

MBS의 발행구조, 가치평가 및 투자자 특성에 관한 연구

유 진*

〈요 약〉

모기지유동화증권(Mortgage-Backed Securities : MBS)의 도입과 변화를 주도한 근본적인 원인은 투자자 혹은 차입자의 효용 제고 및 욕구 충족에 있다. 본 연구는 이러한 사실에 주목하여 MBS의 발행 구조에 따라 그 가치가 변동할 수 있음을 이론 모형으로 정립, 증명, 분석 및 해석한다. 구체적으로 자동이체증권과 PAC-Support CMO라는 차별적 발행구조의 두 MBS의 가치를 투자자의 효용의 관점에서 파악하고 발행구조에 따라 후자가 전자보다 더 큰 가치를 창출할 수 있음을 이론적으로 보인다. 한편 모기지 및 MBS의 가치평가에 재금융(refinancing)으로 인한 조기상환 위험의 평가가 매우 중요하며, 재금융은 이자율의 등락 및 과거 이자율의 경로에 의하여 크게 영향 받기 때문에 이를 3기간 모형으로 반영하여 MBS의 가치평가를 시도하였다. 특히 소진현상(burnout)을 모형에 명확히 반영하여 이 현상이 MBS의 현금흐름, 위험 및 가치에 미치는 영향을 고찰하였다. 본 연구 결과 동일한 현금흐름 및 위험을 제시하는 MBS보다 차별적으로 설계된 MBS가 선호될 수 있으며 후자의 가치를 극대화하는 최적의 발행 구조가 존재함이 인정된다.

주제어 : 모기지유동화증권(MBS), 모기지론, 재금융, 소진현상, 자동이체증권, CMO, PAC

I. 서 론

모기지는 은행이 고객에게 제공한 부동산(주택)담보대출을 의미하고, 모기지유동화증권(Mortgage-Backed Securities : MBS)이란 모기지풀(pool)을 기초자산으로 하여 새로운 구조로 2차적으로 발행된 증권을 의미한다.¹⁾ 3개월 양도성예금증서(CD) 금리를

논문접수일 : 2005년 5월 16일 논문게재확정일 : 2005년 5월 31일

* 충남대학교 경상대학 경영학부 교수

** 유익한 심사를 해주신 두 분의 익명 심사자께 감사드립니다. 이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다(KRF-2004-003-B00100).

기준으로 하는 3개월 변동금리를 적용하고 약 3년이 만기인 우리나라의 기존 일반주택 담보대출과는 달리 모기지는 일반적으로 고정 금리로 10~20년의 장기간 주택구입자금(의 대부분)을 대출 받을 수 있는 금융상품이다. 그러므로 모기지차입자 입장에서는 주택 구입을 위하여 막대한 현금을 보유해 놓아야 할 필요가 없고 또 장기간 상대적으로 낮은금리로(담보가 제공되므로) 자금을 조달할 수 있어서 그 수요가 높을 것으로 예상된다. 나아가 소득수준에 비해 주택 가격이 상대적으로 높은 우리나라의 경우 모기지와 MBS 시장의 성공적 정착은 경제적뿐 아니라 정치사회적으로도 매우 중요하다고 할 수 있다. 또한 장기채권에의 투자 수요가 높은 생명보험회사 등의 금융기관에도 MBS 시장의 육성은 절실하다. 우리나라 정부의 경제담당 부서에서도 MBS 시장 활성화의 필요성을 인정하고 모기지와 MBS 제도의 성공적인 도입에 힘써 온 결과 2004년 3월1일 한국주택금융공사가 출범되어 모기지를 판매했던 시점이며, 2004년 6월에는 최초로 5,520억원의 MBS를 발행하여 모기지의 현금화를 시작하였다.

한편 장기간의 주택금융인 모기지는 유동성에 있어서 현격한 제약을 받고 있다. 즉 모기지 대출기관이 이 모기지를 유통시장에서 매각하려고 할 때 이를 매입할 투자자가 충분치 않다는 것이다. 개별 모기지의 다양한 발행조건, 채무불이행 위험, 조기상환 위험(prepayment risk) 등으로 인해 투자자들이 모기지 매입에 소극적인 경우가 많기 때문이다. 이처럼 모기지의 유동성(재매각의 원활성)이 제약을 받게 되면 대출기관의 모기지 대출은 위축된다. 그러므로 모기지 대출이 원활히 성장발전하기 위해서는 모기지 유통시장을 육성발전시켜야 하는데, 이를 위해서는 여러 모기지를 합친 모기지풀을 기초자산으로 하여 개별 모기지의 조기상환 위험 등을 분산시키고 투자자 욕구를 충족하도록 발행구조를 적절히 변경하여 시장에 공급하여야 한다. 이렇게 변형된 2차 증권이 MBS로서, 모기지 유동성의 제고는 곧 MBS 시장의 육성 및 활성화를 의미하는데 여기에 MBS 연구의 중요성이 있다고 할 수 있다.

본 연구의 목적은 우리나라에서의 MBS 시장의 육성이라는 중대한 경제사회적 변화에 즈음하여, 이 증권의 발행구조가 증권의 가치에 미치는 영향과 효과를 이론적으로 분석하고 그 결과의 현실적 함의를 제시하는 것이다. MBS 가치에 영향을 미치는 요소는 조기상환 위험과 채무불이행 위험 등 MBS에 내재한 위험들인데 이러한 위험은 MBS 발행구조에 따라 적절히 관리될 수 있으며, MBS 발행의 가장 큰 의미가 바로 이 점에 있다. 즉 MBS는 기초자산의 현금흐름에 대해 동일한 권리를 가지는 자동이체

1) 엄밀히는 모기지는 주택만을 의미하지는 않고 주택 및 상업용 부동산 담보대출을 모두 포함한다. 전자는 residential mortgage, 후자는 commercial mortgage라고 한다.

증권 혹은 차별적 권리를 가지는 복수의 계층(tranche, 트랜치)으로 발행될 수 있는데, 이 때 발행구조에 따라 전체 MBS의 가치는 달라질 수 있다. 그런데 모기지는 정부 혹은 정부투자기관이 채무불이행 위험을 대부분 제거하기 때문에 모기지 혹은 MBS 투자자 입장에서 제일 중요한 위험은 조기상환 위험이다. 그러므로 본 연구에서는 MBS의 발행구조에 따른 조기상환 위험의 분산과 관리, 그리고 그 결과로서의 MBS의 차별적 가치평가를 중심으로 분석한다.

한편 지금까지 모기지에 대한 연구는 II장 선행연구에서 알 수 있듯이 미국 시장의 자료를 중심으로 한 실증연구 일변도였다. 미국의 모기지 시장은 현존하는 가장 크고 가장 잘 정비되고 가장 효율적인 시장이기 때문이다. 그런데 모기지 시장의 도입과 발전적 변화를 주도한 근본적인 원인은 투자자 혹은 차입자의 효용 제고 혹은 이들의 욕구 충족에 있다. 그러므로 새로운 구조의 MBS가 지속적으로 도입되는 것도 이러한 이유에서 찾아볼 수 있는데, 본 연구는 이를 이론 모형으로 정립하고 MBS의 발행 구조에 따라 그 가치가 변동할 수 있음을 이론적으로 증명하고 그 결과를 분석하였다는 점에서 그 의의가 있다.

II. 선행연구

MBS와 관련하여 지금까지 발표된 논문들은 중 MBS 발행구조와 가치평가를 직접적인 혹은 주된 연구 대상으로 하여 이루어진 연구는 거의 없다. 이 중 본 연구와 관련하여 일정한 함의를 제시하는 연구를 요약하면 다음과 같다. 먼저 일반적인 구조설계(Security Design)에 관한 연구를 들 수 있다. Riddiough(1997)는 “기업이 보유자산을 현금화할 경우 자산전체를 매각하는 것보다 위험증권과 무위험증권으로 나누어 발행하는 것이 바람직하다”고 주장하였다. 왜냐하면 ABS 발행자가 위험증권을 보유하면 외부의 ABS 투자자의 “역선택” 위험이 감소되어, 자산 전체 매각의 경우보다 더 큰 현금(proceeds)이 유입되기 때문이다. 선행연구인 Boot and Thakor(1993)도, 위험증권과 무위험증권으로 나누어 발행하면, 이 기업에 대한 정보가 없는 투자자는 무위험증권에만 투자하고 정보를 가진 투자자는 적정 가격을 지불하며 위험증권에 투자하기 때문에, 기업으로서는 유입 자금을 극대화할 수 있다고 하였다. 이 두 연구의 논리를 MBS에 적용하면, 동일한 권리·위험의 지분을 의미하는 자동이체증권으로 MBS가 발행되는 경우보다 차별적 권리·위험의 차등이체증권으로 발행되는 경우에 전체 MBS 가치가 더 커질 수 있다고 추론된다. Garmaise(2001)는 증권의 구조설계를 투자자와 전체 시장의 관

점에서 파악하였는데, 투자자의 기대 유형 및 투자자의 수요에 따라 증권의 최적 구조 설계가 다르다고 주장하였다. MBS 발행과 관련하여 이 연구는, 투자자들의 유형 및 수요에 따라 최적으로 발행될 MBS의 구조가 달라질 수 있고, 그러므로 투자자 행태 및 시장에 대한 진지한 연구가 MBS의 발행가격을 높일 수 있음을 암시하고 있다.

조기상환에 관한 연구 중 대표적 연구는 다음과 같다. Maxam과 LaCour-Little (2001)는 비선형 함수인 조기상환 위험을 추정하는 회귀분석 방법론을 제시하였는데, 1991년 5월부터 1995년 6월까지 발행된 3억달러 이상 규모의 30년만기-고정금리 Freddie Mac 월별 모기지풀(pool)을 데이터로 사용하여 single monthly mortality rate (SMM)을 추정한 결과 자신들의 kernel-density estimation 기법이 (선행연구인) Boudoukh et al.(1997)의 기법보다 조기상환 확률(SMM)을 더 훌륭히 예측할 수 있었다고 주장하였다.²⁾ 선행연구인 Boudoukh et al.(1997)은 다변량밀도추정기법(multivariate density estimation)을 사용하여, 1987년부터 1994년에 발행되고 7.5%에서 10.5%의 계약이자율이 적용된 주별 TBA(to-be-announced) GNMA 자료로 MBS 가격과 이 가격의 결정요인들과의 관계를 분석하였다.³⁾ 이들이 다변량밀도추정기법을 활용하여 MBS 가격함수를 추정한 결과 MBS 가격은 이자율 수준의 함수일 뿐 아니라 이자율 기간구조의 함수로 판명되었다고 주장하였다. 조기상환과 관련하여 또 다른 연구 주제로 “소진현상(消盡, burnout)”을 들 수 있다. “burnout”이란 모기지 대출이 시작된 후 일정 기간이 지나면 조기상환이 뜸해지는 현상을 의미한다. Kariya와 Kobayashi(2000)는 조기상환의 유인으로 재금융(refinancing), 주택 매각, 차입자 채무불이행의 세 가지가 존재한다고 전제하고, 상이한 차입자는 상이한 조기상환 유인을 가질 수 있으며 이는 곧 각 유인이 발생하여 조기상환이 이루어지는 데 걸리는 시간이 차입자별로 다를 수 있음을 의미한다고 하였다. Ronn et al.(1995)은 CRSP U.S. Government Bond Tapes에서 미국 국채 가격 자료를, 281개의 생명보험사들로부터 1976년초~1983년말의 10,000개의 GNMA 매입가격 자료를 입수하여 “조기상환옵션의 가치 = 미국 국채 가격-GNMA 가격”으로 산출한 후, 이 값을 {대출경과기간, 모기지대출이자율, 현재MBS시장이자율, burnout proxy, MBS시장이자율의 변동성} 등의 변수로 회귀분석한 결과 이 변수들이 조기상환옵션 가치의 90% 이상을 설명하고 있음을 발견하였다. 또 조기상환옵션의 “시간가치” 중 일부는 (-) 값을 가졌는데, 이들은 그 이유로 첫째 모기지차입자들이(조기

2) SMM이란 MBS의 “원금잔액 대비 月別 조기상환비율”을 뜻한다.

