

웨이브렛 변환과 재무시계열

이 일 균*

요 약

한 시계열의 원래 관찰치가 본래 가지고 있는 정보를 하나도 잃지 않고 또한 손상시키지 않고 그대로 보존되며 계산이 용이하고, 뿐만 아니라 가능도함수나 비모수 추정함수를 계산함에 있어 수치적 불안정 잠재성이 존재하지 않도록 변환된 시계열을 얻을 수 있으면, 다시 말해 각종 통계량의 계산에 용이하게 적용 가능하되 원래 시계열이 보유하고 있는 모든 성질들은 추호도 손상시킴이 없이 이 시계열을 변환시킬 수 있는 변환방법이 존재한다면, 모수의 추정치와 검정통계량을 정확히 얻을 수 있을 것이다. 이와 같은 변환방법이 웨이브렛 변환이다. 이 변환은 푸리에 분석의 결점을 극복하되 후리에 변환이 적용되는 분야에는 거의 모두 적용 가능한 변환방법이다.

이 논문에서는 시계열의 웨이브렛 변환을 소개하고 이 변환이 재무시계열의 모형화에 한몫을 단단히 할 수 있다는 점을 밝히고자 한다. 그리고 웨이브렛 변환을 성공적으로 적용할 수 있는 주가과정을 하나의 예로 제시하여 웨이브렛 변환의 구체적 적용방법을 탐구하고자 한다.

웨이브렛의 주가 시계열의 적용방법의 한 예로 주가의 장기기억과정을 분석한다. 한국과 외국의 일별 주가지수의 수익률 시계열들이 장기기억과정을 따르는 시계열임이 발견되었다. 여러 형태의 웨이브들을 사용하여 검정하였는데 이 모두가 한결같이 주가지수가 장기기억성과정임을 지지하고 있다.

* 명지대학교 경영학과

I. 서 론

주가시계열의 원래의 관찰치가 본래 가지고 있는 정보를 하나도 잃거나 손상시키지 않고 그대로 보존되며 계산이 용이하고, 뿐만 아니라 가능도함수나 비모수 추정함수를 계산함에 있어서 수치적 불안정 잠재성이 존재하지 않도록 변환된 시계열을 얻을 수 있으면, 다시 말해서 각종 통계량의 계산에 용이하게 적용 가능하되 원래 시계열이 보유하고 있는 모든 성질들은 추호도 손상시킴이 없이 이 시계열을 변환시킬 수 있는 변환방법이 존재한다면, 모수의 추정치와 검정통계량을 정확히 얻을 수 있을 것이다. 이와 같은 변환방법은 여러 가지가 존재할 수 있는데, 그 중 하나가 푸리에 변환이고 다른 하나가 웨이브렛 변환(wavelet transform)이다. 푸리에 변환은 시계열 분석에서 전가의 보도로 사용되는데 많은 결점을 갖고 있다. 푸리에 분석의 결점을 극복하되 후리에 분석이 적용되는 분야에는 거의 모두 적용 가능한 변환방법이 웨이브렛 변환이다.

재무시계열의 분석은 기본적으로 푸리에 분석에 터를 두고 있는데 푸리에 분석에 결점이 존재한다. Newland(1993)가 지적하고 있는 바와 같이: 푸리에 분석의 결점은 빈도 정보는 시그널의 전체에 대하여서만 추출이 가능하다는 점이다. 즉, 특정한 빈도가 어느 특정 지점(위치)이나 시점에서 발생하고 있는지에 대한 정보는 추출이 불가능하다. 푸리에 변환에서의 적분은 전체시간영역에서 이루어지므로 푸리에 변환이 제공하는 정보는 시그널의 전체 길이 위의 평균으로 추출된다. 시그널의 생존기간 중 어느 한 시점에서 특정한 특성을 표시하는 국소적 진동이 존재하는 경우 푸리에 변환의 계산에는 공헌을 하지만 시간 축 위의 위치나 장소는 잃게 된다.

푸리에 분석의 이 단점은 웨이브렛 분석에서는 발생되지 않는다. 빈도와 시점이 다 같이 중요한 경우 웨이브렛 분석이 푸리에 분석의 대안이 될 수 있다. 웨이브렛 변환은 시그널을 기저함수의 집합으로 분할한 변환이다. 기저함수들을 웨이브렛이라 한다. 확대와 축소의 변환에 의하여 단일의 전형적 웨이브렛, 즉 모 웨이브렛(mother wavelet)으로부터 기저함수를 얻을 수 있다.

웨이브렛 분석에서는 축척(scale)개념을 도입하여 시간축척표현으로 빈도를

나타낸다. 이것은 시그널이 시간축척평면에 사상(map)됨을 의미한다. 웨이브렛 분석은 반모수방법과 최대가능도법에서 야기되는 밀도 높은 공분산행렬이 발생되지 않는다. 따라서 추정이 용이하고 추정의 정확도가 높다.

이 논문에서는 시계열의 웨이브렛 변환을 소개하고 이 변환이 재무시계열의 모형화에 한몫을 단단히 할 수 있다는 점을 밝히고자 한다. 그리고 웨이브렛 변환을 성공적으로 적용할 수 있는 주과과정을 하나의 예로 제시하여 웨이브렛 변환의 구체적 적용방법을 탐구하고자 한다.

이 논문의 진행은 다음과 같다. 제 II장에서는 웨이브렛 변환을 비교적 자세 히 다룬다. III장에서는 분수차분확률과정의 성질을 약술하고 장기기억모수의 추정방법을 설명한다. 모수검정에 필요한 웨이브렛 공분산의 추정을 심도있게 다룬다. 웨이브렛 OLS모형을 정립한다. 아울러 실증분석을 제시하고 주과과정의 성질을 탐구한다. 제 IV장에서는 결론을 제시한다.

II. 이산 웨이브렛 변환

1. 푸리에 변환과 웨이브렛 변환

푸리에 변환은 한 시계열의 성질과 특성을 일목요연하게 파악할 수 있게 해 준다. 그러나 이 변환은 시간이 잠재되어 있어 명시적으로 시간을 파악 할 수 없게 해주는 단점이 있다. 말하자면 시계열이 시간의 흐름에 따라 진행되는 가운데 어느 특정한 시점에서 어떤 특정한 특성을 가지게 될 때 이 변환은 이 특성을 드러내준다. 그러나 이 특성이 시계열의 진행과정 중 어느 시점에서 발생 하였는지에 대한 정보는 제공해 주지 않는다.

푸리에 변환의 이 단점을 극복하기 위하여 태어난 것이 웨이브렛이다. 웨이브렛 방법론은 최근에서야 관심을 갖게 된 영역이다. 웨이브렛 변환은 이산 웨이브렛 변환과 연속 웨이브렛 변환으로 구분할 수 있는데 여기에서는 Perceival과 Walden(2000), Jameson(1996), Jensen(1999), O'Neil(2003) 등을 참조하여 요약하고자 한다.

푸리에 변환은 시그널 빈도로부터 세부사항(details)을 추출한다. 그러나 이 시그널 내의 특정한 빈도의 위치에 대한 모든 정보는 잃는다. 시간 국소화(time localization)는 먼저 시그널을 창(window)으로 만들고 이에 대하여 푸리에 변환을 가하면 얻을 수 있다. 창으로 만든 데에서의 문제점은 시그널을 고정된 길이로 나누게 된다는 것이다. 이 길이는 물론 창에 의하여 결정된다. 동일한 길이로 시그널을 나누게 되면 고빈도와 저빈도(low frequency)를 다같이 복원(resolution)하게 된다. 비정상적 시그널인 경우에 있어서는 적응성이 부족해 국소적 과소조정 또는 국소적 과대조정(local overfitting)이 야기된다.¹⁾

창을 사용하는 푸리에 변환과는 대조적으로 웨이브렛은 시그널의 국소적 빈도에 따라서 시간분할의 폭(width)들을 선택한다. 웨이브렛 변환은 푸리에 변환의 단점을 극복하고 있다. 시계열 관점에서 본 웨이브렛 변환은 대역경로(band pass)필터작용소로 볼 수 있다. 이 필터는 빈도를 두 배로 하거나 반으로 줄이는 작용을 한다.

1) 실선 위에서 정의된 함수를 고려하자. 이 함수를 시그널이라 하자. 이 시그널이 빈도 ω_0 를 포함하고 있을 때 이 함수 θ 는 주기함수이고 주기는 $2\pi/\omega_0$ 이다. 이 때 x 를 변수라 하면 $\theta(x)$ 의 푸리에급수는 시그널의 빈도내용을 분석하기 위한 방법이다. θ 의 진폭 a_n 펙트럼은 점들($n\omega_0, c_n/2$)로 구성된다. 여기에서 c_n 은 $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 으로 b_n 은 θ 의 푸리에 계수이다. 이 때 시그널은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\theta(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_n x)$$

시그널을 푸리에 급수의 부분 합으로 모형화하면 다음을 얻는다.

$$\theta(x) \approx \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_n x)$$

위 식은 시그널을 분석하는데 유용하나 결점도 있다. 그 단점으로서는 : 첫째, sin과 cos은 주기함수이므로 주기를 가지지 않는 시그널에는 사용할 수 없다. 재무 관련 시계열이 주기를 가지고 있다는 연구는 미미하다. 오히려 주가가 무작위행보(random walk)를 따르고 있다는 연구결과가 지배적이다. 둘째 단점으로서는 : 푸리에급수의 부분 합 모형 식과 같이 N을 매우 크게 하여 푸리에급수의 부분 합으로 $\theta(x)$ 를 모형화하면 $\theta(x)$ 의 행동에 대하여 유한시간주간에 초점을 두게 된다. 이 때 이 행동을 기술하는, 푸리에전개의 항들을 분리할 수가 없다. 때문에 전체 푸리에급수를 취할 수밖에 없다. 따라서 시계열 또는 시그널의 시간은 잠재하고 표면으로 드러나지 않게 되므로 특정행동과 시간을 명시적으로 연결시킬 수 없다. 말하자면 푸리에급수는 정보를 국지화 또는 소역화(localization) 하지 못한다. 웨이브렛은 이와 같은 단점을 극복할 수 있는 분석용구이다.

