어떤 정규언어와 Prefix Coding

Mordecai Golin*, 정회원 나 현 숙**

Some Regular Languages and Prefix Coding

Mordecai Golin*, Hyeon-Suk Na** *Regular Member*

요 약

코드는 단어들의 집합이다. 어떤 단어도 다른 것의 Prefix가 아닌 단어들의 집합을 Prefix(-Free) Code라 부르고, 여기서 Prefix Coding이란, 주어진 수 n에 대하여, n개의 단어로 이루어진 Prefix 코드들 중에서 단어길이의 총합이 최소인 최적 Prefix 코드를 찾는 것을 말한다. 이 논문에서는 이의 특수한 경우로서, 특정 정규언어군에 속하는 임의의 정규언어 L에 대하여, L에 속하는 Prefix 코드들 중 최적의 코드를 찾는 방법을 제시한다. 또, 수 n이 변함에 따라 최적 Prefix 코드의 구조가 어떻게 변하는지, 그 성질을 트리구조를 이용해 밝힌다.

Keywords : Coding, Prefix Code, Regular Language, Finite Automata

ABSTRACT

Code is a set of words. If, for any pair of words in the code, one is not prefix of another, the code is called "Prefix(-Free) Code". The prefix coding problem is, given n, to find an optimal code with the minimum-sum of lengths of n words. As a special case of this, we present a method to find, given language L in some specific classes of regular languages, an optimal code among prefix codes in L. We also show how the structure of optimal codes varies as n grows, using trees.

Ⅰ. 서 론

우선 몇 가지 용어를 소개하면서 시작하기로 하자. Σ는 {0,1}이나 {a,b,c}와 같은 2개 이상의 기호로 이루어진 알파벳이다. 코드 $C=\{w_1 \ldots w_n\}$는 이 알파벳의 기호들로 이루어진 단어들의 집합이다. 만일 한 단어 $w=\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_n}$가 다른 단어 $w'=\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\cdots\sigma_{j_m}$의 시작이 되면, 즉, $m \geq n$이면서 모든 $k \leq n$에 대해서 $\sigma_{i_k}=\sigma_{j_k}$이면, w는 w'의 prefix라고 한다. 예를 들어, 01은 010011의 prefix이다. 주어진 코드 C에 대해서, 그것의 구성원인 어떤 단어 w도 다른 단어 w'의 prefix가 아닐 때, 우리는 이 코드 C가 Prefix-Free하다고 하고, Prefix 코드라고 부른다. 주어진 이산 확률 분포 $P_n=\{p_1, \cdots, p_n\}$ $(0 \leq p_i \leq 1, \Sigma_{i=1}^{n} p_i = 1)$와 n개의 원소를 갖는 코드 C_n에 대해서, $cost(C_n, P_n) = \Sigma_{i=1}^{n} p_i |w_i|$로 정의된다. 즉, $cost(C_n, P_n)$는 코드 C_n의 단어들의 확률분포 P_n에 따른 평균 길이로 정의된다. 주어진 확률분포 P_n에 대해서, $cost(C_n, P_n)$을 최소화하는 Prefix 코드를 찾는 것은 흔히 Prefix coding 문제라고 불린다[1]. 특히, 확률분포 P_n이 균일할 때, 즉 $\forall i, p_i = 1/n$일 때에는 $\Sigma_{i=1}^{n} |w_i|$ 가 최소인 코드가 최적의 코드가 되며,

* Dept. Computer Science, HKUST (golin@cs.ust.hk), ** 숭실대학교 정보과학대학 컴퓨터학부 (hsnaa@computing.ssu.ac.kr)
논문번호: KICS 2004-08-166, 접수일자: 2004년 8월 26일
※ 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 이루어졌음.

이 논문에서 우리는 이 경우만을 고려할 것이다. 이제 확률분포 P_n이 균일한 분포로 고정되었으므로, 앞으로 $cost(C_n, P_n)$을 단순하게 $cost(C_n)$로 표기하기로 한다. 이 논문에서 우리가 다루는 문제는 다음과 같다.

> 문제1: 주어진 n과 $\Gamma \subseteq \Sigma^*$에 대하여, $C_n \subseteq \Gamma$이면서 $cost(C_n)$을 최소화하는 prefix 코드 C_n을 찾아라.