3) 여기서 TBA란 약정시점에서 인수할 모기지대출을 지정하지 않고 만기-액면금액-가격-결제일 등만 결정한 후 결제일에 특정 모기지대출을 지정하는 거래방법이다.

상환) 옵션이 외가격일 때 옵션을 행사하는 경우가 있으며 둘째로 거래비용이 존재하기 때문이라고 주장하였다.⁴⁾

MBS 투자 위험의 현실적 헤지 방안에 관한 연구도 많이 이루어졌다. 먼저 Koutmos와 Pericli(2000)는 회귀분석을 이용하여 다양한 만기의 미국 국채선물(Treasury note futures) 중 어느 만기의 선물이 가장 효율적인 헤지 수단인지 살펴보았다. 1993년 1월 4일부터 1996년 12월 16일까지 Freddie Mac이 발행한 30년 만기-고정금리 GOLD債 992개의 수익률을 2년-, 5년-, 10년-만기의 미국 국채선물 수익률로 각각 회귀분석한 결과, 포트폴리오 분산이 최소가 되는 가장 효과적 헤지수단은 10년 만기 미국 국채선물로 나타났다.⁵⁾ 다음 이들은 위의 세 선물의 조합(組合)을 포함한 다중회귀분석을 실행하여 가장 효과적 헤지 방법이 위 선물 세 종류를 모두 포함하는 조합이었음을 발견하였다. (단 표본의 검사에서는 10년 만기 국채선물을 단독으로 사용하는 경우가 세 선물의 조합보다 헤지 효과가 높은 것으로 나타났다.) 한편 이들은 Koutmos와 ericli(1999)에서, 효율적 헤지를 위해서는 (미국 국채)선물과 현물(MBS)의 헤지 비율을 시간가변적으로 구하는 동태적 헤지 모형이 그렇지 않은 정태적 헤지 모형보다 우월함을 주장하였다. 이들은 그 근거로, (i) 선물과 현물 가격이 동시에 결정되므로 회귀분석의 베타 추정치가 높게 나오는 편익이 존재하며 (ii) 두 가격의 시계열이 단위근을 가지며 또 두 가격의 선형조합이 안정적일 경우에는 회귀분석에 오차수정항을 포함해야 하는데 정태적 헤지 모형에서는 이를 포함하지 않으므로 베타 추정치가 낮게 산출되는 편익이 존재하고 (iii) 현물과 선물 가격의 분산-공분산 행렬이 시간과 관계없이 고정되어 있다는 (정태적 헤지의) 가정은 여러 실증 분석 결과에 반하기 때문이라고 하였다. 이들은 1992년 7월 22일부터 1995년 8월 7일까지 거래된 30년 만기 고정금리 GNMA MBS 일별 가격과 10년 만기 미국 국채선물 가격을 자료로 동태적 오차수정 GARCH 모형을 추정하고 동태적 헤지 비율을 구했는데, 동태적 헤지를 위한 거래 비용을 포함해도 동태적 헤지가 정태적 헤지보다 포트폴리오 분산 효과 등이 뛰어난 모습을 보였다. Goodman과 Ho(1997)는 옵션조정 듀레이션, 실증 듀레이션 및 내재 듀레이션의 헤지 성과를 비교한 결과 옵션조정 듀레이션의 오차가 가장 크며, 내재 듀레이션의 오차가 가장 작음을 발견하였다. 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 MBS의 옵션조정 스프레드를

4) 만일 인구통계학적 요인 등이 조기상환옵션 가치평가에 감안될 수 있다면 조기상환옵션의 진실한 시간 가치가 음의 값을 가지는 경우가 줄어들 것으로 생각한다.

5) GOLD債란 Freddie Mac이 발행한 MBS 중 원금과 계약이자의 상환 기일을 100% 보장하는, 강화된 보장의 MBS를 의미한다.

확정한 후 MBS 만기수익률 변화가 MBS 가치에 미치는 영향을 측정하는 옵션조정 듀레이션은 조기상환 모형에 따라 그 값이 매우 불안정하다. 반면 이론 모형 없이 실제 자료를 회귀분석하여 헤지 비율을 구하는 실증 듀레이션, 혹은 (MBS 선도계약과 10년 만기 미국국채 선도계약을 기초자산으로 하는) 옵션들의 가격으로부터 구한 내재 듀레이션은 시장의 모든 정보를 반영하고 있어서 보다 효과적인 헤지 비율을 제시할 수 있다고 하였다. Anderson et al.(1993)은, 조기상환 빈도가 시장 이자율 변화와 관계없이 일정하다고 가정한 일반적 듀레이션 수치는 MBS의 이자율 위험을 적절히 반영하지 못하므로 이를 수정한 듀레이션 척도를 고안하여야 한다고 주장하였다. 그는 (i) 불변 조기상환 빈도를 가정한 듀레이션, (ii)가변 조기상환 빈도를 가정한 듀레이션 및 (iii) 현금흐름수익률의 현재 MBS 시장 이자율 탄력성을 감안한 탄력적 듀레이션 수치를 비교하였는데, ii)와 iii)은 MBS의 중요 특성인 음의 불록성을 나타낸 반면 i)은 그렇지 못하므로 전자가 후자보다 MBS의 이자율 위험을 보다 정확히 측정한다고 주장하였다.⁶⁾

시장의 MBS 가격을 가장 잘 설명하는(fitting) 이자율 모형을 찾는 연구로 Chen과 Yang(1999)은 시뮬레이션 기법을 사용하여 GNMA MBS 가격을 산출한 결과, 단일요인 이자율 기간구조 모형보다 이요인(two-factor) 이자율 기간구조 모형이 보다 정확한 MBS 가격을 산출한다고 주장하였다. 그는 단일요인 모형은 필연적으로 모든 만기의 채권 수익률이 완전한 상관관계에 있음을 가정하기 때문에 채권가격 산출에 오차가 커진다고 지적하였다. 또한 이들은 Chen과 Yang(1995)에서 4개의 이자율 과정 가설이 이자율 기간구조와 GNMA MBS 가격을 얼마나 잘 설명하는지 비교분석 하였다. 1988년 1월부터 1993년 7월까지 Wall Street Journal에서 입수한 GNMA 호가를 자료로 사용하여 분석한 결과 (i) Ho-Lee 모형이 (미국 국채의) 이자율 기간구조를 가장 잘 설명하였고 (ii) 금융변수 이외의 변수도 조기상환에 영향을 미치는 관계로, 단순한 수익상환채권 모형으로는 GNMA 가격에 가까운 값을 산출할 수 없었다. 이와 관련하여 저자들은, 조기상환의 비금융적 특성을 적절히 반영하는 않는 한 현실적인 MBS 가치평가 모형이 정립되기 어렵다고 결론지었다. 이 논문은 수리적 기법 중심의 조기상환 위험 분석이 다른 중요한 관점을 놓치고 있음을 시사하고 있다.

Archer와 Ling(1995)은 로그노말, Cox-Ingersoll-Ross(CIR), 그리고 Black-Derman-Toy(BDT)의 세 이자율 모형들이 이자율 기간구조와 (시뮬레이션으로 얻은) MBS 가

6) MBS의 조기상환을 추정한 후 이에 근거하여 구한 만기수익률을 “현금흐름수익률”이라 한다.

격을 얼마나 잘 설명할 수 있는가 비교분석하였다. 그 결과 로그노말 모형은 기각되었고 나머지 두 모형은 조기상환 위험이 없는 미국 국채를 유사한 가격으로 평가하였다. 그런데 CIR이 조기상환 위험(옵션)의 가치를 보다 높게 평가하였기 때문에, 결과적으로 “MBS 가치 = 비교 대상인 미국 국채 가격 - 조기상환 옵션의 가치”의 등식을 이용하면 CIR이 BDT보다 MBS의 가치를 더 낮게 평가하게 된다고 주장하였다.

III. 조기상환, 재금융 및 소진현상

조기상환이란 만기가 되기 전에 모기지 차입자가 잔여 원금을 상환하는 것을 말한다. 조기상환은 모기지 시장의 이자율이 하락했을 때 자주 발생하는데, 왜냐하면 (상대적으로) 높은 이자율을 부담하는 기존의 모기지론(mortgage loan)을 청산하고 현재의 낮은 이자율로 새로운 모기지론을 얻을 수 있기 때문이며 이를 “refinancing(재금융)”이라 한다. refinancing은 조기상환이 발생하는 가장 큰 원인으로, 미국의 경우 Saloman Smith Barney, Lehman Brothers 등의 MBS primary dealers, 그리고 pension funds, mutual funds 등의 MBS 최종 투자자들은 refinancing의 합리적 예측 및 보다 정확한 MBS 가치평가를 위하여 경험있는 모기지 전문가들을 고용하는 등 많은 투자를 하고 있다.

그런데 refinancing은 미래 이자율의 수준 뿐 아니라 이자율의 과거 경로에 의해서도 영향을 받는데 그 이유는 다음과 같다. 일반적으로는 차입자가 부담하는 모기지론의 계약 이자율보다 현재 모기지 시장의 이자율이 낮아지면 refinancing이 활발히 이루어질 것이다. 하지만 모기지 시장 이자율의 과거 경로가 다르다면 동일한 현재 (하락한) 이자율에 대해서도 refinancing은 상이하게 나타날 수 있다. 예로서 최초로 모기지론을 얻은 후 모기지 시장의 이자율이 하락 → 상승 → 하락하여 현재의 낮은 이자율에 도달한 경우(A)와, 상승 → 상승 → 대폭 하락하여 현재의 낮은 이자율에 도달한 경우(B)에 있어 현재 시점에서 나타나는 refinancing은 상이하다. A의 경우에는 처음 이자율이 하락할 때 많은 차입자들이 조기상환을 했기 때문에 현재 시점에서 다시 이자율이 낮아져도 조기상환이 매우 활발히 진행되지는 않는다. 반면 B의 경우에는 지금까지 이자율이 높아 조기상환의 기회가 없었다가 현재 시점에서야 비로서 이자율이 하락하여 조기상환의 기회가 주어졌기 때문에, A의 경우보다 조기상환이 활발히 이루어질 것이다. 이처럼 과거 refinancing 기회가 있었던 경우 새로이 조기상환 기회가 도래하여도 조기상환이 활발히 이루어지지 않을 수 있는데 이러한 현상을 “refinancing burnout”이라

한다. Burnout(소진현상)으로 인해 refinancing의 예측은 현재 이자율뿐 아니라 과거 이자율의 경로까지 고려해야 하는데 본 연구에서는 “refinancing burnout”을 반영한 3기 모형으로 MBS의 가치평가를 시도한다.

한편 조기상환의 결과 대출채권의 현금흐름의 금액과 시점이 모두 불확실해지고 또 조기상환 발생시 상환된 현금은 현재 (낮은) 이자율로 재투자하여야 하므로 수익성이 악화되어 조기상환 위험은 모기지에 대한 투자 수요를 감소시킨다. MBS는 모기지풀을 대상으로 새로운 발행구조로 재설계하여 조기상환 위험 등을 감소시켜 유동성과 수요를 제고한 증권으로, 그 발행구조에 따라 조기상환 위험도 차별적으로 구조화될 수 있다. MBS 중 가장 대표적인 두 유형은 다수의 모기지로 이루어진 “모기지풀(pool)”에서 발생하는 현금흐름을 균등하게 배분하는 자동이체증권(mortgage pass-through security, pass-through)과 보다 복잡한 구조의 MBS인 CMO(collateralized mortgage obligations)를 들 수 있다. 전자는 단순히 모기지풀에서 발생하는 현금흐름을 $(1/n)$ 씩 분배하는 증권으로 제한적인 위험 분산 효과가 존재하나 조기상환 위험의 헤지에 특화된 증권이 아니므로 이 위험의 헤지에는 그다지 효율적이지 않다. 반면 CMO에는 tranche(트랜치)라고 불리는 여러 계층의 증권에 조기상환 위험이 차별적으로 분산되어 있다. CMO의 종류는 다양한데 본 연구에서는 조기상환 위험을 가장 차별적으로 분산시킨 PAC-Support 트랜치 구조를 다루기로 한다.