2. 이산 웨이브렛 변환

시초 시계열을 $x_1, \dots, x_N \equiv x_{0,1}, \dots, x_{0,N}$ 이라 하자. 여기에서 $N=2^p$ 이다. 시초시계열은 단계 0과 축척 $2^0=1$ 에 있다고 한다. 이 시계열의 이산 웨이브렛 변환(discrete wavelet transform; DWT)은 다음과 같이 수행된다. 각 단계에서 $m=0$ 에서 출발하여 현재의 X수열은 아랫길필터(low-pass filter)인 $\{g_l\}$ 로 필터하며 인수 2로 축소축적(downscale)한다. $\{g_l\}$ 을 구하는 방법은 후술한다. 이것을 수식으로 표시하면 다음과 같다.

$$x_{m+1,k} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l x_{m,l+2k-1}, \quad k=1, \dots, 2^{p-m-1} \quad (1)$$

위에서 L 은 필터길이며 짝수정수이어야 한다. 위 식의 결과를 축척계수(scaling coefficient)라 하며, 이것은 입력데이터의 아랫길형이다. 산출된 점들의 개수는 투입된 개수를 2로 나눈 값이다. 수열 $\{x_{m,k}\}$ 는 축척 2^m 에 있다고 한다. 각 단계에서 현재의 x벡터는 다른 필터 $\{h_l\}$ 로 또 필터한다. 필터 $\{h_l\}$ 은 윗길필터라 하며 인수 2로 축소축적한다. 이것은 다음과 같다.

$$d_{m+1,k} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{m,l+2k-1}, \quad k=1, \dots, 2^{p-m-1} \quad (2)$$

이 결과는 웨이브렛 계수의 수열이다. 이 과정을 도시하면 [그림 1]과 같다.

p 개 단계를 거치면 : 단일 축척계수 $x_{p,1}$ 를 얻는데 이것을 모함수 계수라 하고, 또한 동일한 축척의 단일웨이브렛 $d_{p,1}$ 을 얻고, 그리고 $p-1$ 개의 다른 웨이브렛계수 $\{d_{m,k}: m=1, \dots, p-1, k=1, \dots, 2^{p-m}\}$ 을 얻는다. 이를 표시하면 다음과 같다.

$$(x_1, \dots, x_N)^T \rightarrow (x_{p,1}, d_{p,1}, d_{p-1,1}, d_{p-1,2}, \dots, d_{1,1}, \dots, d_{1,2^{p-1}})^T \quad (3)$$

이산웨이브렛 변환에 지대한 공헌을 이룩한 사람이 Daubechies(1992)이며 많은 종류의 웨이브렛 변환을 제시하고 있다. 그 중 하나가 4개 계수의 집합으로 이루어진 극값위상 축척필터(extremal phase scaling filter)이다. 계수가 4개 이

므로 $L=4$ 이다. 아랫길필터 $\{g_l\}$ 은 g_0, g_1, g_2 와 g_3 으로 4개이다. 윗길필터 $\{h_l\}$ 은 $h_0 = g_3, h_1 = -g_2, h_2 = g_1$ 과 $h_3 = -g_0$ 이다. 그녀가 계산한 계수는 $g_0 = (1 + \sqrt{3})/(4\sqrt{2}), g_1 = (3 + \sqrt{3})/(4\sqrt{2}), g_2 = (3 - \sqrt{3})/(4\sqrt{2})$ 와 $g_3 = (1 - \sqrt{3})/(4\sqrt{2})$ 이다. 계산방법은 추후 제시한다.²⁾

2) 이산웨이브렛 변환은 행렬로 표시하는 것이 간편하다. DWT를 W 라 하면 투입벡터 $X_0 = (x_1, \dots, x_N)^T = (x_{0,1}, \dots, x_{0,N})^T$ 에 대하여 이산웨이브렛 변환은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z = W X_0$$

위 경로 계수 h_l 의 행렬을 Q_m 이라 하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} Q_m X_m &= D_{m+1}, m=0, \dots, p-1 \\ X_m &= (x_{m,1}, \dots, x_{m,2^{p-m}})^T \\ D_{m+1} &= (d_{m+1,1}, \dots, d_{m+1,2^{p-m-1}})^T \end{aligned}$$

$(Q_m)_{j,k}$ 를 Q_m 의 (j, k) 원소라 하자. 그러면 다음의 관계가 형성됨을 알 수 있다.

$$d_{m+1,k} = \sum_{j=1}^{2^{p-m}} x_{m,j} (Q_m)_{j,k} \quad (A)$$

본문의 식 (1)로 정의된 과정을 보자. R^m 을 g_l 계수로 형성된 행렬이라 하면 다음의 관계를 얻는다.

$$R_m X_m = X_{m+1}, m=0, \dots, p-1$$

$(R_m)_{i,k}$ 를 R_m 의 (j, k) 원소라 하자. 그러면 처음 계산은 다음과 같다.

$$x_{1,k} = \sum_{j=1}^{2^p} x_j (R_0)_{k,j}$$

다음 단계는 다음과 같이 계산한다.

$$x_{2,k} = \sum_{j=1}^{2^{p-1}} x_{1,j} (R_1)_{k,j} = \sum_{j=1}^{2^{p-1}} \sum_{t=1}^{2^p} x_t (R_1)_{k,j} (R_0)_{j,t} = \sum_{k=1}^{2^p} x_t (R_1 R_0)_{k,t}$$

위와 같이 계산해 나가면 단계 m ($p \geq m > 0$)에서는 다음과 같이 계산한다.

$$x_{m,k} = \sum_{t=1}^N x_t (R_{m-1}, \dots, R_0)_{k,t}$$

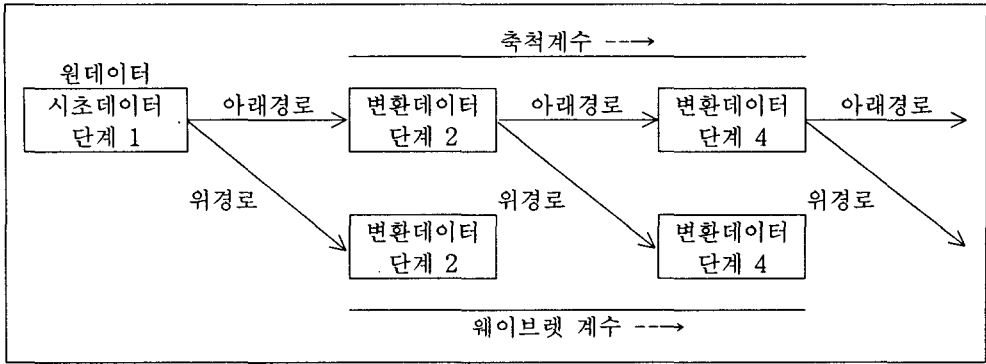
식 (A)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$d_{m+1,k} = \sum_{j=1}^{2^{p-m}} (Q_{m-1})_{k,j} \left[\sum_{t=1}^N x_t (R_{m-1}, \dots, R_0) \right]_{j,t}$$

따라서

$$d_{m,k} = \sum_{j=1}^N x_j (Q_m, R_{m-2}, \dots, R_0)_{k,t}, p \geq m > 1$$

$m=1$ 일때 R 는 존재하지 않지만 공식은 동일하다. $N \times N$ 행렬 W 를 다음과 같이 얻으며 이 행렬은 직교 행렬(orthogonal matrix)이다.



[그림 1] 이산 웨이브렛 변환

푸리에 분석은 국지 빈도 기저함수와 정상과정을 분석하는데 필요한 스펙트럼이 갖추어져 있다. 그래서 정상과정의 분석에 적합하다. 그러나 웨이브렛 분석은 비정상시계열과정의 시간에 따라 변화하는 행동을 포착할 수 있다. 웨이브렛은 시간과 빈도에서 국지화가 잘 이루어진다. 이것은 빈도가 높을 때 웨이브렛은 시간받침(time support)이 작고 빈도가 낮을 때 시간받침이 크게 되어 시계열의 성질을 제대로 포착한다.

웨이브렛 성질을 살펴보자. 웨이브렛 필터계수를 $h_l = (h_0, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0)^T$ 라 하자. $\{h_l\}$ 이 폭 L을 가지기 위해서는 $h_0 \neq 0$ 이고 $h_{L-1} \neq 0$ 이어야 한다. $l < 0$ 과 $l \geq L$ 에 대하여 $h_l = 0$ 이며 웨이브렛 필터는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\sum_{i=0}^{L-1} h_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} h_i^2 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} h_i h_{i+2n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i h_{i+2n} = 0 \quad (n = \text{영이 아닌 모든 정수})$$

$$\begin{matrix} 2^p : (1 \times N) \\ 2^p : (1 \times N) \\ 2^{p-1} : (2 \times N) \\ 4 : (2^{(p-2)} \times N) \\ 2 : (2^p \times N) \end{matrix} \begin{pmatrix} R_{p-1} \cdots R_0 \\ Q_{p-1} R_{p-2} \cdots R_0 \\ Q_{p-2} R_{p-3} \cdots R_0 \\ \vdots \\ Q_1 R_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = W$$

Haar웨이브렛은 $h_0 = 1/\sqrt{2}$, $h_1 = -1/\sqrt{2}$ 이다. 이 웨이브렛은 위 성질을 만족하고 있음을 쉽게 볼 수 있다. 이 필터는 길이가 $L=2$ 인 Daubechies의 극값 위상축척필터와 동일하다. 아랫길필터는 윗길필터와의 관계는 $g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l}$ ($l=0, \dots, L-1$)이다.

이상적인 윗길필터는 빈도 $1/4 < f < 1/2$ 을 포착해야 한다. 그러나 Haar웨이브렛은 이상적인 필터에 대한 접근도가 매우 약하다. 그러나 Haar웨이브렛은 $1/4$ 이하인 빈도에 양수의 가중치를 준다. 시계열을 DWT을 통하여 필터하고 Haar웨이브렛을 사용할 때, 저빈도(low frequency) 내용의 상당량이 웨이브렛 계수에 스며든다. 이 것이 Haar웨이브렛의 큰 결점이다. 이 점을 극복하기 위한 것이 Daubechies(1992)가 길이를 변화시키면서 개발한 웨이브렛이다.

3. 빠른 웨이브렛 변환

웨이브렛은 다음 조건을 만족하는 $L^2(\mathbb{R})$ 함수 $\psi(t)$ 로 정의된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} |\psi(\omega)|^2 < \infty$$

위에서 ψ 는 ϕ 의 푸리에 변환이다. ϕ 는 제곱적분 가능함수이므로 위 조건은 $\psi(0)=0$ 일 때에만, 즉 $\int \phi(t)dt=0$ 일 때에만 만족한다. ϕ 는 $|\omega| \rightarrow \infty$ 함에 따라 충분히 빠르게 소멸한다. 위 조건을 만족하는 웨이브렛으로 가장 단순하여 이해하기 쉬운 전형적인 것은 다음의 이상적인 윗길웨이브렛이다.

$$\psi(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \rightarrow (\pi, 2\pi) \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \quad (4)$$

확장모수(dilation parameter)를 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 라 하고 평행이동 모수를 정수 n 이라 할 때 ψ 의 확장과 평행이동은 다음과 같다.