예를 들어, $\Gamma = (0+1)^*1$ 일 때, 모든 prefix 코드 $C_n \subseteq \Gamma$ 중에서 $cost(C_n)$을 최소화하는 코드 C_n을 찾는 것이 이 논문에서 다루는 문제이다. 특히, 이 문제는 자기 동기화 (self-synchronizing) 코드의 디자인에 응용될 수 있기 때문에 이미 많은 연구자들의 관심을 받아왔다[2,3,4]. 우리는 이 문제를, 임의의 패턴 Ξ로 끝나는 단어들에 대해서 최적의 prefix 코드를 찾는 문제, 즉,

$C_n = \{w_i : w_i \in \Sigma^*\Xi\}$일 때, $cost(C_n)$을 최소화하는 Prefix 코드를 찾는 문제로 일반화시켜 풀 뿐만 아니라, 더 넓은 범위의 언어-특정한 종류의 DFA(Deterministic Finite Automata)에 의해서 받아들여지는 정규언어들(Regular languages), II.2절-에 대해서도 풀 것이다. 우리의 조건을 만족하는 정규언어 Γ에 대해서 최적 Prefix 코드 C_n은 Γ를 받아들이는 DFA M_Γ에 관련된 특정한 상수-뒤에서 정의될 h_{M_Γ}-에만 의존함이 보여질 것이다. 따라서, 정규언어 Γ와 그것의 DFA M_Γ가 주어지면, 이 오토마타에 의존하는 상수 h_{M_Γ}을 계산할 수 있고, 이 상수를 이용해 최적의 prefix 코드 C_n의 구조를 알 수 있는 것이다.

앞으로 II장에서는 우리가 관심있는 정규언어군과 그것의 DFA, 각 DFA에 대응되는 무한트리에 대해 소개하고, Prefix coding 문제를 최소 외부경로길이 (minimum external path length)를 갖는 트리를 찾는 문제로 전환시킨다. III장에서는 필요한 정의와 도구들에 대해서 소개한 뒤, 우리의 주요 결과와 그 증명을 제시한다.

Ⅱ. DFA, 정규언어, 그리고 무한 트리

2.1 DFA와 정규언어

DFA M은 5개의 원소를 갖는 순서쌍$(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$로 정의되는데[5], 여기서 Q는 State들의 유한집합, $q_0 \in Q$는 Start state, $F \subseteq Q$는 Accepting state들의 집합, Σ는 알파벳, 그리고 $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$는 Transition 함수이다. M은 하나의 Start state q_0와 Accepting state들을 포함한 State들을 노드로 가지면서 각 노드로부터 정확히 $|\Sigma|$개의 간선들-각 간선이 하나의 알파벳 기호에 대응-이 나가는 Directed graph로 표현되기도 한다. 하나의 단어 $w \in \Sigma^*$가 입력되면, Start state q_0로부터 시작하여 한번에 하나의 알파벳씩 w로부터 읽어 들이면서 이에 상응하는 간선을 따라 새로운 State로 옮겨간다. w의 마지막 알파벳을 읽어 들인 후 M이 Accepting state에 있게 되면, 단어 w는 DFA M에 의해 받아들여진다고 말한다. DFA M에 의해 받아들여지는 단어 w의 집합을 $L(M)$이라고 하고, 이렇듯 적당한 DFA에 의해 받아들여지는 언어들을 정규언어라고 부른다.

2.2 어떤 정규언어군과 그것의 DFA

그러면 이제 본격적으로 우리가 관심있는 언어군과 그것의 DFA에 대해 살펴보기로 하자.

> **L1군:** 임의의 패턴 $\Xi \in \Sigma^*$에 대해서, 이 패턴으로 끝나는 단어들의 집합, 즉 $L = \Sigma^*\Xi$
> **L2군:** 임의의 패턴 $\Xi \in \Sigma^*$에 대해서, 이 패턴을 포함하는 단어들의 집합, 즉 $L = \Sigma^*\Xi\Sigma^*$
> **L3군:** 주어진 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}$와 $(r_1, r_2, \cdots, r_k)$, r_i는 음이 아닌 정수들, 에 대하여 $L = (\sigma_1^{r_1} + \sigma^{r_2} + \cdots + \sigma_k^{r_k})^*$

그림1(a)와 그림2(a)는 L1군에 포함되는 언어들에 대응하는 DFA로서, '01'로 끝나는 단어를 받아들이는 DFA M_1과 'abca'로 끝나는 단어를 받아들이는 DFA M_2이다. L2군에 포함되는 언어의 DFA는 모두 L1군의 DFA로부터 얻어질 수 있으므로 (L1군의 DFA의 Accepting state에서 나가는 모든 간선을 자신을 향하도록 함) 별도의 예는 생략한다. 그림3(a)은 L3군에 속하는 언어 $(0^2+1^3)^*$의 DFA이다. L3군은 흔히 Varn Language라고도 불리는데, 알파벳 기호들 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$들이 서로 다른 길이 혹은 비용

을 요구할 때, 이 알파벳을 이용한 Prefix Coding 문제, 즉 Varn Coding 문제[6,7,8,9,10]는 바로 L3군 혹은 Varn Language을 이용한 문제로 해석될 수 있음에 주목할 필요가 있다. 이상의 예들에서 알 수 있듯이, L1군, L2군, L3군들 모두 "하나의 Accepting state"를 갖는 DFA에 의해 받아들여지는 정규언어들이다.