PAC-Support 트랜치 구조의 CMO란, 조기상환과 관계없이 현금흐름이 매우 안정적인 “PAC 트랜치(planned amortization class tranche)”와 이 트랜치를 위하여 자신의 현금흐름의 안정성을 희생하는 “Support 트랜치(companion tranche)”로 이루어진 CMO를 말한다. 자동이체증권의 각 트랜치에는 조기상환 위험이 동일하게 분산되어 있으므로, PAC 트랜치(Support 트랜치)는 자동이체증권의 트랜치보다 조기상환 위험이 낮다(높다). 한편 자동이체증권과 CMO의 전체적인 조기상환 위험의 크기는 불변인데, 그 이유는 두 MBS의 기초자산은 동일한 모기지풀이기 때문이다. 모기지 차입자의 조기상환을 원천적으로 막지 않는 한 조기상환 위험을 근본적으로 제거할 수는 없으므로 두 MBS의 전체로서의 조기상환 위험은 동일하나, 두 MBS의 발행구조에 따라 각 트랜치의 조기상환 위험은 차별화될 수 있고 이 경우 두 MBS의 전체로서의 가치도 차별화 될 수 있다. 사실 단순한 MBS인 자동이체증권에서 복잡한 MBS인 CMO로 진화하는 근본적 목적은 기존의 MBS로는 충족되지 못했던 투자자의 욕구과 효용을 만족·증대시키는 새로운 MBS를 설계하는 데 있으며⁷⁾ 이는 곧 이러한 새로운 MBS는 시장에서 (전체적으로) 보다 높은 가격으로 발행될 수 있음을 암시한다. II장 선행연구에

서 소개한 바 지금까지 MBS에 관한 연구의 대부분은 실증연구로 이러한 주제를 진지하게 다루지 못했었는데, 본고에서는 이처럼 전체적인 조기상환 위험이 불변인 두 MBS의 발행구조가 다를 때 이들의 전체로서의 가치가 차별화될 수 있음을 이론적으로 보이고자 한다.

1. 가정, 용어 및 배경

본 연구의 모형을 위해 다음과 같이 가정과 용어를 설정한다.

가정 :

- (i) 모기지풀에 포함된 모기지들은 만기와 계약이자율에 있어서 동질적이다.
- (ii) 모기기의 만기는 3기로 한다.
- (iii) 모기지 이자율의 변화는 이항모형(a recombining binomial model)으로 접근한다. 현재(0기) 모기지의 계약이자율(contract rate) $i_0 = i$ 이며, 1기에 모기지 이자율은 높아지거나($i_1 = i_H$) 낮아지며($i_1 = i_L$) 그 확률은 각각 0.5이다($i_L < i < i_H$). 2기의 모기지 이자율 i_2 는 i_{HH} , $i_{HL}(= i_{LH})$, i_{LL} 의 세 가지 값을 각각 0.25, 0.5, 0.25의 확률로 갖는다.
- (iv) 조기상환과 refinancing을 고찰하기 위해 모기지 이자율이 하향 추세를 갖는다고 가정한다. 즉 $E(i_2) < E(i_1) < E(i_0) = i$ 이다.
- (v) 조기상환은 기본적으로 미래 모기지 이자율이 현 모기지 이자율 i 보다 낮아지면 발생한다. 또 refinancing burnout 을 반영하기 위하여 i_{HL} 과 i_{LH} 의 경우의 조기상환 비율은 다르다고 가정한다.⁸⁾
- (vi) 시장에는 두 명의 대표적인(representative) 투자자가 존재한다.
- (vii) 위험회피적 투자자와 위험중립적 투자자의 효용함수의 형태는 각각 $U(w) = \ln(w)$, $U(w) = w$ 로 가정한다.
- (viii) 투자자들은 3기에 걸친 기대 효용의 최대화를 목적으로 투자를 결정한다.
- (ix) MBS는 2개의 트랜치로 발행된다.

7) "Redistributing the coupon interest and principal may be more suitable to the needs and expectations of investors, broadening the appeal of mortgage-backed products to various investors." (Fabozzi(2000), p. 260).

8) 본 모형에서는 이자율 경로의 차이에 의한 refinancing의 차이를 강조하기 위해 i_{LH} 의 조기상환 비율 = 0으로, i_{HL} 의 그것은 50%로 가정하였다.

(x) 무위험이자율 = 0이다. (이 가정은 추후 완화된다)

(xi) 미래 효용에 대한 할인요소 $\delta = 1/(1+r)$ 을 가정한다.

이제 이 가정들의 의미를 파악하여 보자. (i) 현실적으로 모기지 대출기관에서 제시하는 모기지들의 이자율에 큰 차이가 없으며 만기의 장단은 조기상환 위험에 본질적인 요소는 아니므로 유사한 만기를 가진 것으로 가정한다. 이 가정은 모기지풀에 대한 단순한 구조설계로는 분산효과가 제한됨을 시사한다. (ii) 조기상환 행태에 있어서 burnout 효과를 반영하려면 모기지 이자율의 경로가 중요하므로 2기 모형은 너무 짧기 때문에 3기 모형으로 접근한다. (iii) 1기 모기지 이자율이 i_H 로 실현되면 2기 이자율은 각각 0.5의 확률로 i_{HH} 혹은 i_{HL} 로 실현되고($i_{HH} > i_{HL}$) 1기 모기지 이자율이 i_L 로 실현되면 2기 이자율은 각각 0.5의 확률로 i_{LH} 혹은 i_{LL} 로 실현된다($i_{LH} > i_{LL}$). 또 $i_{HL} = i_{LL}$, 즉 이항모형에서 자주 쓰이는 recombining model을 가정한다. (iv) 연속시간 모형에서 향후 모기지 이자율의 변화를 다음과 같이 가정한다.

식 (1)

$$di = \left(-\frac{1}{2} \Delta\right) dt + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\right) dz$$

즉 이자율은 단위 기간 당 (-0.5Δ) 의 추세를 갖고 일정한 변동성을 갖는다($\Delta > 0$). 이를 이항모형으로 반영하면 향후 이자율은 다음과 같은 값과 평균을 가지게 된다.⁹⁾

식 (2) 미래 이자율

① $i_H = i + \Delta$

② $i_L = i - 2\Delta$

③ $i_{HH} = i_H + \Delta = (i + \Delta) + \Delta = i + 2\Delta$

④ $i_{HL} = i_H - 2\Delta = (i + \Delta) - 2\Delta = i - \Delta$

⑤ $i_{LH} = i_L + \Delta = (i - 2\Delta) + \Delta = i - \Delta = i_{HL}$

⑥ $i_{LL} = i_L - 2\Delta = (i - 2\Delta) - 2\Delta = i - 4\Delta$

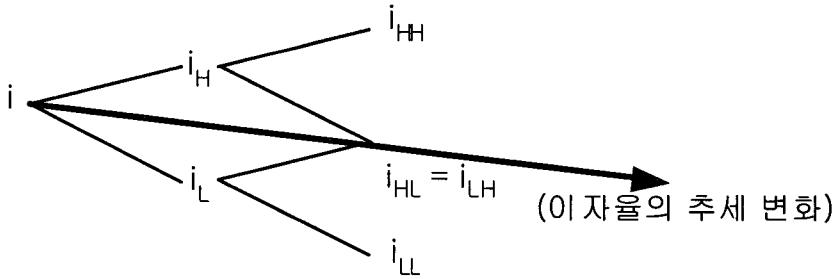
⑦ $E(i_2) = 0.5(i_H + i_L) = i - 0.5\Delta = i_1 - 0.5\Delta < i_1$

⑧ $E(i_3) = 0.25(i_{HH} + i_{HL} + i_{LH} + i_{LL}) = i - \Delta = i_1 - \Delta < E(i_2)$

이를 그림으로 나타내면 (그림 1)과 같다.

9) 변동성은 각 기의 이자율과 평균을 사용하여 검증할 수 있다.

[그림 1] 이자율의 경로와 추세



(v) 현재 모기지 이자율 = i 이므로 기본적으로 향후 이자율이 i 보다 하락하면 조기 상환이 발생한다. 예로서 2기의 $i_{HL} = i - \Delta < i$ 이므로 이 경우 조기상환이 발생한다. 그러나 동일한 이자율 수준인 $i_{LH} = (i - \Delta)$ 의 경우에는 조기상환이 발생하지 않는다고 가정한다. 왜냐하면 i_{LH} 의 과거 이자율 경로는 $i \rightarrow i_L(1기) \rightarrow i_{LH}(2기)$ 인데 1기의 이자율 $i_L = i - 2\Delta$ 이 현 모기지 계약 이자율 i 보다 낮아 조기상환이 발생한 반면 2기의 이자율 i_{LH} 는 (i 보다는 낮지만) 1기 이자율 i_L 보다 높아 “추가적인” 조기상환이 발생할 유인이 적기 때문이다. 이자율 수준만을 보면 1기 이자율(i_L)이 더 낮았기 때문에 i_{LH} 수준에서 발생할 조기상환은 이미 1기에 대부분 발생한 것으로 간주할 수 있기 때문이다.¹⁰⁾ 그러므로 조기상환은 1기의 i_L 그리고 2기의 i_{HL}, i_{LL} 의 경우에만 발생하는 것으로 간주한다. 구체적으로

- ① 1기의 i_L 에서는 잔여원금의 50%가 상환된다.
- ② 2기의 i_{LL} 에서는 잔여원금의 100%가 상환된다.
- ③ 2기의 i_{HL} 에서는 잔여원금의 50%가 상환된다.

이 단순한 수치들은 가능한 한 모형을 간단히 정립하기 위함이다. 참고로 1기의 i_L 에서나 2기의 i_{HL} 에서 공히 잔여원금의 50%가 상환되는 것으로 가정하였지만 조기상환 액수는 1기의 i_L 에서 더 크다. 왜냐하면 1기의 잔여원금은 2기의 잔여원금보다 크기 때문이다.

(vi) 다양한 CMO가 등장한 가장 중요한 이유는 기존의 MBS가 투자자의 다양한 욕

10) 물론 조기상환의 원인은 이자율의 하락 외에도 계절적 요인 혹은 전반적 경제 현황 등이 있을 수 있으나 본 연구에서는 이자율 수준을 중심으로 논의를 전개한다.

구와 효용을 충분히 만족시키지 못하였기 때문이었다. 다양한 CMO는 전체적인 조기상환의 크기는 감소시키지는 못하지만 각 트랜치별 조기상환 위험은 적절히 관리할 수 있는데, 투자자의 위험에 대한 태도가 동질적이 아니면 새로운 구조의 CMO는 새로운 효용과 가치를 창출할 수 있다. 현실적으로도 모든 투자자들의 회피성향이 동일하지는 않으므로, 본 연구에서는 MBS 발행구조에 따른 가치창출 효과를 고찰하기 위해서 위험에 대한 차별적인 태도를 가진 두 투자자를 가정한다. 구체적으로는 위험회피적 투자자와 위험중립적 투자자를 가정한다. (vii)은 통상적으로 사용되는, 일반적인 효용 함수 형태를 본 연구에서 사용하겠다는 의미이다. 참고로 $U(w) = \ln(w)$ 는 투자자들의 위험회피 형태 중 가장 현실적인 DARA(decreasing absolute risk aversion) 계열의 효용 함수이다.