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n) \quad (5)$$

위에서 $\hat{\psi}_{m,n}(\omega) = 2^{m/2} e^{-i2^m n \omega} \hat{\psi}(2^m \omega)$ 임을 용이하게 알 수 있다. 식 (4)의 확

장된 이상적인 윗길 웨이브렛은 빈도대응(frequency response)이 다음과 같다.

$$\psi_{m,0}(\omega) = \begin{cases} 2^{m/2}, & |\omega| \in (2^{-m}\pi, 2^{-m+1}\pi) \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \quad (6)$$

평행이동한 웨이브렛의 푸리에 변환도 복소 지수 항인 $e^{-i2^m \omega t}$ 을 포함하므로 $\psi_{m,n}$ 은 $\psi_{m,0}$ 과 동일하지 않다. 그러나 두 함수의 받침은 동일하다. 확장과 평행이동의 집합은 $L^2(\mathbb{R})$ 의 완비 정규직교 기저가 되어 $x_t \in L^2(\mathbb{R})$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_t = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (7)$$

위에서 아래 첨자의 \mathbb{Z} 는 정수집합이다. 위 식에 삽입된 다음식은 웨이브렛 계수이다.

$$w_{m,n} = \int x_t \psi_{m,n}(t) dt \quad (8)$$

식 (4)에 비추어 볼 때 식 (7)에 의한 x_t 의 웨이브렛표현은 빈도공간을 dyadic block($\pm 2^{-m}\pi, \pm 2^{-m+1}\pi$)로 분할하는 것이다. 확장모수 m 의 각 값에 대하여 dyadic frequency block은 축척 $m-1$ 을 갖는 block에서 한 옥타브 아래로 이동한다. m 의 값이 작으면 받침은 크다. 이 성질에 의하여 웨이브렛이 갑작스런 건너뛰기(jumps)를 갖는, 조각마다 매끄러운(piecewise-smooth) 함수를 분석하고 매끄럽게 진행되다 갑자기 거칠어지는 함수를 분석하는데 유용하다. 웨이브렛은 시간과 빈도에서 국지화되므로, 함수의 거친 부분이나 건너뛰는 부분 위의 웨이브렛 계수는 매끄러운 부분의 계수에 비해 크다.

웨이브렛 계수 $w_{m,n}$ 은 $\psi_{m,n}$ 을 갖는 x_t 의 합성변환(convolution)과 동일하다. 실증분석에 있어서 x_t 는 이산적인 점들의 집합이므로 $w_{m,n}$ 은 filter bank에 의하여 계산된다. 따라서 ψ 를 직접적으로는 계산할 필요가 없다. 그 대신 filter bank계수 h_l 를 사용하여 계산한다. 아랫길필터는 웨이브렛 변환에서 다음의 filter bank로 나타낸다.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{2L-1} h_l \phi(2t-l) \quad (9)$$

위에서 $\{h_l\}_{l=0}^{2L-1}$ 은 영이 아닌 필터계수이다. 윗길 필터는 다음과 같다.

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{2L-1} g_k \phi(2t-k) \quad (10)$$

위에서 $g_l = (-1)^l h_{2L-1-l}$ 이다. 이와 같이 계산되는 웨이브렛이 차수 L의 Daubechies 웨이브렛이다. L이 크면 클수록 웨이브렛은 매끄러워지고 빈도위치가 더욱 좋아진다. 그러나 이 국지화는 시간받침이 보다 커야한다는 단점이 존재한다.

아랫길 필터계수 $\{h_l\}$ 은 시계열의 고빈도특색(건너뛰기, 움푹패임, 특이점)을 매끄럽게 해주는 이동평균 필터이다. 반면 윗길 필터계수 $\{g_l\}$ 은 아랫길 필터가 필터를 통하여 제거한 세부사항을 포착하는 차분작용소(differencing operator)의 역할을 담당한다.

함수 ϕ 는 축척화함수라 부른다. 왜냐하면 이 함수는 축척, 즉 척도화를 수행하기 때문이다. 이상적인 윗길 웨이브렛에서와 같이, 아래의 빈도대응(frequency response)을 갖는 이상적인 아랫길로 축척함수를 생각할 수 있다.

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{기타} \end{cases}$$

ϕ 는 소멸하는 적률을 갖는다. 그러나 ϕ 는 ϕ 와는 달리 소멸하는 확률을 갖지 않는다. $\int \phi(t)dt = 1$, 즉 $\sum_l h_l^2 = 1$ 이 되도록 ϕ 를 정규화한다. ϕ 의 확장과 평행이동을 아래와 같이 정의하자.

$$\phi_{m,n} = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n)$$

위에서 m, n은 정수이고 $\phi_{m,n}$ 의 filter bank는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2} \sum_{l=0}^{2^l-1} g_l \phi(2^{-(m+1)}t - 2n - l)$$

$\phi_{m,n}$ 에 대한 윗길필터 정의를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} w_{m,n} &= 2^{-m/2} \sum_{l=0}^{2L-1} g_l \int x_t \phi(2^{-(m+1)}t - 2n - l) dt \\ &= 2^{-m/2} \sum_{l=0}^{2L-1} g_l s_{m-1, 2n+l} \end{aligned} \quad (11)$$

위에서 $s_{m,n} = 2^{-m/2} \int x_t \phi(2^{-m}t - n) dt$ 로서 축척화계수이다. 따라서 $w_{m,n}$ 을 계산하자면 $\{s_{m-1,n}\}$ 을 알아야한다. 축척화 계수 $s_{m,n}$ 은 $\phi_{m,n}$ 을 아랫길 경로 필터로 다음과 같이 쓰면 계산할 수 있다.

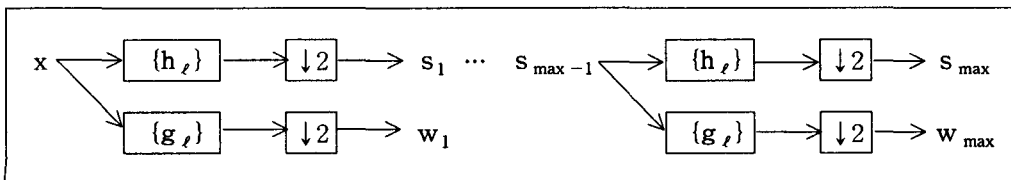
$$2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n) = 2^{-(m-1)/2} \sum_{l=0}^{2L-1} h_l \phi(2^{-(m-1)}t - 2n - l)$$

x_t 를 위 식으로 합성변환하면 $s_{m,n}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s_{m,n} &= 2^{-(m-1)/2} \sum_{l=0}^{2L-1} h_l \int x_t \phi(2^{-(m-1)}t - 2n - l) dt \\ &= \sum_{l=0}^{2L-1} h_l s_{m-1, 2n-l} \end{aligned} \quad (12)$$

따라서 $s_{m,n}$ 과 $w_{m,n}$ 은 다같이 filter bank를 단순히 곱하고 더하는 과정으로 가장 작은 것에서 가장 큰 것을 반복 계산하여 얻는다. 반복계산절차는 빠른 웨이브렛 변화이라 부르며 이를 도시하면 [그림 2]와 같다. 그림에 사용된 부호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X &= (x(1), x(2), \dots, x(2^{\max}))^T \\ S_m &= (s_{m,1}, s_{m,2}, \dots, s_{m, 2^{\max} - m})^T \\ W_m &= (w_{m,1}, w_{m,2}, \dots, w_{m, 2^{\max} - m})^T \end{aligned}$$



[그림 2] 빠른 웨이브렛 변환

임의의 m 값에 대한 웨이브렛 계수들은 s_{m-1} 이 $\{h_l\}$ 에 의하여 필터될 때 잃는 정보를 나타낸다. 다시 말하면 w_m 은 s_m 에서 s_{m-1} 을 얻는데 필요한 세부사항(details)이나 정보를 포함한다. [그림 2]에서 네모 $\boxed{\downarrow 2}$ 는 필터에서 2로 결과를 축소축적하고 있음을 나타내고 있는 것이다. 다시 말하면 홀수 표본 관찰치를 버리는 것을 의미한다. 정의에 의하여, 이상적인 아랫길필터와 윗길 필터인 ϕ 와 ϕ^* 는 축소축적을 포함하고 있다. 필터계수 $\{h_l\}$ 과 $\{g_l\}$ 은 다같이 s_m 에 적용되므로 s_m 의 길이의 2배의 관찰치를 생성시킨다. 이 결과의 반은 s_m 을 완벽하게 나타내거나 또는 회복시키는데 필요하다.

Daubechies 웨이브렛에 대한 filter bank의 직교성으로 인하여 [그림 2]의 방향을 역행시키면 웨이브렛 변환에서 원시계열인 x 를 복원시킬 수 있다. 이 복원을 합성(synthesis)이라고 한다. 웨이브렛 합성에서 w_m 의 세부사항을 매끄러운 시계열 s_m 에 합하면 다음 단계의 복원(resolution) s_{m-1} 에서 X 를 나타내 주는 결과를 얻게 되며 이를 계속하여 가장 높은 단계의 복원을 얻게 하는데 가장 높은 복원은 원시계열인 X 자체이다.

4. Haar 웨이브렛

웨이브렛에는 여러 모형이 존재하고 있다. 가장 간단한 웨이브렛이 Haar 웨이브렛이므로 위의 분석을 Haar웨이브렛에 적용시켜 구체적으로 계산하는 방법을 살펴보고자 한다.

실선전체에서 정의되고 제곱 적분가능한 모든 실함수의 집합을 $L^2(\mathbb{R})$ 이라 하자. $L^2(\mathbb{R})$ 은 벡터공간의 구조를 갖는다. 두 함수 θ, y 의 내적(dot product)은 $\theta \cdot y = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) y(x) dx$ 이다.

구간 I 의 특성함수 $\chi_I(x)$ 가 다음과 같다고 하자.

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

반개단위구간을 사용하면 이 특성함수는 다음과 같다.

$$\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ 또는 } x \geq 1 \end{cases}$$

축척과 평행이동을 사용하여 $L^2(\mathbb{R})$ 에 있는 함수의 완비 정규 직교집합을 생성시킬 수 있다. 예컨대 다음과 같은 축척에 의한 식을 얻을 수 있다.

$$\theta(x) = \begin{cases} x \sin(x), & 0 \leq x \leq 15 \\ 0, & x < 0 \text{ and } x > 15 \end{cases}$$

위 식에 더하여 예컨대 $\theta(x+5)$ 또는 $\theta(x-5)$ 의 평행이동식을 얻을 수 있다. 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \chi_{[0,1]}(x) \\ \phi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ and } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

n 을 임의의 정수라 하면 평행이동에 의하여 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x-n) &= \phi(2(x-n)) - \phi(2(x-n)-1) \\ &= \phi(2x-2n) - \phi(2x-2n-1) \\ &= \begin{cases} 1, & n \leq x < n+1/2 \\ -1, & n+1/2 \leq x < n+1 \\ 0, & x < n \text{ and } x \geq n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

평행이동과 축척을 결합하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi(2x-m) &= \phi(2(2x-m)) - \phi(2(2x-m)-1) \\ &= \phi(4x-2m) - \phi(4x-2m-1) \\ &= \begin{cases} 1, & \frac{m}{2} \leq x < \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \\ -1, & \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \leq x < \frac{(m+1)}{2} \\ 0, & x < \frac{m}{2} \text{ and } x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

위에서 m 은 임의의 정수이다. 이 평행이동되고 축척된 함수들은 $L^2(\mathbb{R})$ 에서 정규직교이다. 서로 구별되는 임의의 정수 n 과 m 에 대하여 다음이 형성된다.

$$\begin{aligned}\phi(x-n) \cdot \phi(x-m) &= 0 \\ \phi(2x-n) \cdot \phi(2x-m) &= 0 \\ \phi(x-n) \cdot \phi(2x-m) &= 0\end{aligned}$$

