문에 본 연구의 우주비행체 모델은 Ince-Strutt 다이어그램의 불안정구역을 피하여 파라미터를 선정하는 것이 중요하며, 우주비행체의 설계 단계에서 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 목표 안정도를 성취할 수 있는 파라미터의 값을 다이어그램의 안정 영역에서 찾을 수 있다.

참고문헌

- 강자영 2003a, 한국우주과학회지, 20, 205
 강자영 2003b, 한국우주과학회지, 20, 351
 Abramson, N. H. 1966, in *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*, ed. N. H. Abramson (Washington, D.C.: NASA Scientific and Technical Information Division), p.1
 Kana, D. D. 1987, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 24, 169
 Or, A. C. 1992, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15, 297
 Sayer, B. A. & Baumgarten, J. R. 1981, *Journal of Applied Mechanics*, 48, 769
 Sumner, I. E., Stofan, A. J., & Sharmo, A. J. 1964, NASA TM X-999

van der Pol, F. & Strutt, M. J. O. 1928, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5, 18

Yam, Y., Mingori, D. L., & Halsmer, D. M. 1997, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20

306