(viii) 오늘($t = 0$) MBS가 발행되고 1期($t = 1$) 및 2期($t = 2$)에 모기지 차입자의 예정된 상환 혹은 조기상환이 발생하고 3期($t = 3$)에 잔여 금액이 상환됨으로써 모기지론이 소멸되는 3기 모형을 채택한다. 그러므로 MBS 투자자들에게는 1기, 2기 및 3기에 현금유입이 발생하는데, 이들은 1~3期の 유입현금의 기대 효용을 극대화하는 투자를 실행하게 된다. 편의상 자동이체증권과 PAC-Support CMO는 공히 2 개의 트랜치를 발행하는 것으로 가정하는데(ix), 전자의 경우 현금흐름에 대한 동일한 권리의 지분 2개를 의미하고 후자의 경우는 차별적 권리의 PAC 트랜치와 Support 트랜치를 의미한다. (x) 및 (xi)은 현재와 미래의 시간 선호도(time preference)에 관한 가정이다. 모기지 시장의 이자율은 통상 (무위험이자율 + 일정 스프레드)로 결정되는데 본 논의에 있어서 무위험이자율의 값은 중요한 요소가 아니므로 0으로 가정한다. 이 가정은 추후 완화된다. 또 미래 효용에 대한 할인요소 δ 는 엄격히 말하면 각 투자자의 주관적인 값으로 결정되지만 여기서는 편의상 $\delta = 1/(1+r)$ 로 가정한다.

이제 본 모형에서 사용되는 변수들을 정의하면 다음과 같다.

- P : 모기지풀의 원금
- i : 모기지풀의 이자율
- C : 모기지 차입자의 균등 상환금
- δ : 할인요소
- α : PAC 트랜치의 안정적 현금흐름 비율

원금이 P이고 이자율이 i 일 때 3 번에 걸쳐 균등상환되는 모기지 상환금 C는 다음과 같이 결정된다.¹¹⁾

식 (3) 모기지론의 매기 상환금

$$C = \frac{P \cdot i(1+i)^3}{(1+i)^3 - 1} = \frac{P(1+i)^3}{i^2 + 3i + 3}$$

여기서 $\partial C / \partial P > 0$, $\partial C / \partial i > 0$ 이다. 즉 모기지의 균등 상환금은 대출원금이 클수록, 모기지 이자율이 높을수록 커진다. 한편 각 투자자들은 1, 2, 3기에 걸친 기대 효용을 극대화하는 투자 의사결정을 한다. 즉 각 투자자들의 목적함수는 다음과 같다.

식 (4)

$$\max : EU(w_1) + \delta \cdot EU(w_2) + \delta^2 \cdot EU(w_3)$$

($w_t = t$ 기의 현금흐름)

2. 현금흐름

여기서는 기초자산인 모기지폴의 현금흐름, 자동이체증권의 현금흐름 및 PAC-Support CMO의 현금흐름을 파악하기로 한다. 이자율 경로가 $i_H \rightarrow i_{HL}$ 로 전개되는 경우에는 조기상환이 전혀 발생하지 않으므로 모기지폴로부터의 현금흐름은 $C \rightarrow C \rightarrow C$ 즉 {1기 = C, 2기 = C, 3기 = C}가 된다. $i_H \rightarrow i_{HL}$ 로 전개되는 경우에는 {1기 = C, 2기 = C + 잔여원금의 50%, 3기 = 잔여 상환액}이 된다. $i_L \rightarrow i_{LH}$ 로 전개되는 경우에는 {1기 = C + 잔여원금의 50%, 2기 = C*, 3기 = C*}가 된다. 여기서 C*는 1기에 조기상환이 발생한 이후의 새 잔여원금을 향후 두 기간에 걸쳐(2기 및 3기) 균등상환할 때 매기 균등상환액을 의미한다. $i_L \rightarrow i_{LL}$ 로 전개되는 경우에는 {1기 = C + 잔여원금의 50%, 2기 = 잔여 상환액, 3기 = 0}이 된다. 그러므로 이자율이 지속적으로 하락하는 마지막 경로를 제외하고는 각 경로의 1기, 2기 및 3기에는 모두 양(+)의 현금흐름이 발생한다.

한편 자동이체증권의 형태로 MBS가 발행되면 현금흐름에 대한 50%의 권리를 갖는 2개의 트랜치가 발행된다. 그러므로 이 지분을 1개 보유한 투자자의 현금흐름은 모기지폴로부터의 현금흐름의 1/2이 된다. 예로서 $i_H \rightarrow i_{HL}$ 로 전개되는 경우에는 {1기 = C/2, 2기 = C/2 + 잔여원금의 25%, 3기 = 잔여상환액/2}가 된다.

PAC 트랜치의 경우 조기상환의 발생 여부와 관계없이 확정적인 현금흐름이 유입되도록 설계되는데 본 모형에서는 이 확정적 현금흐름을 aC 로 가정한다($0 \leq a \leq 1$). 즉

11) 이는 일반 재무관리 교재의 연금의 현재 계산을 활용하여 쉽게 증명할 수 있으므로 여기서는 증명을 생략한다. 예로서 $P = 100$, $i = 0.1$ 이면 $C = 100 \times 1.1^3 / (0.1^2 + 3 \times 0.1 + 3) = 40.21$ 이다. 원금 100의 1기말 원리금은 $100(1+0.1) = 110$ 이 된다. 이 중 1기말에 $C = 40.21$ 을 상환하면 새로운 잔여원금은 $110 - 40.21 = 69.79$ 이다. 이는 다시 2기말에 $69.79(1+0.1) = 76.77$ 이 되고 $C = 40.21$ 을 지불하면 새로운 원금은 36.56 이 된다. 3기말 원리금은 $36.56(1+0.1) = 40.21$ 이 되어 $C = 40.21$ 을 지불하면 모든 원리금이 청산된다.

PAC 트랜치 보유자는 1기 및 2기의 이자율의 등락과 관계없이 {1기 = αC , 2기 = αC , 3기 = αC }의 확정된 현금흐름을 받게 된다. 그리고 PAC 트랜치에의 이러한 현금흐름이 확보되도록 Support 트랜치에의 현금흐름이 결정된다. 예로서 i_{HH} 의 경우에 Support 트랜치에는 (조기상환이 발생하지 않으므로) {1기 = $(1-\alpha)C$, 2기 = $(1-\alpha)C$, 3기 = $(1-\alpha)C$ }의 현금흐름이 할당된다. 다음은 이러한 구조설계의 결과 각 트랜치에 유입되는 현금흐름의 크기이다.

[그림 2] 모기지풀, Pass-through 및 PAC-Support CMO의 현금흐름

모기지 이자율		1기(w_1)	2기(w_2)	3기(w_3)
(모기지풀)				
i_{HH}		C	C	C
i_{HL}		C	$C + 0.5 \times C / (1+i)$	$0.5 \times C$
i_{LH}		$C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]$	$0.5 \times C$	$0.5 \times C$
i_{LL}		$C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]$	$0.5 \times [C + C / (1+i)]$	0
(자동이체증권)				
i_{HH}	지분 1	$0.5 \times C$	$0.5 \times C$	$0.5 \times C$
	지분 2	$0.5 \times C$	$0.5 \times C$	$0.5 \times C$
i_{HL}	지분 1	$0.5 \times C$	$0.5 \times [C + 0.5 \times C / (1+i)]$	$0.25 \times C$
	지분 2	$0.5 \times C$	$0.5 \times [C + 0.5 \times C / (1+i)]$	$0.25 \times C$
i_{LH}	지분 1	$0.5 \times \{C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]\}$	$0.25 \times C$	$0.25 \times C$
	지분 2	$0.5 \times \{C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]\}$	$0.25 \times C$	$0.25 \times C$
i_{LL}	지분 1	$0.5 \times \{C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]\}$	$0.25 \times [C + C / (1+i)]$	0
	지분 2	$0.5 \times \{C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]\}$	$0.25 \times [C + C / (1+i)]$	0
(PAC-Support CMO)				
i_{HH}	PAC	αC	αC	αC
	Support	$(1-\alpha)C$	$(1-\alpha)C$	$(1-\alpha)C$
i_{HL}	PAC	αC	αC	αC
	Support	$(1-\alpha)C$	$[1-\alpha + 0.5 / (1+i)] \times C$	$(0.5-\alpha)C$
i_{LH}	PAC	αC	αC	αC
	Support	$(1-\alpha)C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]$	$(0.5-\alpha)C$	$(0.5-\alpha)C$
i_{LL}	PAC	αC	αC	αC
	Support	$(1-\alpha)C + 0.5 \times [C / (1+i) + C / (1+i)^2]$	$0.5C[1 + 1 / (1+i)] - \alpha C[1 + 1 / (1+i)]$	0

[그림 2]에서 먼저 모기지풀의 현금흐름을 살펴보자. i_{HH} 의 경우는 자명하므로 생략하며 i_{HL} 의 경우 1기(i_H)에는 조기상환이 없으므로 현금흐름은 C이다. 2기에 이자율이 낮아져 i_{HL} 이 되면 일단 정기적 상환금 C의 현금흐름이 발생할 뿐 아니라 잔여원금의 50%에 해당하는 조기상환 현금흐름이 발생한다. 여기서 잔여원금은 $\{P(1+i)-C\} \times (1+i) - C$ 이고 이의 50%는 $0.5 \times \{P(1+i)-C\} \times (1+i) - C$ 인데 식 (3)을 대입하여 정리하면 이 수치는 $C / [2(1+i)]$ 가 된다.¹²⁾ 2기 조기상환이 발생한 이후 남은 원금 $C / [2(1+i)]$ 에 1기간

이자를 적용하면 $C/2$ 가 되는데 이 금액은 3기에 상환된다. 또 i_{LH} 의 경우 1기에 정기 납입금 C 상환 후 잔여원금의 50%는 $0.5 \times [P(1+i) - C]$ 가 되는데 식 (3)을 대입하면 이는 곧 $0.5 \times [C/(1+i) + C/(1+i)^2]$ 가 된다. 그리고 i_{LH} 의 경우 2기 및 3기에 조기상환이 발생하지 않으므로 2기 및 3기는 새로운 원금 $0.5 \times [C/(1+i) + C/(1+i)^2]$ 을 대상으로 두 번에 걸쳐 동일한 금액이 상환되어야 한다.¹³⁾ (식 3)에서 원금 P 대신 $0.5 \times [C/(1+i) + C/(1+i)^2]$ 를 그리고 $n = 2$ 를 대입하면 새로운 정기 상환금 $C' = C/2$ 가 되며 이 금액이 2기 및 3기에 동일하게 상환된다. 마지막으로 i_{LL} 의 경우 1기(= i_L)는 i_{LH} 의 경로의 1기 때와 같으므로 “ $C + 0.5 \times [C/(1+i) + C/(1+i)^2]$ ”이 상환되면 2기에는 나머지 금액이 모두 상환되는데 이는 곧 1기의 잔여원금에 이자를 계산한 $0.5 \times [P(1+i) - C] \times (1+i) = 0.5 \times [C + C/(1+i)]$ 가 된다.