정수 m 에 대하여 축적인수 2^m 을 사용하여 이 함수집합을 전개하면 단축된 구간(양수 m)이나 확장된 구간 (음수 m)에서 0이 아닌 상수 값들을 취하는 함수들을 얻을 수 있다. 각 정수 m 과 각 정수 n 에 대하여 $\sigma_{m,n}(x) = \phi(2^m x - n)$ 으로 정의하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n}(x) &= \phi(2^{m+1}x - 2n) - \phi(2^{m+1}x - 2n - 1) \\ &= \begin{cases} 1, & \frac{n}{2^m} \leq x < \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} \\ -1, & \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} \leq x < \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^m} \\ 0, & x < \frac{n}{2^m} \text{ and } x \geq \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^m} \end{cases}\end{aligned}$$

위에서 n 은 이 식의 그래프가 x 축에서 얼마나 멀리 떨어져 나가느냐는 것을 결정해 준다. 그리고 m 은 함수 값이 0 이 되지 않는 구간의 크기를 지배(조정)한다. 이 함수들 역시 $L^2(R)$ 에서 직교이다. 즉, n, m, n', m' 이 정수이고 $(m, n) \neq (m', n')$ 이면 $\sigma_{m,n} \cdot \sigma_{m',n'} = 0$ 이다. $\sigma_{m,n}$ 들은 직교이지 정규직교는 아니다. 이 함수들을 각각 그 길이, 즉 $L^2(R)$ 위의 내적으로 나누자. 면적 길이를 계산하면 다음과 같다.

$$(\sigma_{m,n} \text{의 길이})^2 = \sigma_{m,n} \cdot \sigma_{m,n} = \int_{n/2^m}^{n/2^m + 1/2^m} \sigma_{m,n}^2(x) dx = \int_{n/2^m}^{n/2^m + 1/2^m} dx = \frac{1}{2^m}$$

위 길이로 나누면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\psi_{m,n}(x) &= 2^{m/2} \sigma_{m,n}(x) = 2^{m/2} (\phi(2^{m+1}x - 2n) - \phi(2^{m+1}x - 2n - 1)) \\ &= \begin{cases} 2^{m/2}, & \frac{n}{2^m} \leq x < \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} \\ -2^{m/2}, & \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} \leq x < \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^m} \\ 0, & x < \frac{n}{2^m} \text{ and } x \geq \frac{n}{2^m} + \frac{1}{2^m} \end{cases}\end{aligned}$$

위의 함수 $\phi_{m,n}(t)$ 는 $L^2(R)$ 에서 정규직교집합을 형성한다. 이 함수들을 Haar 웨이브렛이라 한다. 이 때 ϕ 는 축적함수이고 $\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$ 은 모 웨이브렛이다. Haar 웨이브렛은 $L^2(R)$ 에서 완비이다. 다시 말하면: θ 가 제곱적분가능하면, $\theta(x)$ 는 함수 y 에 의하여 우리가 원하는 만큼 정확하게 근사치화 할 수 있다는 것이다. 이 때 함수 y 는 콤팩트 받침(compact support) 또는 꼭 찬 지지를 가지고 또한 반개구간 $[n/2^m, (n+1)/2^m]$ (n, m 은 정수)를 가진다. 그와 같은 구간은 길이가 $1/2^m$ 인데, 이 길이는 정수의 m 의 선택에 의하여 길게 할 수도 있고 짧게 할 수도 있다. y 는 상수와 Haar 웨이브렛의 곱에 의하여 우리가 원하는 만큼 가깝게 근사화 할 수 있다.

앞에서 본 바와 같이, 웨이브렛은 시계열 자료를 분석하기 위한 수학적 도구이다. Jensen(1999)에 의하면, 웨이브렛의 강점은 시간과 축척(scale)의 두 측면에서 한 과정을 동시에 소역화 또는 국지화(localization) 할 수 있는 능력에 있다. 축척이 높을 때, 웨이브렛은 소규모의 집중된 시간 받침 또는 시간지지(time support)를 가지게 되는데, 이 시간받침에 의하여 특이점과 같은 단기시간현상에 초점을 맞출 수 있다. 축척이 낮을 때, 웨이브렛은 대규모의 시간받침을 갖게 되며, 이 시간받침에 의하여 장기의 주기적 행동을 인식 또는 인지할 수 있다. 축척을 낮은 정도에서 높은 정도로 옮겨감에 따라 웨이브렛은 시간의 한 점에서 과정의 행동을 줌(zoom) 안으로 끌어드려 특이점들, 뛰어 넘은 점들(jumps), 뽀족한 끝들(usps) 같은 것을 밝혀낸다. 반대로 줌을 밖으로 물면, 시계열의 장기적이고 매끄러운 특성들을 들어 내준다. 이에 반하여 푸리에 변환은 시그널을 포함하는 빈도 정보나 진동만 제공해준다. 따라서 하나의 진동이 언제 발생하는가에 대한 정보를 제공해주지 않는다. 그러나 웨이브렛은 시간과 빈도에 대한 정보를 계속 추적 해간다.

웨이브렛 분석에는 위에서 살펴본 바와 같이 두 함수가 중요한 역할을 담당하고 있다. 이 함수 중 하나는 축적함수이고 다른 하나는 모 웨이브렛이며 모 웨이브렛은 보통 웨이브렛이라고 한다. 이 두 함수가 시그널을 쪼개거나 재구성하는데 사용하는 함수족을 생성한다.

웨이브렛 변환은 빈도의 함수인 푸리에 변환과는 대조적으로 축척의 함수 이

다. 개략적으로 말하면 : 축적은 빈도구간에 반비례한다. 축적모수가 증가하면 웨이브렛 기저는 시간 정의역에서 잡아당겨 늘어지고(stretch), 빈도정의역에서 수축하고 보다 낮은 빈도를 향하여 이동된다. 역으로 : 축적모수가 감소하면 시간받침이 감소하고 포착된 빈도의 개수가 증가하고 보다 높은 빈도로 향하여 이동한다.

웨이브렛 변환은 기본함수를 사용하고 그런 다음 이 기본함수를 확대하고 평행이동시켜 시간에 있어서 국소적이고 빈도에 있어서 국지적인 특성을 포착한다. 웨이브렛 변환에 의하여 이룩된 시간-빈도 분할은 저빈도사건들을 포착할 때에는 시간의 측면에서 길다. 이 사건들에 대하여 빈도의 복원이 잘 이루어진다. 그러나 고빈도의 사건들을 포착할 때에는 시간-빈도 분할이 빈도의 측면에서 길다. 따라서 이 사건들에 대하여 시간복원의 형성이 좋다. 웨이브렛 변환은 광범위한 빈도들에 걸친 특성들을 용이하게 파악해주는 변환인 것이다.

5. 웨이브렛의 종류

축적함수를 사용하여 모 웨이브렛 ϕ 를 생성시킬 수 있다. 모 웨이브렛은 직교여원에 있는 각 함수로 평행이동 $\phi(t-n)$ 의 선형결합이다. 그와 같은 모 웨이브렛이 존재하면 모든 정수 m 과 n 에 대하여 웨이브렛 족을 다음과 같이 형성할 수 있다.

$$\psi_{m,n} = 2^{m/n} \phi(2^m x - m)$$

웨이브렛은 다음 형태의 함수집합을 의미한다.

$$\psi_{ab}(x) = |a|^{-1/2} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

위 식은 $|a|^{-1/2}$ 에 의하여 정규화(normalization)된 식이다. 말하자면 : 양의 실수 $a \in R^+$ 에 의하여 통제됨으로서 단일함수 $\phi(x)$ 가 확대변환(dilation) 되고, 실수 $b \in R$ 에 의하여 통제됨으로서 단일함수 $\phi(x)$ 의 평행이동에 의하여 형성된 함수집합이다. $\psi(x)$ 를 모 웨이브렛이라 한다. 모 웨이브렛은 진동의 대부분

의 에너지가 물리적 공간의 좁은 영역에 위치한 국소적 진동으로 나타난다. 물리적 공간에서의 이 국소화는 빈도에서의 국소화를 제약한다. 확대변환 모수 a 는 국소적 진동의 폭과 율(width and rate)을 통제한다. 평행이동모수 b 는 정의역을 통하여 웨이브렛을 이동시킨다.

정수 j 와 l 에 대하여 $a=2^j$ 와 $b=l2^j$ 라 하자. 그러면 다음의 함수집합이 유한의 에너지를 가지는 $L^2(R)$ 안의 함수공간의 정규직교기저를 형성하도록 웨이브렛 $\phi(x)$ 가 존재한다.

$$\phi_{j,l}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - l)$$

위에서 두 모수 j 와 l 은 주어진 함수의 국지적 특성의 분석에 따라 그 값이 변할 수 있다. 두 함수, 즉 축적함수 $\psi(x)$ 와 웨이브렛 $\phi(x)$ 를 고찰하자. 축적함수는 확대변환 방정식들의 해이다. 즉

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} h_l \phi(2x - l) \quad (13)$$

위에서 $\psi(x)$ 는 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) d(x)$ 로 정규화 할 수 있다. $\{h_l\}$ 은 웨이브렛 필터이다. L 은 필터의 폭(width)이다. 웨이브렛 $\phi(x)$ 는 축적함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} g_l \phi(2x - l)$$

위에서 $\{g_l\}$ 은 축적 필터이다. 웨이브렛 필터와 축적필터를 사용하여 DWT를 수행할 수 있다. 정규직교기저는 확대변환과 평행이동을 통하여 $\psi(x)$ 와 $\phi(x)$ 로부터 얻을 수 있는데 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{j,l}(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - l) \\ \psi_{j,l}(x) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - l) \end{aligned} \quad (14)$$

위에서 $j, l \in Z$ 이다. 첨자 j 는 확대변환모수이고 첨자 l 은 평행이동모수이

다. 계수 $H = \{h_l\}_{l=0}^{L-1}$ 과 $G = \{g_l\}_{l=0}^{L-1}$ 은 $l=0, \dots, L-1$ 에 대하여 $g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l}$ 로 상호연관성을 맺고 있다. 모든 웨이브렛 성질들은 모수 H와 G를 통하여 규정된다. 데이터집합이 정상적 정의역 위에서 정의된 경우에는 이 데이터는 계수 H와 G를 가지고 분석하거나 필터한다. 축적함수 $\phi(x)$ 와 그 계수 H는 낮은 빈도정의역을 인지해낸다. 말하자면 아랫길 필터이다. 웨이브렛 $\phi(t)$ 와 그 계수 G는 국소화된 고빈도 정보를 인지한다. 이것들은 윗길(high pass) 필터이다. 이 두 집합 G와 H는 구적법영상필터(quadrature mirror filter)이다. 축적함수의 집합은 기본 축적함수의 정수평행이동에 의하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi_l(x) = \phi(x-l), \quad l \in Z, \quad \phi \in L^2(R)$$

실수의 웨이브렛 필터를 $\{h_l: l=0, \dots, L-1\}$ 이라 하자. $H(\cdot)$ 를 $\{h_l\}$ 의 전달함수로 빈도 f 에 대하여 다음의 형태를 가진다고 하자.

$$H(f) = \sum_{-\infty=0}^{\infty} h_l e^{-i2\pi fl} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l e^{-i2\pi fl} \quad (15)$$

반면 $\{g_l\}$ 에 대한 전달함수 $G(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$G(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-i2\pi fl} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l e^{-i2\pi fl} = e^{-i2\pi f(L-1)} H\left(\frac{1}{2} - f\right) \quad (16)$$

따라서 $[G(f)]^2 = H(1/2 - f)^2$ 이다. 이 함수들은 제곱이득함수이다. 제곱이득함수를 통하여 빈도정의역에서 표현하면 모든 f 에 대하여 $[H(f)]^2 + [H(f+1/2)]^2 = 2$ 이다. 모든 f 에 대하여 $[G(f)]^2 + [G(f + \frac{1}{2})]^2 = 2$ 이고 $[G(f)]^2 + [H(f)]^2 = 2$ 이다. 윗길·아랫길 대역(pass band)이 $1/4 \leq f \leq 1/2$ 이면 $\{h_l\}$ 는 윗길필터이고 윗길·아랫길 대역이 $0 \leq f \leq 1/4$ 일 때 $\{g_l\}$ 은 아랫길필터이다.

Daubechies(1992)의 웨이브렛 필터들은 Haar 웨이브렛의 빈도·정의역의 특성을 포착하는데 한 걸음 진보된 필터이고 다음과 같다.

$$[G^{(D)}(f)]^2 = 2 \cos^L(\pi f) \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \sin^{2l}(\pi f) \quad (17)$$

위에서 L 은 양의 짝수 정수이다. $D(2)$ 축적필터는 Haar 축적필터와 동일하다. $[H^{(D)}(f)]^2 = [G^{(D)}(f + \frac{1}{2})]^2$ 의 관계가 형성되므로, 이에 대응되는 Daubechies 웨이브렛필터는 다음을 만족하는 제곱이득함수를 가진다.

$$[H^{(D)}(f)]^2 = 2 \sin^L(\pi f) \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \cos^{2l}(\pi f) \quad (18)$$

위 식에 대하여는 $[H^{(D)}(f)]^2$ 는 $[H^{(D)}(f)]^2 = D^{L/2}(f)A_L(f)$ 로 쓸 수 있으며 $D^{L/2}(f)$ 는 $D^{L/2}(f) = 4 \sin^2(\pi f)$ 이다. 이것은 필터 $\{1, -1\}$ 의 제곱이득함수이다. $A_L(f)$ 는 다음과 같다.

$$A_L(f) = \frac{1}{2^{L-1}} \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \cos^{2l}(\pi f)$$

위 식 $A_L(f)$ 는 아랫길 필터의 제곱이득함수이다. Daubechies 웨이브렛에서 $[H^{(D)}(f)]^2 + [H^{(D)}(f + \frac{1}{2})]^2 = 2$ 가 형성되며 $[H^{(D)}(0)]^2 = 0$ 은 $\sum h_l = 0$ 을 함의한다. 축적필터 $\{g_l\}$ 은 다음에 의하여 주어진 제곱이득함수이다.

$$[G^{(D)}(f)]^2 = [H^{(D)}(\frac{1}{2} - f)]^2 = 2 \cos^L(\pi f) \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \sin^{2l}(\pi f)$$

Daubechies 웨이브렛 필터는 $L=2$ 의 경우 Haar 웨이브렛 필터 $\{h_0 = 1/\sqrt{2}, h_1 = -1/\sqrt{2}\}$ 와 같다. $L=4$ 인 $D(4)$ 의 경우는 필터가 $\{h_0 = (1-\sqrt{3})/4\sqrt{2}, h_1 = (-3+\sqrt{3})/4\sqrt{2}, h_2 = (3+\sqrt{3})/4\sqrt{2}, h_3 = (-1-\sqrt{3})/4\sqrt{2}\}$ 이다.

Daubechies 웨이브렛은 에너지가 유한인 함수에 대하여 정규직교 기저를 구성한다. 축적함수와 웨이브렛은 꽤 비대칭적이다. 이 성질은 많은 응용에 있어

서 소망스러운 성질이 되지 못하고 있다. 왜냐하면 우리가 고찰하고 있는 시그널의 한 점의 오른쪽과 왼쪽에 절대가중치를 달리 부여할 이유가 없는 경우가 많기 때문이다. 이 결점을 극복하기 위하여 : Daubechies 는 선형위상으로부터의 최대위상편의 운동폭을 최소화 시키는 인수분해를 선택할 것을 제외하고, 이를 사용하여 얻은 웨이브렛을 최소 비대칭 웨이브렛이라고 부르고 있다. 최소 비대칭 웨이브렛은 다음과 같이 얻을 수 있다. $\{g_l : l = 0, \dots, L-1\}$ 에 대한 전달함수 G 는 극표현을 통하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G(f) = \{[G^{(D)}(f)]^2\}^{1/2} e^{i\theta^{(G)}(f)} \quad (19)$$

$[G^{(D)}(\cdot)]^2$ 가 주어지면, 스펙트럼 인수분해를 통하여 모든 가능한 $\{g_l\}$ 을 얻을 수 있다. 인수분해를 달리하면 다른 위상함수 $\theta(\cdot)$ 를 얻게된다. Daubechies의 극값위상축척필터는 $D(L)$ 축척필터라 한다. 여기에서 L 은 물론 $L=2, 4, \dots$ 이다. $D(2)$ 축척필터는 Haar 축척필터와 동일하다. 즉, $g_0^{(ep)} = 1/\sqrt{2}$ 이고 $g_1^{(ep)} = 1/\sqrt{2}$ 이다. 모든 f 에 대하여 $\theta(f) = 0$ 의 성질을 만족하는 위상함수를 갖는 필터는 0 위상필터이다.

어떤 실수 ν 에 대하여 $\theta(f) = 2\pi f\nu$ 를 만족하는 위상함수를 갖는 필터는 선형위상필터이다. 0 위상필터와 선형위상필터를 사용하면 폭 L 의 Daubechies 최소 비대칭축척필터를 다음과 같이 얻을 수 있다. 제곱이득함수 $[G^{(n)}(\cdot)]^2$ 를 갖는 모든 가능한 수열 $\{g_l : l = 0, \dots, L-1\}$ 과 주어진 이동 $\bar{\nu}$ 에 대하여 다음을 계산한다.

$$\rho_{\nu} \sim \{g_l\} = \max_{-1/2 \leq f \leq 1/2} |\theta^{(G)}(f) - 2\pi f\nu| \quad (20)$$

위에서 $\theta^{(G)}(\cdot)$ 는 $\{g_l\}$ 에 대한 위상함수이다. $\{g_l\}$ 이 주어질 때, ν 는 위 식을 최소화하는 이동(shift)이다. 최소비대칭 필터 $g_l^{(w)}$ 는 $\rho_{\nu}(\{g_l\})$ 를 최소화하는 필터이다. ν 는 식 (20)을 최소화하는 $\bar{\nu}$ 의 값이므로 $\theta^{(G)}(f) \approx 2\pi f\nu$ 를 얻는다. 이에 대응되는 웨이브렛 필터에 대한 위상함수는 $\theta^{(H)}(f) = 2\pi f(L-1) +$

$\pi + \theta^G\left(\frac{1}{2} - f\right)$ 에 의하여 주어지면 이 식은 $\theta^{(H)}(f) = -2\pi f(L-1+\nu) + \pi(\nu+1)$ 이 된다. 따라서 ν 가 홀수이면 웨이브렛 위상함수는 대략적으로 선형이다. 즉 $\theta^{(G)}(f) \approx -2\pi f\nu$ 이다. ν 는 다음과 같다.

$$\nu = \begin{cases} -\frac{L}{2} + 1, & L=8, 12, 16, 20 \\ -\frac{L}{2}, & L=10 \text{ 또는 } 18 \\ -\frac{L}{2} + 2, & L=14 \end{cases}$$

Coiflet wavelet 필터는 0 위상필터에 대하여 LA 필터보다 좋은 결과를 생성시키는 필터이다. $\nu = -2L/3+1$ 이라 하자. 그러면 coiflet 필터 $\{h_i^{(C)}\}$ 에 대한 제곱이득함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[H^{(C)}(f)]^2 = \bar{D}^{L/3}(f) \left(\sum_{l=0}^{L/6-1} \binom{\frac{L}{6}-1+l}{l} \cos^{2l}(\pi f) + \cos^{L/3}(\pi f) F(f) \right)^2 \quad (21)$$

위에서 $F(\cdot)$ 는 모든 f 에 대하여 $[H^{(C)}(f)]^2 + [H^{(C)}(f + \frac{1}{2})]^2 = 2$ 를 만족하도록 선정된 삼각함수 다항식이다. 그리고 $\bar{D}(f)4\sin^2(\pi f)$ 이다. $\{g_i^{(C)}\}$ 에 대한 위상함수를 계산하면 $\nu = -2L/3+1$ 에서 $2\pi f\nu$ 이다. 여기에서 $L=6, 12, 18, 24, 30$ 이다.

6. 웨이브렛 계수와 시계열

$\{X_t\}$ 의 이산 웨이브렛 변환은 정규직교 변환이다. $\{W_n; n=0, \dots, N-1\}$ 을 DWT계수라 하자. 그러면 $W = wX$ 라 쓸 수 있다. 여기에서 W 는 길이 $N=2^J$ 인 열벡터이고 이 벡터의 n 번째 열은 n 번째 DWT 계수 W_n 이다. w 는 DWT를 정의하는 $N \times N$ 실가 행렬이며 $w^T w = I_N$ 을 만족한다. 정규직교성에 의하여 $X = w^T W$ 를 얻는다. W 는 $J+1$ 개의 부분벡터로 나눌 수 있다. 즉 $W =$

$(W_1, W_2, \dots, W_J, V_J)'$ 이다. 여기에서 J 는 $N=2^J$ 이다. $j=1, \dots, J$ 에 대하여 축척 τ_j 를 $\tau_j=2^{j-1}$ 이라 할 때 j 번째 부분벡터는 축척 τ_j 에 대한 모든 DWT 계수를 포함한다.