자동이체증권의 각 트랜치는 원 모기지풀의 현금흐름의 50%로 결정되므로 이에 대한 설명은 생략한다. PAC 트랜치의 경우 항상 aC 의 안정적인 현금흐름이 발생되도록 설계되고 Support 트랜치는 이 조건을 충족시키는 잔여 현금흐름을 할당받는다. 그러므로 Support 트랜치에의 현금흐름은 원 모기지풀의 현금흐름에서 aC 를 제외한 현금흐름이 된다. 예로서 i_{HL} (2기)의 경우 원 모기지의 현금흐름은 $[1 + 0.5/(1+i)] \times C$ 인데 이중 PAC 트랜치에의 현금흐름 aC 를 공제하면 $[1 - a + 0.5/(1+i)] \times C$ 가 된다. 원모기지풀에의 현금흐름이 0인 경우에는(i_{LL} 의 3기) 이 시점에도 PAC 트랜치에 현금흐름 aC 를 할당하기 위해, i_{LL} 2기에 원 모기지풀의 현금흐름 중 $aC/(1+r)$ 를 (2기에 즉시 할당하지 않고) 무위험 이자율 r 로 1기간 투자하여 3기에 aC 를 PAC 트랜치에 할당하는 것으로 가정한다. 그러므로 i_{LL} (2기)의 현금흐름은 PAC 트랜치에 aC , Support 트랜치에 [전체 현금흐름 - aC - $aC/(1+r)$] = $0.5C[1 + 1/(1+i)] - aC[1 + 1/(1+r)]$ 이 할당되고 $r = 0$ 이면 $0.5C[1 + 1/(1+i)] - 2aC$ 가 된다. 마지막으로 모든 현금흐름은 양수 혹은 0이므로 a 에 대해 가장 제한적인 현금흐름을 고려하면 a 의 범위는 $0 \leq a \leq 0.5$ 가 됨을 알 수 있다.

IV. MBS 발행구조와 가치평가

본 장에서는 동일한 모기지풀을 대상으로 차별적으로 설계된 두 MBS의 전체적인 가치를 평가하고 비교하는데, $r = 0$ 인 경우와 $r > 0$ 인 경우를 차례로 분석한다.

12) 혹은 직관적으로 다음과 같이 계산할 수도 있다. 2기의 납입금 C 를 상환하고 난 후의 잔여 원금 Q 에 이자를 합친 금액이 3기에 상환해야 하는 금액(= C)이다. 즉 $Q(1+i) = C$ 이다. 여기서 잔여원금의 50% = $Q/2 = C/[2(1+i)]$ 가 도출된다.

13) 이처럼 조기상환이 발생할 때 마다 기간당 정기 납입금 C 는 새로운 잔여원금(outstanding balance)를 대상으로 (식 3)을 update하여 산출된다. 이에 대해 Fabozzi(2000)의 pp. 244-246을 참조할 수 있다.

1. $r = 0$ 인 경우

1) 자동이체증권

(그림 2)를 참조로 자동이체증권의 형태로 MBS가 발행되었을 때 각 투자자의 기대 효용을 산출하여 보자(=1). 먼저 위험중립 투자자의 경우는 다음과 같다.

i) 1기의 기대 효용(i_H, i_L)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[0.5 \times C + 0.5 \times C \left(1 + 0.5 \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right] \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \times 0.5 \times C + 2 \times 0.5 \times C \left(1 + 0.5 \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right] \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[C + C \left(1 + 0.5 \left[\frac{(1+i)+1}{(1+i)^2} \right] \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} C \left(2 + 0.5 \left[\frac{2+i}{(1+i)^2} \right] \right) = \frac{1}{4} C \left(\frac{2(1+i)^2}{(1+i)^2} + \frac{1+0.5i}{(1+i)^2} \right) \\
 &= \frac{C}{4} \left(\frac{2i^2 + 4.5i + 3}{(1+i)^2} \right)
 \end{aligned}$$

(1/4로 공통적으로 표시하는 것이 보다 효과적임을 향후에 알게 된다.)

ii) 2기의 기대 효용($i_{HH}, i_{HL}, i_{LH}, i_{LL}$)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \left[0.5 C + 0.25 C + 0.5 C \left(1 + \frac{0.5}{1+i} \right) + 0.25 C \left(1 + \frac{1}{1+i} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[0.75 C + 0.25 C \left(2 + \frac{1}{1+i} + 1 + \frac{1}{1+i} \right) \right] \\
 &= \frac{C}{4} \left[0.75 + 0.25 \left(3 + \frac{2}{1+i} \right) \right] = \frac{C}{4} \left[0.75 + 0.75 + \frac{0.5}{1+i} \right] \\
 &= \frac{C}{4} \left[\frac{1.5i + 1.5 + 0.5}{1+i} \right] = \frac{C}{4} \left[\frac{1.5i + 2}{1+i} \right] \\
 &= \frac{C}{4} \left[\frac{(1.5i + 2)(i + 1)}{(1+i)^2} \right] = \frac{C}{4} \left[\frac{1.5i^2 + 3.5i + 2}{(1+i)^2} \right]
 \end{aligned}$$

iii) 3기의 기대 효용

$$\frac{1}{4}[0.5C+0.25C+0.25C+0]=\frac{C}{4}\left[\frac{i^2+2i+1}{(i+1)^2}\right]$$

그러므로 위험중립 투자자의 3기에 걸친 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{4}\left(\frac{2i^2+4.5i+3}{(1+i)^2}\right) + \frac{C}{4}\left[\frac{1.5i^2+3.5i+2}{(1+i)^2}\right] + \frac{C}{4}\left[\frac{i^2+2i+1}{(1+i)^2}\right] \\ &= \frac{C}{4}\left(\frac{(2i^2+4.5i+3)+(1.5i^2+3.5i+2)+(i^2+2i+1)}{(1+i)^2}\right) \\ &= \frac{C}{4}\left(\frac{4.5i^2+10i+6}{(1+i)^2}\right) \end{aligned}$$

식 (5) 위험중립 투자자의 자동이체증권 기대 효용

$$\frac{C}{4}\left(\frac{4.5i^2+10i+6}{(1+i)^2}\right)$$

한편 같은 방법으로 위험회피 투자자의 기대 효용을 구하면 다음과 같다. 앞서 가정하였듯이 위험회피 투자자의 효용 함수는 $\ln(w)$ 이며, 식 (6)의 증명은 부록에 나와 있다.

식 (6) 위험회피 투자자의 자동이체증권 기대 효용

$$\begin{aligned} &3.75 \times \ln 0.5 + 2.75 \times \ln C - 1.5 \times \ln(1+i) \\ &+ 0.5 \times \ln(i^2+2.5i+2) + 0.25 \times \ln(i^2+3.5i+3) \end{aligned}$$

2) PAC-Support CMO

이제 PAC-Support CMO의 형태로 MBS가 발행되고 각 투자자의 위험회피 성향에 적합하게, 즉 위험회피자에게는 PAC 트랜치를 그리고 위험중립자에게는 Support 트랜치가 제시될 경우 이들의 기대 효용을 산출하여 보자. 먼저 위험중립 투자자가 Support 트랜치를 보유할 경우의 기대 효용은 다음과 같다(증명은 부록 참조).

식 (7) 위험중립 투자자의 Support 트랜치 기대 효용

$$\frac{C}{4(i+1)^2}[(9-12a)i^2+(20-24a)i+(12-12a)]$$

식 (7)로부터 위험중립 투자자의 Support 트랜치 보유시 기대 효용 EU는 $\partial EU/\partial a < 0$ 임을 알 수 있다($i > 0$). 이는 a 가 커질수록 PAC 트랜치에의 현금흐름이 커지고 Support 트랜치에의 현금흐름이 작아지기 때문이다. 한편 PAC 트랜치를 보유할 경우 항상 aC 의 현금흐름을 할당받으므로 매기(每期)의 기대 효용은 항상 $\ln[aC] = \ln(a) + \ln C$ 가 되고, 3기에 걸친 총 기대 효용은 $3\ln[aC] = 3\ln(a) + 3\ln C$ 이다.

식 (8) 위험회피 투자자의 PAC 트랜치 기대 효용

$$3 \times \ln a + 3 \times \ln C$$

위험회피 투자자가 PAC 트랜치 보유시의 기대 효용과의 관계는 $\partial EU/\partial a > 0$ 임을 쉽게 알 수 있다.

3) 두 MBS의 기대 효용

이제 각 투자자에 제시된 상이한 발행구조의 두 트랜치의 (기대)효용을 비교해보자. 먼저 위험중립 투자자의 경우는 다음과 같다.

Support 트랜치의 효용 - 자동이체증권 트랜치의 효용

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{4(i+1)^2} [(9-12a)i^2 + (20-24a)i + (12-12a)] - \frac{C}{4} \left(\frac{4.5i^2 + 10i + 6}{(1+i)^2} \right) \\ &= \frac{C}{4(i+1)^2} [(9-12a-4.5)i^2 + (20-24a-10)i + (12-12a-6)] \\ &= \frac{C}{4(i+1)^2} [(4.5-12a)i^2 + (10-24a)i + (6-12a)] = \frac{C}{4(i+1)^2} [A] \end{aligned}$$

식 (9) 위험중립 투자자의 기대 효용의 비교

$$\frac{C}{4(i+1)^2} [A], \quad \text{where } A = (4.5-12a)i^2 + (10-24a)i + (6-12a)$$

위 식이 0보다 크기 위해서는 $A > 0$ 이어야 한다. $A = (4.5-12a)i^2 + (10-24a)i + (6-12a)$ 인데 $i(>0)$ 의 값과 관계없이 0보다 크려면 ① $(4.5-12a) > 0$ ② $(10-24a) > 0$ ③ $(6-12a) > 0$ 이면 된다. 즉 ① $a < 0.375$ ② $a < 0.416$ ③ $a < 0.5$ 이어야 한다. ①, ②, ③을 만족하려면 $a < 0.375$ 이지만, A 의 구조상 $a = 0.375$ 인 경우에도 $A > 0$ 이다. 왜냐하

면 이 경우 ① = 0이지만 ② = 10-24×0.375 = 1 > 0, ③ 6-12×0.375 = 1.5 > 0이기 때문이다. 그러므로 PAC-Support CMO의 PAC 트랜치에의 현금흐름을 aC (a = 0.375)로 할당하고 잔여 현금흐름을 Support 트랜치에 할당하면 위험중립 투자자의 Support 트랜치에 대한 효용은 자동이체증권의 트랜치를 보유할 때보다 증대된다.

이제 위험회피 투자자의 효용을 비교하면,

PAC 트랜치의 효용 - 자동이체증권의 트랜치의 효용

$$\begin{aligned}
 &= 3[\ln \alpha + \ln C] - [3.75 \ln 0.5 + 2.75 \ln C - 1.5 \ln(1+i) \\
 &\quad + 0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\
 &= 3 \ln \alpha + 0.25 \ln C - 3.75 \ln 0.5 + 1.5 \ln(1+i) \\
 &\quad - 0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) - 0.25 \ln(i^2 + 3.5i + 3) \\
 &= 0.25 \ln C + 3 \ln \alpha - 3.75 \ln 0.5 + 1.5 \ln(1+i) \\
 &\quad - [0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\
 &= 0.25 \ln C + 3 \ln \alpha - 3.75 \times (-0.693) + 1.5 \ln(1+i) \\
 &\quad - [0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\
 &= 0.25 \ln C + 3 \ln \alpha + 2.599 + 1.5 \ln(1+i) \\
 &\quad - [0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\
 &= \quad A \quad \quad \quad - \quad \quad \quad B
 \end{aligned}$$

이다.