웨이브렛 계수와 축척계수는 각각 다음에 의하여 얻는다.

$$W_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l X_{2t+1-l \bmod N}, \quad t=0, \dots, N/2-1$$

$$V_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l X_{2t+1-l \bmod N}, \quad t=0, \dots, N/2-1$$

$N_j=N/2^j$ 라 하자. 그러면 j 번째 수순 웨이브렛과 축척계수는 다음과 같다.

$$W_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_{j-1, 2t+1-l \bmod N_{j-1}}, \quad t=0, \dots, N_j-1$$

$$V_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{j-1, 2t+1-l \bmod N_{j-1}}, \quad t=0, \dots, N_j-1$$

최대 중첩 이산 웨이브렛 변환(maximal overlap DWT ; MODWT)은 DWT의 수정본이다. 수준 J_0 의 부분 DWT는 표본의 크기를 2^{J_0} 의 정수배로 제약시키는 반면 수준 J_0 의 MODWT는 임의의 표본크기 N 에 대하여도 정의가 잘 이루어진다. MODWT 웨이브렛 필터 $\{\tilde{h}_l\}$ 은 $\tilde{h}_l = h_l/\sqrt{2}$ 는 정의되며 MODWT 축척필터 $\{\tilde{g}_l\}$ 은 $\tilde{g}_l = g_l/\sqrt{2}$ 이다. 모든 0이 아닌 정수 n 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0$$

MODWT 축척 필터는 모든 0이 아닌 정수 n 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_l \tilde{g}_{l+2n} = 0$$

다음 역시 성립함을 보일 수 있다.

$$\tilde{g}_l = (-1)^{l+1} \tilde{h}_{L-1-l}$$

$$\tilde{h}_l = (-1)^l \tilde{g}_{L-1-l}$$

한 시계열 $\{X_t, t=0, \dots, N-1\}$ 이 주어졌으며, 표본의 구간이 1이라 하자. 그러면 변환에 의하여 $(J+1)$ 개 새로운 시계열을 얻을 수 있다. 이 때 각 시계열의 길이는 N 이다. 수준 $j=1, \dots, J$ 에 대하여 $\{\tilde{h}_{j,l}, l=0, \dots, L_j\}$ 를 길이 L_j 의 수준 j 웨이브렛 필터라 한다. 여기에서 $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ 이다. $\{\tilde{g}_{j,l}, l=0, \dots, L_j\}$ 를 길이가 L_j 인 단일의 수준 J 축척필터라 하자. 그러면 순환 선형필터과정을 사용하여 수준 $j=1, \dots, J$ 에 대하여 MODWT 웨이브렛 계수를 계산할 수 있다.

$\tilde{H}(\cdot)$ 와 $\tilde{G}(\cdot)$ 를 각각 (\tilde{h}_l) 과 (\tilde{g}_l) 에 대한 전달함수라 하자. 그러면 $\tilde{H}(f)H(f)/2$ 이고 $\tilde{G}(f) = G(f)/2$ 이다. 따라서 $\{\tilde{h}_{j,l}\}$ 과 $\{\tilde{g}_{j,l}\}$ 에 대한 전달함수는 각각 다음과 같다.

$$\tilde{H}_j(f) = \tilde{H}(2^{j-1}f) \prod_{l=0}^{j-2} \tilde{G}(2^l f)$$

$$\tilde{G}_j(f) = \prod_{l=0}^{j-2} \tilde{G}(2^l f)$$

$j=1$ 이고 $L_1 = L$ 이면 $\tilde{G}_1(f) = \tilde{G}(f)$ 이고 $\tilde{H}_1(f) = \tilde{H}(f)$ 이다. 따라서 $\tilde{h}_{1,l} = \tilde{h}_l$ 이고 $\tilde{g}_{1,l} = \tilde{g}_l$ 이다.

j 번째 수준 MODWT는 웨이브렛 계수들은 N 차원벡터 \tilde{W}_j 이며 이 벡터의 원소들은 다음과 같다.

$$\tilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} X_{t-l \bmod N}, t=0, \dots, N-1$$

위에서 $\tilde{h}_{j,l} = h_{j,l}/2^{j-2}$ 이다. 마찬가지로 $\tilde{g}_{j,l}$ 은 $g_{j,l}/2^{j-2}$ 이다. $j=2, \dots, J$ 에 대하여 수준 j 에서의 축척계수의 단일집합은 다음과 같다.

$$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} X_{t-l \bmod N}, \quad t=0, \dots, N-1$$

웨이브렛 계수 $\{\tilde{W}_{1,t}\}$ 와 축척계수 $\{\tilde{V}_{1,t}\}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{W}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L_1-1} \tilde{h}_l X_{t-l \bmod N}, \quad t=0, \dots, N-1$$

$$\tilde{V}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L_1-1} \tilde{g}_l X_{t-l \bmod N}, \quad t=0, \dots, N-1$$

III. 웨이브렛과 주가의 장기기억과정

1. 장기기억과정

이 장에서는 위에서 분석한 이산 웨이브렛 변환의 구체적 적용방법을 예시하고자 한다. 구체적으로는 DWT를 사용하여 주가시계열을 변환시키고 이에 따라 변환된 주가시계열이 주가의 분수차분과정을 따르고 있는지를 검정하고자 한다. 말하자면 DWT를 사용하여 주가 과정의 분수적분 모수, 즉 장기기억모수를 추정한다. 이 추정은 웨이브렛 계수의 분산과 축척모수간(scaling parameter)의 대수선형관계(log linear relationship)를 형성시켜 얻고자 한다.

재무시계열과 경제시계열의 데이터들은 차수 1의 적분과정인 I(1)과정이나 차수 2의 적분과정 I(2)를 따르고 있는 경우가 있다. 그러나 주가과정은 차분과정을 따르고 있으나 I(1)이나 I(2)와는 다른 과정을 따르고 있는 점들이 발견되어 오고 있다. 1이나 2로 적분하면 과도하게 적분되는 현상이 보인다. 이 경우 : 분수적분과정 또는 분수차분과정이 적절하게 보인다. $0 < d < 1$ 인 분수차분과정 I(d)에서는 차분이 정수가 아니라 실수 d로 차분된다. I(0)시계열에서는 충격이 지수율로 소멸한다. I(1)과정에서는 평균회귀를 하지 않는다. 그러나 I(d)과정에서는 한 시계열에 부과된 충격률이 무척 서서히 그리고 더디게 장기간에 걸쳐 쌍곡선율로 소멸하여 평균에 회귀한다. 정상적 I(d)과정의 핵심적인

특성은 자기상관들의 쌍곡선을 소멸에 의하여 반영되는 장기기억인 것이다. 시차(lag)와 주가시계열의 자기상관을 대응시킨 그래프는 지수율로 감소·소멸하지 않고 대단히 느리게 감소·소멸함을 보여주고 있다. 상관도(correlogram)는 쌍곡선율로 감소하고 있다.

이일균(1995)은 장기기억과정인 분수브라운운동의 장기모수인 Hurst계수를 한국주가시계열에 적용하여 구했는 바 이 계수가 $\frac{1}{2}$ 이 아니라는 것을 발견하였다. 이 계수가 $\frac{1}{2}$ 이면 이 과정은 표준브라운운동이 되어 마팅계일과정인 것이다. 그(1999b)는 주가가 항상부분과 전이부분(temporary component)으로 형성되고 있는지를 실증분석을 통하여 검정하고 주가과정이 무작위행보(random walk)를 따르고 있지 않으며 장기기억과정이라는 점을 밝힌 바 있다. 그(2001)는 자기상관의 직접적인 분석을 통하여 우리나라의 주가가 장기기억과정을 따르고 있음을 보인 바 있다. 이일균(2002)은 일반화적률법을 사용하여 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는지의 여부를 검정하였는 바 긍정적인 결과를 얻은 바 있다.

정상적 장기기억과정 중 단순하며 적용능력이 높은 모형이 적분차분과정(fractionally differenced (FD) process)이다.³⁾ 이 과정은 다음과 같다.

3) 이산 사계열과정을 $\{X_j\}$ 라 하자. 이 과정의 시차 j 의 자기상관함수를 ρ_j 라 하자. McLeod and Hipel(1978)은 다음의 양이 무한이면 이 과정은 장기기억과정이라는 점을 밝히고 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n [\rho_j]$$

위의 정의를 다른 말로 하면 : 스펙트럼 밀도함수 $f(\omega)$ 가 낮은 빈도(low frequencies)에서 비유계인 것이다. $H > 0$ 일 때 자기공분산 함수가 $\gamma_j \approx \zeta(j)j^{2H-2}$ 인 임의의 확률과정은 강한 합성 조건(strong mixing condition)을 위배한다. 그러므로 이 과정은 장기의존관계, 즉 장기기억과정이다. Mandelbrot and van Ness(1968)는 마팅계일과정인 브라운운동 대신 분수브라운운동을 유도한바 있다. 분수브라운운동의 공분산함수는 다음과 같다.

$$E [|B_H(t) - B_H(s)|^2] = |t - s|^{2H}$$

위에서 H 는 Hurst 계수이며, Hurst(1951)가 이 계수를 정의하였다. Hurst 계수 H 가 $H = \frac{1}{2}$ 이면 이 과정은 브라운운동으로 환원된다. 브라운운동의 공분산은 $|t - s|$ 이기 때문이다. 자기공분산은 대략적으로 $\gamma_j \approx |j|^{2H-2}$ 이다. 따라서 시차가 큰 경우 쌍곡선 소멸이 공분산함수에서 발생한다.

$$(1-B)^d X_t = \epsilon_t \quad (22)$$

위에서 ϵ_t 는 백색잡음과정으로 평균이 0이고 분산이 σ_ϵ^2 이다. 차분모수는 장기기억모수 d 로 d 는 $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ 이다. 적분시차 $(1-B)^d$ 는 다음과 같다.

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k$$

FD 과정의 스펙트럼 밀도함수는 다음과 같다.

$$s(f) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{[4 \sin^2(\pi f)]^d}, \quad \frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \quad (23)$$

빈도 f 가 작으면 대략적으로 $s(f) \propto |f|^{-2d}$ 이다. 따라서 FD 과정은 $-1 < -2d < 0$ 에 대하여 정상적 장기기억과정이다. 즉 $0 < d < \frac{1}{2}$ 이면 이 과정은 장기기억 과정이다. $d = 0$ 일 때 FD 과정은 백색잡음과정이 된다. $-\frac{1}{2} < d < 0$ 이면 FD 과정은 빈도가 낮을 때 승멩에 결함이 존재하게 되어 $s(0) = 0$ 이 된다. 식 (4)를 사용하여 $d \leq -\frac{1}{2}$ 에 대하여 정상적 과정을 정의할 수 있고 $d \geq \frac{1}{2}$ 일 때 비정상적 장기기억과정을 정의할 수 있다. FD 과정의 자기공분산 수열은 다음과 같다.

$$\gamma_j = \frac{\sigma_\epsilon^2 \sin(\pi d) \Gamma(1-2d) \Gamma(j+d)}{\pi \Gamma(j+1-d)} \quad (24)$$

위에서 Γ 는 감마함수이다. $j = 0$ 으로 놓으면 이 과정의 분산을 얻게 되며 분산은 다음과 같다.

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\epsilon^2 \Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)} \quad (25)$$

식 (25)를 사용하여 다음의 자기공분산 수열을 얻을 수 있다.

$$\gamma_j = \gamma_{j+1} \frac{j+d-1}{j-d} \quad (26)$$

2. 주기과정 장기기억모수의 추정방법

주가시계열이 평균이 0인 정상적 FD 과정의 실현의 일부분 $X = [X_0, \dots, X_{N-1}]^T$ 를 확보하고 있다고 하자. 이 주가과정의 모수는 미지로 $d \in [-1/2, 1/2]$ 이며 FD 과정의 ε_t 의 분산은 σ_ε^2 으로 $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ 이라 하자. 어떤 정수 J 에 대하여 표본의 크기 N 은 $N = 2^J$ 라 하자. 관찰치 X 가 주어졌을 때, d 와 σ_ε^2 에 대한 가능도함수는 다음과 같다.

$$L(d, \sigma_\varepsilon^2 | X) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp(-X^T \Sigma^{-1} X / 2) \quad (27)$$

위에서 Σ 는 X 의 공분산행렬이고 $|\Sigma|$ 는 공분산행렬 Σ 의 행렬식이다. 가능도함수 $L(d, \sigma_\varepsilon^2 | X)$ 는 계산이 용이하지 않다는 것은 널리 알려져 있는 사실이다. 뿐만아니라 d 가 $1/2$ 에 근접할 때 가능도함수를 계산하는 데에는 계산의 불안정의 잠재성이 존재할 수 있다. 그렇게되면 모수와 검정통계량의 정확한 계산이 불가능하다. 이것은 공분산의 계산에 계산의 불안정 잠재성이 존재한다는 것을 의미한다.

DWT을 w 라 하자. 즉 w 가 DWT 행렬이다. 그러면 DWT 이론에 의하여 $W = wX$ 의 관계가 형성된다.⁴⁾ $j = 1, \dots, J$ 에 대하여 $C_j \approx \text{var}(W_{j,t})$ 라 하자.

4) w 가 정급직교성을 만족하면 $w^T w = X^T w X = X^T X$ 이다. $X^T X$ 는 자기공분산이다. 따라서 주가시계열의 DWT에 의하여 이 시계열이 본래 가지고 있는 정보를 조금도 잃지않고 변환된 자료를 통하여 공분산을 구할 수 있다. 원래의 자료에 의한 공분산과 DWT에 의한 주가시계열의 공분산은 동일하다. 원자료변환은 원자료에 모형을 적용하기가 어려운 경우 원자료 정보의 손실을 야기시키지 않고 이원자료를 모형에 적합하도록 변화시키는 것이므로 일반적으로 쉽게 이루어진다. DWT를 통하여 공분산을 정확하게 구할 수 있으므로 장기기억과정의 모수인 분수차분모수를 측정하는데 DWT를 즉각 이용 할 수 있다.

Λ 를 대각선 원소가 C_j 인 대각선 행렬이라 하자. 그러면 $\widetilde{\Sigma} = w^T \Lambda w$ 이다. 이 때 최대가능도함수는 다음과 같다.

$$L(d, \sigma_\xi^2 | X) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp(-X^T \widetilde{\Sigma} X/2) \quad (28)$$

위에서 $N=2^J$ 이므로 식 (28)은 평가하기가 쉽다.

웨이브렛 분산을 $\nu_x^2(\tau_j)$ 라 하자. 이 때 τ_j 는 수준 j 에서의 축척이며, $N=2^J$ 가 성립하는 모든 $j=1, \dots, J$ 에 대하여 $\tau_j=2^{j-1}$ 이다. 장기기억과정 $\{X_t\}$ 에서 웨이브렛 분산 $\nu_x^2(\tau_j)$ 과 축척 τ_j 간의 대수·대수그래프는 τ_j 가 커짐에 따라 대략적으로 선형이다. 따라서 $\log(\nu_x^2(\tau_j)) \approx \xi + \beta \log(\tau_j)$ 의 관계를 얻게 되며 이 때 ξ 와 β 는 계수이다. 기울기 β 는 낮은 빈도에서 승멩분포스펙트럼 밀도함수의 지수(exponent)인 α 와 β 와의 관계를 가지게 되는데 이 관계는 $\beta = -\alpha - 1$ 이다. FD 과정에서 $\alpha = -2d$ 이다. 따라서 $\beta = 2d - 1$ 이다. 이 관계에 의하여 대수 웨이브렛 분산추정치들과 광범위한 축척위에서 구한 $\log(\tau_j)$ 를 회귀시켜 β 를 추정하고 이 β 를 통하여 d 의 추정량을 정식화하면 장기기억모수의 추정과 검증을 수행할 수 있다.

3. 웨이브렛 분산

MODWT 웨이브렛 필터 $\{\bar{h}_{j,t}\}$ 을 사용하여 시계열 $\{X_t\}$ 를 필터하여 얻게 되는 확률과정은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\bar{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \bar{h}_{j,t-l} X_{t-l}, t = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (29)$$

축척 $\tau_j = 2^{j-1}$ 이라 정의하자. 그러면 축척 τ_j 에 대한 시간중속 웨이브렛 분산은 $\bar{W}_{j,t}$ 의 분산으로 정의되며 그 형태는 다음과 같다.

$$\nu_{x,t}^2(\tau_j) = \text{var} \{ \bar{W}_{j,t} \} \quad (30)$$

$\bar{\nu}_{x,t}^2(\tau_j)$ 가 존재하고 유한이며 t 와 독립적일 때 축척 τ_j 에 있어서 $\{X_t\}$ 의 통계적 성질들은 시간이 흘러가도 변하지 않으며 따라서 시간중속 웨이브렛 분산으로 요약 할 수 있다. 즉 다음과 같다.

$$\nu_x^2(\tau_j) = \text{var}\{\bar{W}_{j,t}\}$$

L 이 $E\{\bar{W}_{j,t}\} = 0$ 이 성립하도록 충분히 크다고 가정하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\nu_x^2(\tau_j) = \text{var}\{\bar{W}_{j,t}\} = E\{[\bar{W}_{j,t} - E\{\bar{W}_{j,t}\}]^2\} = E\{\bar{W}_{j,t}^2\}$$

$N - L_j \geq 0$ 이면 MODWT에 의하여 $\nu_x^2(\tau_j)$ 의 추정량을 다음과 같이 얻는다.

$$\hat{\nu}_x^2(\tau_j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \bar{W}_{j,t}^2$$

위에서 $M_j = N - L_j - 1$ 이다. $E\{\hat{\nu}_x^2(\tau_j)\} = \nu_x^2(\tau_j)$ 이므로 $\hat{\nu}_x^2(\tau_j)$ 는 웨이브렛 분산의 불편MODWT 추정량이다. 이때 $\bar{W}_{j,t}$ 는 MODWT 로 다음과 같다.

$$\bar{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \bar{h}_{j,l} X_{t-l \bmod N}, t=0, \dots, N_j-1$$

분산 $\hat{\nu}_x^2(\tau_j)$ 는 정규화하면 자유도가 M_j 인 χ^2 분포를 따른다. 따라서 웨이브렛 분산은 χ^2 확률변수와 다음의 관계를 가진다.

$$\frac{\eta \hat{\nu}_x^2(\tau_j)}{\nu_x^2(\tau_j)} \approx \chi_\eta^2$$

위에서 η 은 등가 자유도이며 η 는 다음에 의하여 결정된다.

$$\eta = \max\{M_j/2^j, 1\}$$

4. 장기기억모수의 추정량

앞에서 제시한 바와 같이 웨이브렛 분산은 다음의 관계를 가진다.

$$\frac{\eta_j \hat{\nu}_x^2(\tau_j)}{\nu_x^2(\tau_j)} \approx \chi^2_{\eta_j}$$

위의 방정식으로부터 다음을 얻는다.

$$\log(\hat{\nu}_x^2(\tau_j)) = \log(x^2_{\eta_j}) + \log(\nu_x^2(\tau_j)) - \log(\eta_j)$$

위에서 등가 자유도 η_j 는 축척 τ_j 에 의존한다. Bartlett와 Kendall(1946)에 의하면 $E\{\log(x^2_{\eta_j})\} = \xi(\eta_j/2) + \log(2)$ 이고 $var\{\log(x^2_{\eta_j})\} = \xi'(\eta_j/2)$ 이다. 여기에서 $\xi(\cdot)$ 와 $\xi'(\cdot)$ 은 각각 digamma와 trigamma 함수이다. 위에서 $\log(\nu_x^2(\tau_j)) \approx \xi + \beta \log(\tau_j)$ 임을 알 수 있다. 여기에서 $j = 1, \dots, J$ 에 대하여 $\tau_j = 2^j - 1$ 이다. $\tau_1 = 1$ 이고 $\tau_J = N/2$ 이다. 위 방정식으로부터 다음을 얻는다.

$$E\{\log(\hat{\nu}_x^2(\tau_j))\} = \psi(\eta_j/2) + \xi + \beta \log(\tau_j) - \log(\eta_j/2) \quad (31)$$

다음과 같이 정의하자.

$$Y(\tau_j) = \log(\hat{\nu}_x^2(\tau_j)) - \psi\left(\frac{\nu_j}{2}\right) + \log\left(\frac{\nu_j}{2}\right) \quad (32)$$

그러면 다음의 선형회귀모형을 얻는다.

$$Y(\tau_j) = \xi + \log(\tau_j) + e_j$$

위에서 오차항은 다음과 같다.

$$e_j = \log\left(\frac{\hat{\nu}_x^2(\tau_j)}{\nu_x^2(\tau_j)}\right) - \psi\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + \log\left(\frac{\eta_j}{2}\right) \quad (33)$$

위 식은 분포에 있어서 확률변수 $\log(x_{\eta_j}^2) - \psi(\eta_j/2) + \log(2)$ 와 동일하다. e_j 는 평균이 0이고 분산이 $\psi'(\eta_j/2)$ 이고 η_j 가 대략 10이나 그 이상이면 근사적으로 정규분포한다. 따라서 vector 형으로 표현하면 다음과 같다.

$$Y = Ab + e$$

위에서 $Y = [Y(\tau_{j_1}), \dots, Y(\tau_{j_0})]^T$ 이다. 그리고 A 는 $(J_0 - J_1 + 1) \times 2$ 이며 이 행렬의 첫째열은 모두 1이고 둘째 열은 $\log(\tau_{j_1}), \dots, \log(\tau_{j_0})$ 이다. $b = [\xi, \beta]^T$ 이다. $e = [e_{j_1}, \dots, e_{j_0}]$ 는 평균이 0이고 공분산 행렬이 Σ_e 이고 Σ_e 의 대각선 원소는 $\psi'(\eta_{j_1}/2), \dots, \psi'(\eta_{j_0}/2)$ 이다. 따라서 b 의 가중 최소자승 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{b} = (A^T \Sigma_e^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma_e^{-1} Y$$

그러므로 \hat{b} 의 두 번째 원소는 β 의 바람직한 최소자승 추정치이다. 즉 \hat{b} 의 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum w_j \sum w_j \log(\tau_j) Y(\tau_j) - \sum w_j \log(\tau_j) \sum w_j Y(\tau_j)}{\sum w_j \sum w_j \log^2(\tau_j) - [\sum w_j \log(\tau_j)]^2} \quad (34)$$

위에서 $w_j = 1/\psi'(\eta_j/2)$ 이고 $j = J_1, \dots, J_0$ 에 대하여 합산해야 한다. \hat{b} 의 추정량은 평균이 b 이고 공분산은 $\Sigma = (A^T \Sigma_e^{-1} A)^{-1}$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sum w_j}{\sum w_j \sum w_j \log^2(\tau_j) - [\sum w_j \log(\tau_j)]^2} \quad (35)$$

분수적분차분모수, 즉 장기기억모수 d 는 β 와 관계를 가지는데, 이 관계는 $\hat{d} = (\hat{\beta} + 1)/2$ 의 관계를 가진다. 이 \hat{d} 가 FD 모수의 추정량이다. 그리고 \hat{d} 와 $\hat{\beta}$ 의 분산의 관계는 $\text{var}(\hat{d}) = \text{var}(\hat{\beta})/4$ 임을 알 수 있다.