식 (10) 위험회피 투자자의 기대 효용의 비교

$$\begin{aligned}
 &0.25 \ln C + 3 \ln \alpha + 2.599 + 1.5 \ln(1+i) - [0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\
 &= \quad \quad \quad A \quad \quad \quad - \quad \quad \quad B
 \end{aligned}$$

그런데 이 식의 구조상 B(>0)의 크기는 매우 제한된다. 왜냐하면 i가 클수록 B는 커지는데 ($\partial B / \partial i > 0$) i의 크기는 한정되어 있기 때문이다. 극단적인 예로 i = 100% = 1이면 B = 0.5×ln(1²+2.5×1+2) + 0.25×ln(1²+3.5×1+3) = 0.5×ln(5.5) + 0.25×ln(7.5) = 0.5× 1.705 + 0.25×2.015 = 1.356이다. 반면 A의 값은 C로 인하여 매우 커진다. C는 전체 모기지풀의 원금 P를 3기에 걸쳐 균등상환하는 금액으로 식 (3)에 따라 $C = \frac{P(1+i)^3}{i^2+3i+3}$ 인데 모기지풀의 원금 P는 통상 1억\$ 이상으로 이자율 i에 비해 매우 큰 수치이기 때문이

다.¹⁴⁾ 예로서 $P = \$1억 = \$100,000,000$ 인 경우 $0.01 \leq i \leq 1$ 의 모든 값에 대해 C 값의 범위는 $34,002,211 \leq C \leq 114,285,714$ 이다($\partial C/\partial i > 0$). A 의 구성 요소 중 유일한 음수는 $3 \times \ln(a)$ 인데, 앞에서 Support 트랜치의 기대 효용이 더 높은 의 범위가 $0 < a \leq 0.375$ 로 도출되었다. 그러므로 이 값 중 가장 큰 0.375 혹은 이와 가까운 값을 선택하여 A 의 값을 구해보면 C 가 가장 작은 값을 갖는 경우에도 $A = 0.25 \ln(C) + 3 \ln(0.375) + 2.599 + 1.5 \ln(1+0.01) = 0.25 \ln(34,002,211) + 3(-0.981) + 2.599 + 0.015 = 0.25 \times 17.342 - 2.943 + 2.599 + 0.015 = 4.0065 > B (=1.356)$ 가 되어 PAC 트랜치의 효용이 자동이체증권 트랜치의 효용보다 크다.¹⁵⁾

결과적으로 $a = 0.375$ 로 PAC-Support CMO를 설계하면, 두 투자자가 무차별한 자동이체증권의 각 트랜치에 투자할 때보다 PAC-Support CMO의 차별화된 트랜치에 투자할 때 각각 효용이 커진다. 그러므로 이 CMO의 각 트랜치의 가치는 자동이체증권의 각 트랜치의 그것보다 높으며, MBS 발행기관은 이를 이용하여 PAC-Support 트랜치의 각 발행가격을 자동이체증권의 트랜치의 그것보다 높이 산정할 수 있다.¹⁶⁾ 이 결과가 시사하는 것은 전체 투자자의 차원에서는 물론이고 각 투자자의 효용이 증대되는 최적의 MBS 발행구조(최적의 a)가 존재한다는 것이다. 그리고 이처럼 CMO 가치를 자동이체증권의 그것보다 증대시키는 발행구조 즉 여기서의 a 는 유일하지 않음도 알 수 있다.

2. $r > 0$ 인 경우

이제 가정 x)를 완화하여 무위험이자율 $= r > 0$ 이고 미래 (기대)효용의 할인요소 $\delta = 1/(1+r) < 1$ 이라 하자. 이 경우 $i_{LL}(2기)$ 의 Support 트랜치의 현금흐름은 (그림 2)에서 설명된 바와 같이 $0.5C[1+1/(1+i)] - aC[1+ 1/(1+r)] = 0.5C[1+1/(1+i) - 2a(1+\delta)]$ 가 된다. 그런데 $r > 0$ 인 경우를 분석할 때 한 가지 문제는 투자자의 효용이 r, i 및 a 의 함수가 되어 (1)절에서와 같은 분석이 어렵다는 것이다. 즉 i 와 r 의 (거의) 모든 값에 대하여 PAC-Support CMO의 효용이 자동이체증권의 그것보다 큰 조건은 3차원이 되어 사실상 구하기 어렵다. 그러므로 여기서는 외생적으로 주어진 r 값을 가정하여 분석하기로

14) Fabozzi(2000) pp 244-246을 참조할 수 있다.

15) 원래 동일한 i 를 사용해야 하므로 B에서 사용된 $i = 100\% = 1$ 을 사용하면 $\ln(1+i) = \ln(1+1) = 0.693$ 이 되어 $A = 4.712$ 이 되어 본문의 4.0065보다도 커진다. 혹은 $i = 1\% = 0.01$ 을 사용하면 $B = 0.631$ 이 되어 본문의 $B = 1.356$ 보다 작아져 중국적인 ($A - B$) 값은 본문에서보다 더 큰 양수(+) 값을 가진다.

16) PAC 트랜치를 위험중립자에게 또 Support 트랜치를 위험회피자에게 판매하려고 한다면 어떻게 되는가는 고려할 가치가 없는 우문(愚問)이다.

하며, 선진 모기지 시장 혹은 신흥 모기지 시장인 미국, 영국, 호주, 독일, 일본 및 한국의 무위험 이자율이 대부분 1%~5%임을 고려하여 $r = 0.05$ 의 경우를 분석하기로 한다. 이 경우 $\delta = 1/(1+r) = 0.952$ 이다. 그리고 투자자의 1기 기대 효용은 $r = 0$ 인 경우와 같고 2기(3기)의 기대 효용은 $r = 0$ 인 경우에 산출된 기대 효용에 $\delta(\delta^2)$ 을 곱한 값이 된다.

1) 자동이체증권

먼저 위험중립 투자자의 경우는 다음과 같다.

$$1\text{기의 기대 효용} = \frac{C}{4} \left[\frac{2i^2 + 4.5i + 3}{(i+1)^2} \right]$$

$$2\text{기의 기대 효용} = \delta \times \frac{C}{4} \left[\frac{1.5i^2 + 3.5i + 2}{(i+1)^2} \right]$$

$$3\text{기의 기대 효용} = \delta^2 \times \frac{C}{4} \left[\frac{i^2 + 2i + 1}{(i+1)^2} \right]$$

그러므로 위험중립 투자자의 3기에 걸친 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{4} \left[\frac{2i^2 + 4.5i + 3}{(i+1)^2} \right] + \delta \frac{C}{4} \left[\frac{1.5i^2 + 3.5i + 2}{(i+1)^2} \right] + \delta^2 \frac{C}{4} \left[\frac{i^2 + 2i + 1}{(i+1)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{(2i^2 + 4.5i + 3) + \delta(1.5i^2 + 3.5i + 2) + \delta^2(i^2 + 2i + 1)}{(i+1)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{(2 + 1.5\delta + \delta^2)i^2 + (4.5 + 3.5\delta + 2\delta^2)i + (3 + 2\delta + \delta^2)}{(i+1)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4(1+i)^2} \times (4.334i^2 + 9.645i + 5.810) \end{aligned}$$

식 (11) 위험중립 투자자의 자동이체증권 기대 효용

$$\frac{C}{4(1+i)^2} \times (4.334i^2 + 9.645i + 5.810)$$

마찬가지 방법으로 위험회피 투자자의 기대 효용을 구하면 다음과 같다(증명은 부록 참조).

식 (12) 위험회피 투자자의 자동이체증권 기대 효용

$$-2.448 + 2.632 \times \ln C - 1.476 \times \ln(1+i) + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) \\ + 0.238 \times \ln(i^2 + 3.5i + 3)$$

2) PAC-Support CMO

먼저 위험중립 투자자가 Support 트랜치를 보유할 경우의 기대 효용은 다음과 같다.

$$1\text{기의 기대 효용} = \frac{C}{4} \left[\frac{4(1-a)i^2 + (9-8a)i + 6 - 4a}{(1+i)^2} \right]$$

2기에는 경우 [그림 2]에서와 같이 i_{LL} 의 경우 현금흐름은 $0.5C[1+1/(1+i)] - aC(1+\delta)$
 $= 0.5C[1+1/(1+i) - 2a(1+\delta)]$ 가 된다. 그러므로 2기의 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \delta \frac{1}{4} \left[(1-a)C + (0.5-a)C + C \left(1-a + \frac{0.5}{1+i} \right) + 0.5C \left(1-2a(1+\delta) + \frac{1}{1+i} \right) \right] \\ &= \delta \frac{C}{4} \left[(1-a) + (0.5-a) + \left(1-a + \frac{0.5}{1+i} \right) + 0.5 \left(1-2a(1+\delta) + \frac{1}{1+i} \right) \right] \\ &= \delta \frac{C}{4} \left[3 - (4+\delta)a + \frac{1}{1+i} \right] = \frac{C}{4} \left[\frac{[3 - (4+\delta)a]i + 4 - (4+\delta)a}{1+i} \right] \\ &= \delta \frac{C}{4} \left[\frac{[3 - (4+\delta)a]i^2 + [7 - 2(4+\delta)a]i + 4 - (4+\delta)a}{(1+i)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{그리고 3기의 기대 효용} = \delta^2 \frac{C}{4} \left(\frac{(2-3a)i^2 + 2(2-3a)i + (2-3a)}{(i+1)^2} \right) \text{이 된다.}$$

이에 따라 위험중립 투자자의 3기에 걸친 기대 효용은 다음과 같다(부록 참조).

식 (13) 위험중립 투자자의 Support 트랜치 기대 효용

$$\frac{C}{4(i+1)^2} [[8.669 - 11.436a]i^2 + [19.288 - 22.872a]i + 11.621 - 11.436a]$$

한편 PAC 트랜치를 보유할 경우 매기(每期)의 기대 효용은 항상 $\ln[C] = \ln(a) + \ln C$ 가 되고, 3기에 걸친 총 기대 효용은 $(1+\delta+\delta^2) \times \ln[aC] = 2.859 \times \ln(a) + 2.859 \times \ln C$ 이다.

식 (14) 위험회피 투자자의 PAC 트랜치 기대 효용

$$2.859 \times \ln \alpha + 2.859 \times C$$

3) 두 MBS의 기대 효용

이제 각 투자자에 제시된 상이한 발행구조의 두 트랜치의 (기대)효용을 비교해보자. 먼저 위험중립 투자자의 경우는 다음과 같다.

Support 트랜치의 효용 - 자동이체증권 트랜치의 효용

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{4(i+1)^2} [[8.669 - 11.436\alpha]i^2 + [19.288 - 22.872\alpha]i + 11.621 - 11.436\alpha] \\ &\quad - \frac{C}{4(i+1)^2} \times (4.334i^2 + 9.645i + 5.810) \\ &= \frac{C}{4(i+1)^2} [8.669 - 11.436\alpha - 4.334]i^2 + (19.288 - 22.872\alpha - 9.645)i \\ &\quad + 11.621 - 11.436\alpha - 5.810] \\ &= \frac{C}{4(i+1)^2} [(4.335 - 11.436\alpha)i^2 + (9.643 - 22.872\alpha)i + (5.811 - 11.436\alpha)] \\ &= \frac{C}{4(i+1)^2} [B] \end{aligned}$$

식 (15) 위험중립 투자자의 기대 효용의 비교

$$\begin{aligned} &\frac{C}{4(i+1)^2} [(4.335 - 11.436\alpha)i^2 + (9.643 - 22.872\alpha)i + (5.811 - 11.436\alpha)] \\ &= \frac{C}{4(i+1)^2} [B] \end{aligned}$$

위 식이 0보다 크기 위해서는 $B > 0$ 이어야 한다. $B = (4.335 - 11.436\alpha)i^2 + (9.643 - 22.872\alpha)i + (5.811 - 11.436\alpha)$ 인데 $i(>0)$ 의 값과 관계없이 0보다 크려면 ① $(4.335 - 11.436\alpha) > 0$ ② $(9.643 - 22.872\alpha) > 0$ ③ $(5.811 - 11.436\alpha) > 0$ 이면 된다. 즉 ① $\alpha < 0.379$ ② $\alpha < 0.422$ ③ $\alpha < 0.508$ 이어야 한다. $B > 0$ 을 만족하려면 $\alpha \leq 0.379$ 이다. 그러므로 PAC-Support CMO의 PAC 트랜치에의 현금흐름을 αC ($\alpha \leq 0.379$)로 할당하고 잔여

현금흐름을 Support 트랜치에 할당하면 위험중립 투자자의 Support 트랜치에 대한 효용은 자동이체증권의 트랜치를 보유할 때보다 증대된다. 참고로 위 식은 $r = 0$ (즉 $\delta = 1$)인 경우의 $a \leq 0.375$ 와 유사하며 오히려 a 의 범위가 보다 확장되었음을 알 수 있다. 왜냐하면 $r > 0$ 이면 i_{LL} 의 경우 Support 트랜치가 3기의 PAC 트랜치를 위해 포기해야 할 현금흐름이 aC 가 아니라 $aC/(1+r)$ 즉 δaC 이어서 ($\delta < 1$) 2기 현금흐름이 증대되기 때문이다.