〈표 1〉 장기기억모수

filter	D(4)		D(6)		D(8)		D(10)	
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Kospi	0.34116 (0.01315)	-0.31767 (0.02629)	0.35473 (0.01255)	-0.29055 (0.02510)	0.36474 (0.01201)	-0.27053 (0.02402)	0.35619 (0.01311)	-0.28762 (0.02622)
Dow	0.30304 (0.01626)	-0.39391 (0.03253)	0.3184 (0.01605)	-0.37231 (0.03210)	0.31800 (0.01613)	-0.36400 (0.03226)	0.31982 (0.01639)	-0.36037 (0.03277)
Nasdaq	0.35131 (0.01232)	-0.29738 (0.02464)	0.36064 (0.01206)	0.27873 (0.02413)	0.36780 (0.01167)	-0.26260 (0.02334)	0.36704 (0.01212)	-0.26591 (0.02424)
S&P 500	0.30594 (0.01603)	-0.38811 (0.03205)	0.31659 (0.01581)	-0.36682 (0.03163)	0.32245 (0.01574)	-0.35511 (0.03148)	0.32406 (0.01600)	-0.35188 (0.03200)
FTSE	0.31768 (0.01507)	-0.36463 (0.03015)	0.33223 (0.01447)	-0.33555 (0.02895)	0.33286 (0.01481)	-0.33427 (0.02963)	0.33999 (0.01457)	-0.32001 (0.02915)
DAX	0.30285 (0.01628)	-0.39429 (0.03255)	0.31257 (0.01614)	-0.37486 (0.03228)	0.31552 (0.01633)	-0.36897 (0.03266)	0.32023 (0.01634)	-0.35953 (0.03268)
MIB30	0.33101 (0.01398)	-0.33797 (0.02795)	0.33935 (0.01386)	-0.32130 (0.02773)	0.34569 (0.01369)	-0.30862 (0.02738)	0.34287 (0.01430)	-0.31425 (0.02861)

filter	LA(8)		LA(10)		C(6)	
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Kospi	0.36382 (0.01209)	-0.27235 (0.02419)	0.36916 (0.01194)	-0.26167 (0.02388)	0.35441 (0.01258)	-0.29118 (0.02516)
Dow	0.32615 (0.01541)	-0.34771 (0.03083)	0.32364 (0.01579)	-0.34714 (0.03159)	0.31904 (0.01560)	-0.36192 (0.03121)
Nasdaq	0.37266 (0.01132)	-0.25468 (0.02265)	0.37620 (0.01130)	-0.24759 (0.02260)	0.36850 (0.01139)	-0.26300 (0.02277)
S&P 500	0.32798 (0.01525)	-0.34404 (0.03050)	0.33169 (0.01532)	-0.33661 (0.03064)	0.32088 (0.01545)	-0.35824 (0.03089)
FTSE	0.34182 (0.01404)	-0.31637 (0.02808)	0.34731 (0.01391)	-0.30538 (0.02782)	0.33482 (0.01426)	-0.33036 (0.02852)
DAX	0.32310 (0.01567)	-0.35380 (0.03133)	0.32790 (0.01565)	-0.34420 (0.03130)	0.31570 (0.01588)	-0.36860 (0.03175)
MIB30	0.35276 (0.01307)	-0.29449 (0.02614)	0.34983 (0.01367)	-0.30034 (0.02735)	0.34355 (0.01351)	-0.31291 (0.02701)

5. 실증분석

장기기억모수의 추정과 검정에 사용된 데이터를 보다 구체적으로 살펴보면 한국의 KOSPI, 미국의 Dow Jones, NASDAQ과 S&P 500, 영국의 FTSE, 독일의 DAX와 이탈리아의 MIB30이다. 기간은 1980~2001년이며 일별 자료를 사

용한다.

여러가지의 웨이브렛과 축척필터를 사용하여 추정한 장기기억모수와 검정통계량을 제시하면 <표 1>과 같다. 모수의 추정과 검정에 사용된 것은 D(4), D(6), D(8), D(10), LA(8), LA(10)과 C(6) 웨이브렛이다. 웨이브렛 최소화승법에 의한 모수의 추정값과 표준오차의 추정값을 표에서 제시하였다. $d = (1/2)(\beta + 1)$ 과 $var(d) = (1/4)var(\beta)$ 의 관계를 사용하여 장기기억모수 d 와 β 의 추정치와 검정통계량을 계산하였다. β 은 회귀방정식의 계수이다.

각 국의 일별 주가지수의 수익률의 장기기억모수의 추정치는 대략적으로 0.30 으로부터 0.35 이다. 여기에서 다루고 있는 주가지수들은 모수의 추정치들이 서로 유사하다. 분수차분모수는 0 과는 상당한 차이를 보이고 있으며 양수이다. 따라서 주가가 FD 과정을 따르고 있으며 장기기억모수는 양수인 것이다. 경제에 부과된 충격은 결국에는 소멸하는 것은 사실이나, 무척 완만한 쌍곡선율로 충격이 감소하여 소멸한다. 주가시계열이 장기적으로 평균에 회귀하며 단기적으로 평균에 회귀하는 I(1)과정과는 다른 행보를 보여주고 있다.

IV. 결 론

이 논문에서는 웨이브렛 변환을 소개하고 그 성질과 특성을 규명하였다. 그리고 이 변환이 재무시계열을 모형화하는데 유용함을 보였다. 이 변환의 적용 방법과 유용성을 보이기 위하여 웨이브렛 변환에 의하여 주가시계열의 장기기억과정을 검정하였다. 한국, 미국, 영국, 독일과 이탈리아의 일별 주가지수의 수익률 시계열이 장기기억과정이 검정되었다. 여러 형태의 Daubechies, 최소비대칭, 그리고 coiflet 웨이브렛을 사용하여 검정하였는데 검정결과가 동일하다.

참 고 문 헌

- 이일균, “증권시장에서 형성되는 실수적분과정 : 분수적분과정 무작위행보과정과 평균회귀과정”, 재무관리연구, 제19권 제2호, (2002. 12), 159-185.
- 이일균, “분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정”, 재무관리연구, 제18권 제1호, (2001. 6), 1-21.
- 이일균, “주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산”, 증권학회지, 제25집, 1999a, 31-70.
- 이일균, “쪽거리, 분수브라운 운동과정, 장기기억 및 분수적분 일반자기회귀 이분산 : 주가 형성과정에 대한 탐구”, 증권학회지, 제24집, 1999b, 1-51.
- 이일균, “쪽거리와 장기기억”, 재무관리연구, 제12권 제1호, 1995, 1-17.
- Abry, P., P. Goncalves and P. Flandrin, “Wavelet-Based Spectral Analysis of 1/F Processes,” *In Proceedings of the Ieee International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Minneapolis, 3, 1993, 237-40.
- Baillie, R. T. T. Bollerslev and H. -O. Mikkelsen, “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, 1996, 3-30.
- Beran, J. and N. Terrin, “Testing for a Change of the Long-Memory Parameter,” *Biometrika*, 83, 1996, 627-38.
- Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen, “Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 151-184.
- Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, Philadelphia : Siam, 1992.
- Flandrin, P., “Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion,” *Ieee Ransactions on Information Theory*, 38, 1992, 910-17.
- Gencay, R., F. Selcuk and B. Whitcher, *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, San Diego, Cal., Academic Press, 2001.
- Geweke, J and S. Porter-Hudak, “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models,” *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, 221-238.
- Granger, C. W. J. and R. Joyeux “An Introduction to Long-Memory Time

- Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1980, 15-29.
- Granger, C. W. J., "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models," *Journal of Econometrics*, 14, 1980, 227-238.
- Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing," *Biometrika*, 68, 1981, 165-76.
- Jameson, L. M., "Introduction to Wavelets and their Application to Partial Differential Equations, In G. Erlebacher, M. Y. Hussani and L. M. Jameson," *Wavelets, Oxford University Press*, 1996.
- Jensen, M. J., "Using Wavelets to Obtain a Consistent Ordinary Least Squares Estimator of The Long-Memory Parameter," *Journal of Forecasting*, 18, 1999a, 17-32.
- Jensen, M. J., "An Alternative Maximum Likelihood Estimator of Long-Memory Processes Using Compactly Supported Wavelets," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 2000, 361-87.
- Kato, T. and E. Masry, "On the Spectral Density of the Wavelet Transform of Fractional Brownian Motion," *Journal of Time Series Analysis*, 20, 1999, 559-563.
- Liu, M., "Modeling Long Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 99, 2000, 139-171.
- Mandelbrot, B. B. and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian Motions, Fractional Brownian Noises and Applications," *Siam Review*, 10, 1968, 422-437.
- Martin, V. L. and N. P. Wilkins, "Modeling Long Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 99, 2000, 139-171.
- McCoy, E. J. and A. T. Walden, "Wavelet Analysis and Synthesis of Stationary Long-Memory Process," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5, 1996, 26-56.
- McLeod, A. I. and K. W. Hipel, Preservation of The Rescaled Adjusted Range, I : A Reassessment of The Hurst Phenomenon, *Water Resources Research*, 14, 1978, 491-508.
- Nelson, C. R. and C. I. Plosser, "Trends and Fandom Walks In Macroeconomic. Time Series : Some Evidence and Implications," *Journal*

- of Monetary Economecs*, 10, 1982, 139-162.
- Newland, E. E., *An Introduction to Random Variations, Spectral and Wavelet Analysis*, Third Ed., Addison Wesley, 1993.
- O'Neil, P. V., *Advanced Engineering Mathematics*, 5th ed., Thomson, 2003.
- Percival, D. B. and A. T. Walden, *Wavelet Methods For Time Series Analysis*, Oxford : Oxford University Press, 2000.
- Robinson, P. M., "Log-Periodogram Regression of Time Series With Long Range Dependence." *Annals of Statistics*, 23, 1048-72, 1995.
- Serroukh. A. A. S. Walden and D. B. Percival, "Statistical Properties and Uses of the Wavelet Variance Estimator for the Scale Analysis of Time Series," *Journal of the American Statistical Association*, 95, 2001, 184-196.
- Sowell, F. B., "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models," *Journal of Econometrics*, 53, 1992, 165-188.
- Stengos, T. and Y. Sun, "A Consistent Model Specification Test For A Regression Function Based On Nonparametric Wavelet Estimation," *Econometric Reviews*, 20, 2001, 41-60.
- Vidakovic, B., *Statistical Modeling By Wavelets*, Wiley, 1999.