한편 위험회피 투자자의 효용을 비교하면,
 PAC 트랜치의 효용 - 자동이체증권의 트랜치의 효용

$$\begin{aligned} & 2.859[\ln a + \ln C] \\ & - [-2.448 + 2.632 \times \ln C - 1.476 \times \ln(1+i) \\ & \quad + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.238 \times \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\ & = 0.227 \ln C + 2.859 \ln a + 2.448 + 1.476 \ln(1+i) \\ & \quad - [0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.238 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \end{aligned}$$

이다.

식 (16) 위험회피 투자자의 기대 효용의 비교

$$\begin{aligned} & = 0.227 \ln C + 2.859 \ln a + 2.448 + 1.476 \ln(1+i) \\ & \quad - [0.5 \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.238 \ln(i^2 + 3.5i + 3)] \\ & = \quad \quad \quad E \quad \quad \quad - \quad \quad \quad F \end{aligned}$$

이 식은 식 (10)과 유사하므로 그 결과가 크게 다르지 않음을 짐작할 수 있다. 즉 i 가 클수록 F 가 커지며 ($\partial F / \partial i > 0$) 예로서 $i = 100\%$ 이면 $F = 0.5 \times \ln(1^2 + 2.5 \times 1 + 2) + 0.238 \times \ln(1^2 + 3.5 \times 1 + 3) = 0.5 \times \ln(5.5) + 0.238 \times \ln(7.5) = 0.5 \times 1.705 + 0.238 \times 2.015 = 1.332$ 이다. 반면 P 는 이자율 i 에 비해 매우 큰 수치이고 따라서 C 의 값도 i 에 비해 매우 크며 E 값도 매우 커진다. 1절에서와 마찬가지로 $P = \$1억 = \$100,000,000$ 인 경우 $0.01 \leq i \leq 1$ 에 대해 $34,002,211 \leq C \leq 114,285,714$ 이 성립한다. 한편 E 의 구성 요소 중 유일한 음수는 $2.859 \times \ln(a)$ 인데, 앞에서 Support 트랜치를 고려할 때 $0 < a \leq 0.379$ 로 도출되었으므로 $a = 0.379$ 를 대입하면 (C 가 가장 작은 값을 갖는 경우에도) $E = 0.227 \ln(C) + 2.859 \ln(0.379) + 2.448 + 1.476 \ln(1+0.01) = 0.227 \times \ln(34,002,211) + 2.859 \times (-0.970) + 2.448$

+ 0.015 = 0.227 \times 17.342 - 2.773 + 2.448 + 0.015 = 3.627 > F = 1.332가 되어 PAC 트랜치의 효용이 자동이체증권 트랜치의 효용보다 큼을 알 수 있다. 결과적으로 $\alpha = 0.379$ 로 PAC-Support CMO를 설계할 때 PAC-Support CMO의 각 트랜치의 발행가격은 자동이체증권의 각 트랜치의 그것보다 높아질 수 있다.

V. 결 론

서론에서 지적하였듯이 지금까지 모기지에 대한 연구는 II장 미국 시장의 자료를 중심으로한 실증연구 일변도였다. 한편 모기지 시장의 도입과 발전적 변화를 주도한 근본적인 원인은 투자자 혹은 차입자의 효용 제고 혹은 이들의 욕구 충족에 있다. 본 연구는 이러한 사실에 주목하여 MBS의 발행 구조에 따라 그 가치가 변동할 수 있음을 이론 모형으로 접근하고 분석하고 해석하였다는 점에서 의의가 있다. 보다 구체적으로 기존 MBS의 구조설계와 다른 새로운 현금흐름 및 위험 구조의 MBS가 발행되는 주요한 이유는 그것이 투자자들의 다양한 욕구를 충족시킬 수 있기 때문이라고 일반적으로 알려져 왔지만 이에 대한 체계적인 설명은 거의 이루어진 바 없었다. 본 연구는 자동이체증권과 PAC-Support CMO라는 차별적 발행구조의 두 MBS의 가치를 투자자의 효용의 관점에서 파악하고 후자가 전자보다 더 큰 가치를 창출할 수 있음을 이론적으로 보였다. 무위험이자율 $r = 0$ 혹은 $r > 0$ 이고 위험중립적 그리고 위험회피적인 투자자가 존재하는 경우를 중심으로 두 MBS의 상대적 가치를 분석한 결과 현금흐름과 조기상환 위험의 차별적 구조설계에 따라 자동이체증권보다 더 큰 효용과 가치를 창출하는 PAC-Support CMO를 발행할 수 있음을 발견하였다.

본 연구는 모기지 발행구조와 가치평가의 관계를 찾는 최초의 연구로서 특히 burn-out 효과와 refinancing 그리고 MBS 가치평가의 관계를 중점적으로 반영한, 비교적 단순한 이론 모형으로 논의를 전개하였으며 이는 본 연구의 한계라고 할 수 있다. 앞으로 모기지의 소진현상(burnout effect)에 대해서도 보다 다양한 이자율 경로 혹은 모기지 현금흐름 경로를 반영하기 위하여 몬테 카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation) 등을 활용하여 보다 복잡한 내용의 논의를 전개할 수 있을 것이다. 이에 대해서는 향후의 보다 발전된 연구를 기대한다.

<부 록>

- 식 (6) 증명 : 위험회피 투자자의 자동이체증권 기대 효용

i) 1기의 기대 효용

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \left[2 \times \ln[0.5C] + 2 \times \ln \left[0.5C \left(1 + 0.5 \left(\frac{1}{1+i} + \frac{+1}{(1+i)^2} \right) \right) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \times [\ln 0.5 + \ln C] + 2 \times \ln \left[\ln 0.5C + \ln \left(1 + 0.5 \left(\frac{1+i+1}{(1+i)^2} \right) \right) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{2} \times [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \times [\ln 0.5C + \ln C] + \frac{1}{2} \times \ln \left(\frac{(1+i)^2 + 0.5(2+i)}{(1+i)^2} \right) \\
 &= [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+i)^2 + 0.5(2+i)}{(1+i)^2} \right) \\
 &= [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{i^2 + 2.5i + 2}{(1+i)^2} \right) \\
 &= [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) - \ln(1+i)
 \end{aligned}$$

ii) 2기의 기대 효용

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \left[\ln(0.5C) + \ln(0.25C) + \ln \left[0.5C \left(1 + \frac{0.5}{1+i} \right) \right] + \ln \left[0.25C \left(1 + \frac{1}{1+i} \right) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\ln 0.5 + \ln C + \ln 0.25 + \ln C + \left[\ln 0.5 + \ln C + \ln \left(\frac{i+1.5}{1+i} \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[\ln 0.25 + \ln C + \ln \left(\frac{i+2}{1+i} \right) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\ln 0.5 + \ln C + 2 \ln 0.5 + \ln C + \left[\ln 0.5 + \ln C + \ln \left(\frac{i+1.5}{1+i} \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[2 \ln 0.5 + \ln C + \ln \left(\frac{i+2}{1+i} \right) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{4} [6 \ln 0.5 + 4 \ln C + \ln(i+1.5) + \ln(i+2) - 2 \ln(1+i)] \\
 &= \frac{1}{4} [6 \ln 0.5 + 4 \ln C + \ln[(i+1.5)(i+2)] - 2 \ln(1+i)] \\
 &= \frac{1}{4} [6 \times \ln 0.5 + 4 \times \ln C + \ln(i^2 + 3.5i + 3)] - 2 \ln(1+i)
 \end{aligned}$$

iii) 3기의 기대 효용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [\ln(0.5C) + \ln(0.25C) + \ln(0.25C) + 0] \\ &= \frac{1}{4} [\ln 0.5 + \ln C + \ln 0.25 + \ln C + \ln 0.25 + \ln C] \\ &= \frac{1}{4} [\ln 0.5 + \ln C + 2 \ln 0.5 + \ln C + 2 \ln 0.5 + \ln C] \\ &= \frac{1}{4} [5 \times \ln 0.5 + 3 \times \ln C] \end{aligned}$$

그러므로 위험회피 투자자의 3기에 걸친 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) - \ln(1 - i) \\ &+ \frac{1}{4} [6 \times \ln 0.5 + 4 \times \ln C + \ln(i^2 + 3.5i + 3) - 2 \ln(1 + i)] + \frac{1}{4} [5 \times \ln 0.5 + 3 \times \ln C] \\ &= (1 + 1.5 + 1.25) \times \ln 0.5 + (1 + 1 + 0.75) \times \ln C \\ &\quad - (1 + 0.5) \times \ln(1 + i) + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \times \ln(i^2 + 3.5i + 3) \\ &= 3.75 \times \ln 0.5 + 2.75 \times \ln C - 1.5 \times \ln(1 + i) \\ &\quad + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25 \times \ln(i^2 + 3.5i + 3) \end{aligned}$$

• 식 (7) 증명 : 위험중립 투자자의 Support 트랜치 기대 효용

i) 1기의 기대 효용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[2 \times (1 - \alpha)C + 2 \left((1 - \alpha)C + 0.5C \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right] \right) \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[2(1 - \alpha) + 2(1 - \alpha) + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right] = \frac{C}{4} \left[4(1 - \alpha) + \frac{1+i+1}{(1+i)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{4(1 - \alpha)(1+i)^2 + 1+i+1}{(1+i)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{4(1 - \alpha)i^2 + 8(1 - \alpha)i + 4(1 - \alpha) + 1+i+1}{(1+i)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{4(1 - \alpha)i^2 + (9 - 8\alpha)i + 6 - 4\alpha}{(1+i)^2} \right] \end{aligned}$$

ii) 2기의 기대 효용

(iLL의 경우 $r = 0$ 이면 PAC 트랜치를 위해 $2aC$ 즉 $[0.5 \times C \times 4a]$ 를 할당하여야 한다.)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[(1-a)C + (0.5-a)C + C \left(1-a + \frac{0.5}{1+i} \right) + 0.5C \left(1-4a + \frac{1}{1+i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(1-a) + (0.5-a) + \left(1-a + \frac{0.5}{1+i} \right) + 0.5 \left(1-4a + \frac{1}{1+i} \right) \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[3-5a + \frac{1}{1+i} \right] = \frac{C}{4} \left[\frac{(3-5a)i+4-5a}{(1+i)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{(3-5a)i^2 + (7-10a)i + (4-5a)}{(1+i)^2} \right] \end{aligned}$$

iii) 3기의 기대 효용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(1-a)C + (0.5-a)C + (0.5-a) + 0] \\ &= \frac{C}{4} [1-a + 0.5-a + 0.5-a] \\ &= \frac{C}{4} [2-3a] = \frac{C}{4} [2-3a] \frac{i^2+2i+1}{(1+i)^2} \\ &= \frac{C}{4} \left[\frac{(2-3a)i^2 + 2(2-3a)i + (2-3a)}{(1+i)^2} \right] \end{aligned}$$

그러므로 위험중립 투자자의 3기에 걸친 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{C}{4} \left[\frac{4(1-a)i^2 + (9-8a)i + 6-4a}{(1+i)^2} \right] \\ &+ \frac{C}{4} \left[\frac{(3-5a)i^2 + (7-10a)i + (4-5a)}{(1+i)^2} \right] \\ &+ \frac{C}{4} \left[\frac{(2-3a)i^2 + 2(2-3a)i + (2-3a)}{(1+i)^2} \right] \\ &= \frac{C}{4(1+i)^2} [(9-12a)i^2 + (20-24a)i + (12-12a)] \end{aligned}$$

• 식 (12) 증명 : 위험회피 투자자의 자동이체증권 기대 효용

$$1\text{기의 기대 효용} = [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) - \ln(1 - i)$$

$$2\text{기의 기대 효용} = \frac{\delta}{4} [6 \times \ln 0.5 + 4 \times \ln C + \ln(i^2 + 3.5i + 3) - 2 \ln(1 + i)]$$

$$3\text{기의 기대 효용} = \frac{\delta^2}{4} [5 \times \ln 0.5 + 3 \times \ln C]$$

그러므로 위험회피 투자자의 3기에 걸친 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [\ln 0.5 + \ln C] + \frac{1}{2} \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) - \ln(1 + i) \\ & + \frac{\delta}{4} [6 \times \ln 0.5 + 4 \times \ln C + \ln(i^2 + 3.5i + 3) - 2 \ln(1 + i)] + \frac{\delta^2}{4} [5 \times \ln 0.5 + 3 \times \ln C] \\ & = (1 + 1.5\delta + 1.25\delta^2) \times \ln 0.5 + (1 + \delta + 0.75\delta^2) \times \ln C \\ & \quad - (1 + 0.5\delta) \times \ln(1 + i) + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.25\delta \times \ln(i^2 + 3.5i + 3) \\ & = 3.531 \times \ln 0.5 + 2.632 \times \ln C - 1.476 \times \ln(1 + i) \\ & \quad + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.238 \times \ln(i^2 + 3.5i + 3) \\ & = -2.448 + 2.632 \times \ln C - 1.476 \times \ln(1 + i) \\ & \quad + 0.5 \times \ln(i^2 + 2.5i + 2) + 0.238 \times \ln(i^2 + 3.5i + 3) \end{aligned}$$

• 식 (13) 증명 : 위험중립 투자자의 Support 트랜치 기대 효용

$$\begin{aligned} & \frac{C}{4} \left[\frac{4(1 - \alpha)i^2 + (9 - 8\alpha)i + 6 - 4\alpha}{(1 + i)^2} \right] \\ & + \frac{\delta C}{4} \left[\frac{[3 - (4 + \delta)\alpha]i^2 + [7 - 2(4 + \delta)\alpha]i + 4 - (4 + \delta)\alpha}{(1 + i)^2} \right] \\ & + \frac{\delta^2 C}{4} \left[\frac{(2 - 3\alpha)i^2 + 2(2 - 3\alpha)i + (2 - 3\alpha)}{(1 + i)^2} \right] \end{aligned}$$

(이를 i 차수로 정리하면)

$$\begin{aligned} & = \frac{C}{4(1 + i)^2} [4 + 3\delta + 2\delta^2 - 4(1 + \delta + \delta^2)\alpha] i^2 \\ & \quad + \frac{C}{4(1 + i)^2} [[9 + 7\delta + 4\delta^2 - 8(1 + \delta + \delta^2)\alpha]i + 6 + 4\delta + 2\delta^2 - 4(1 + \delta + \delta^2)\alpha] \\ & = \frac{C}{4(1 + i)^2} [[8.669 - 11.436\alpha]i^2 - [19.288 - 22.872\alpha]i + 11.621 - 11.436\alpha] \end{aligned}$$

참 고 문 헌

- Albizzati, Marie-Odile and Helyette Geman, "Interest-Rate Risk Management and Valuation of the Surrender Option in Life-Insurance Policies," *Journal of Risk and Insurance*, 61(4), (1994), 616-637.
- Ambrose, Brent W. and Anthony B. Sanders, "Commercial Mortgage-Backed Securities : Prepayment and Default," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 26(2-3), (2003), 179-196.
- Anderson, Gary A., Joel R. Barber and Chun-Hao Chang, "Prepayment Risk and the Duration of Default-Free Mortgage-Backed Securities," *Journal of Financial Research*, 16(1), (1993), 1-9.
- Archer, Wayne R. and David C. Ling, "The Effect of Alternative Interest Rate Processes on the Value of Mortgage-Backed Securities," *Journal of Housing Research*, 6(2), (1995) 285-314.
- Batlin, Carl A., "Hedging Mortgage-Backed Securities with Treasury Bond Futures," *Journal of Futures Markets*, 7(6), (1987) 675-693.
- Boot, Arnoud W. A, and Anjan V. Thakor, "Security Design," *Journal of Finance*, 48, (1993), 1349-1378.
- Boudoukh Jacob, Matthew Richardson, and Richard Stanton, "Pricing Mortgage-Backed Securities in a Multifactor Interest Rate Environment : A Multivariate Density Estimation Approach," *Review of Financial Studies*, 10(2), (1997), 405-446.
- Brueckner, Jan K., "Borrower Mobility, Adverse Selection, and Mortgage Points," *Journal of Financial Intermediation*, 3, (1994), 416-441.
- Chen, Ren-RAW and T. L. Tyler Yang, "The Relevance of Interest Rate Processes in Pricing Mortgage-Backed Securities," *Journal of Housing Research*, 6(2), (1995), 315-332.
- Chen, Ren-RAW, Brian A. Maris and Tyler T. Yang, "Valuing Fixed-Income Options and Mortgage-Backed Securities with Alternative Term Structure Models," *Journal of Business Finance Accounting*, 26(1), (1999), 33-55.
- Chichilnisky, G., G. M. Heal and D. P. Tsomocos, "Option Values and Endogenous Uncertainty in ESOPs, MBOs, and Asset-Backed Loans," *Economics Letters*,

- 48, (1995), 379-388.
- Childs, Paul D., Steven H. Ott and Timothy J. Riddiough, "The Pricing of Multi-class Commercial Mortgage-Backed Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(4), (1996), 581-603.
- Chinloy, Peter, "Public and Conventional Mortgages and Mortgage-Backed Securities," *Journal of Housing Research*, 6(2), (1995), 173-196.
- Demarzo, Peter, and Darrell Duffie, "A Liquidity-Based Model of Security Design," *Econometrica*, 67(1), (1999), 65-99.
- Deng, Yongheng, "Mortgage Termination-An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14(3), (1997), 309-331.
- Fabozzi, Frank J., *The Handbook of Mortgage-Backed Securities(5th ed.)*, New York : McGraw-Hill, 2001.
- Gallo, Richard J. Buttiner, Jr., Larry J. Lockwood and Ronald C. Rutherford, "Determinants of Performance for Mortgage-Backed Securities Funds," *Real Estate Economics*, 25(4), (1997), 657-681.
- Garmaise Mark, "Rational Beliefs and Security Design," *Review of Financial Studies*, 14(4), (2001), 1183-1213
- Glaeser, Edward L. and Hedi D. Kallal, "Thin Markets, Asymmetric Information, and Mortgage-Backed Securities," *Journal of Financial Intermediation*, 6(1), (1997), 64-86.
- Goodman, Laurie S. and Jeffrey Ho, "Mortgage Hedge Ratios : Which One Works Best?" *Journal of Fixed income*, 7(3), (1997), 23-33.
- Grenadier, Steven R. and Brian J. Hall, "Risk-Based Capital Standards and the Riskiness of Bank Portfolios-Credit and Factor Risks," *Regional Science and Urban Economics*, 26(3-4), (1996), 433-464.
- Kariya, Takeaki and Masski Kobayashi, "Pricing Mortgage-Backed Securities (MBS) : A Model Describing the Burnout Effect," *Asia-Pacific Financial Markets*, 7(2), (2000), 189-204.
- Koutmos, Gregory and Andreas Pericli, "Are Multiple-Hedging Instruments Better Than One? : The Case of Fixed-Rate Mortgage-Backed Securities," *Journal of Portfolio Management*, 26(2), (2000), 63-70.

- Koutmos, Gregory and Andreas Pericli, "Hedging GNMA Mortgage-Backed Securities with T-Note Futures-Dynamic Versus Static Hedging," *Real Estate Economics*, 27(2), (1999), 335-363.
- Liu, Jian-Guo and Engene Xu, "Pricing of Mortgage-backed Securities with Option-Adjusted Spread," *Managerial Finance*, 24(9), (1998), 94-109.
- Lockwood Larry J., Ronal C. Rutherford and Martin J. Herrera, "Wealth Effects of Asset Securitization," *Journal of Banking and Finance*, 20, (1996), 151-164.
- Maxam, Clark L. and Michael Lacour-Little, "Applied Nonparametric Regression Techniques : Estimating Prepayments on Fixed-Rate Mortgage-Backed Securities," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 23(2), (2001), 139-160.
- Mendenhall, William, Dennis D. Wachkerly and Richard L. Scheaffer, *Mathematical Statistics with Application*, Massachusetts : PWS-KENT Publishing Company, 1990.
- Nakamura, Nobuhiro, "Valuation of Mortgage-Backed Securities Based upon a Structural Approach," *Asia-Pacific Financial Markets*, 8, (2001), 259-289.
- Ong, Seow-Eng and Clark L. Maxam, "A Heterogeneous Panel Cointegration-Error Correction approach to Modelling CMBS Security Prices," *Journal of Property Finance*, 8(4), (1997), 317-335.
- Riddiough Timothy J., "Optimal Design and Governance of Asset-Backed Securities," *Journal of Financial Intermediation*, 6, (1997), 121-152.
- Ronn, Ehud I., Peter D. Rubinstein and Fung-Shine Pan, "An Arbitrage-Free Estimate of Prepayment Option Prices in Fixed-Rate GNMA Mortgage-Backed Securities," *Real Estate Economics*, 23(1), (1995), 1-20.
- Shilling, James D., "Rates of Return on Mortgage-Backed Securities and Option-Theoretic Models of Mortgage Pricing," *Journal of Housing Research*, 6(2), (1995), 265-284.
- Stanton, Richard, "Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities," *Review of Financial Studies*, 8(3), (1995), 677-708.
- Stanton, Richard and Nancy Wallace, "Mortgage Choice-What's the Point?" *Real Estate Economics*, 26(2), (1998), 173-205.
- Thomas, Hugh, "Effects of Securitization on Asset Claims," *Journal of Financial Intermediation*, 10, (2001), 306-330.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 22, Number 1, Jun. 2005

Effects of Security Design and Investor Utilities on the Valuation of Mortgage-Backed Securities

Jin Yoo*

〈abstract〉

It is frequently said that mortgage-backed securities (MBS) of different security designs are issued in an attempt to meet the varying needs and expectations of investors. If this is true indeed, MBS of complicated risk-return characteristics are likely to be priced higher than MBS of simple risk-return characteristics are. We test this implication by establishing a recombining binomial interest rate prepayment model with a burnout effect embedded. More specifically, we compare the relative values (utilities) of a pass-through and a PAC-Support collateralized mortgage obligation(CMO), and theoretically show why and how the CMO is more highly valued than is the pass-through. The model is established such that mortgage prepayment is a function of the current value of, and the past path of, the mortgage market rate. Since we work on not the total value of the two MBS but the value of each tranche of either MBS, the test results could be robust to slightly different versions of similar tests, which may be done in the future.

Keywords : Mortgage Loan, Mortgage-Backed Securities (MBS), Refinancing, Prepayment, Burnout, Pass-Through, Collateralized Mortgage Obligations (CMO), Planned Amortization Class (PAC)

* Professor of Finance, College of Management and Economics, Chungnam National University