2.3 트리문제로의 변환

알파벳 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}$, DFA M, 그리고 정규언어 $L = L(M)$을 가정하자. 또한, 다음과 같은 무한 k-ary 트리를 T_M이라 하자; 루트는 빈 문자열(empty string)에 대응되고, 모든 노드는 정확히 $|\Sigma|$개의 밖으로 나가는 간선들-각각 알파벳의 기호 $\sigma_i \in \Sigma$에 대응-을 갖고, 각 노드는 루트로부터 이 노드에 도달하기까지 거친 경로(path)에 의해 형성된 단어에 대응된다. 그러면, T_M의 노드와 Σ^*의 단어사이엔 일대일 대응관계가 성립하며, 각 노드는 그것에 대응하는 단어를 읽은 뒤 DFA M이 위치한 State를 라벨로 갖는다. Σ^*의 임의의 단어 w에 대응하는 T_M의 노드를 u라 하자. w가 언어 L에 포함되는 것은 노드 u의 State가 Accepting state인 것과 동치이다. 그림1(b), 그림2(b), 그림3(b)는 모두 T_M의 노드들에 그것의 라벨, 즉 그것의 State를 표시해 놓은 것이다. 주목해야 할 것은, II.2절에서 정의한 정규언어군들은 모두 하나의 Accepting state를 갖는 DFA를 가지므로, 주어진 T_M에서 Accepting state를 루트로 해서 뻗어 나오는 부분트리들은 모두 같은 구조를 갖는다는 것이다. $depth(u)$는 루트로부터 u까지의 경로의 길이를 말하며, 따라서 $depth(u) = |w|$를 만족한다. 마지막으로, 우리는 정의1에서 T_M의 노드를 DFA M에 의해 받아들여지는지 여부에 따라 "참노드"와 "거짓노드"로 나누고, T_M의 임의의 부분트리 T'에 대해서 그것의 외부경로길이(external path length) 또는 $cost(T')$을 정의한다.

> 정의1: M은 주어진 DFA이고, T_M는 M의 무한 k-ary 트리이다. T_M상의 임의의 노드 u에 대하여, u의 State가 Accepting state이면 "참노드", 그렇지 않으면 "거짓노드"라 부른다. 주어진 유한트리 T에서 참노드가 Leaf이면 "참leaf", 내부노드이면 "참내부노드"라고 부르고, "외부경로길이" 혹은 "$cost(T)$"란 T의 참leaf들의 Depth의 합을 말한다.

단어 w, w'에 대응하는 노드를 각각 u, u'이라 할 때, 단어 w'이 단어 w의 Prefix인 것은, 노드 u'이 루트로부터 노드 u에 이르는 경로위에 있는 것과 동치이다. 그러므로, 어떤 트리 $T' \subseteq T_M$의 참leaf들의 집합은 $C \subseteq L(M)$인 Prefix 코드 C에 대응된다. 또, $cost(T') = cost(C)$를 만족한다. 역으로, 주어진 Prefix 코드

$C_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \subseteq L(M)$에 대해서, 이들을 참leaf로 갖는 트리 $T' \subseteq T_M$는 적어도 하나 존재하며, $cost(C_n) = cost(T')$을 만족한다. 따라서, 앞장의 문제1-Prefix coding 문제-은 아래의 문제2-최적트리문제-로 변환된다.

> 문제2: 주어진 n과 DFA M에 대해서, n개의 참leaf를 갖는 트리 $T' \subseteq T_M$ 중에서 최소의 외부경로길이 혹은 $cost(T')$을 갖는 트리 $T' := T_n$을 찾아라.

그림4는 그림1의 DFA M_1와 T_{M_1}에 대해, 각각 5개의 참leaf를 갖는 두 부분트리 $T', T'' \subseteq T_{M_1}$의 Cost들과 대응하는 Prefix 코드들을 비교한 것이다. 그림5는 DFA M_1에 대해 외부경로길이 혹은 Cost를 최소화하는 최적트리들을 T_{12}부터 T_{40}까지를 나열해 본 것이다. 이 최적트리열을 유심히 살펴보면 (특히 T_{21}에서 T_{22}로, T_{23}에서 T_{24}로 옮겨가는 과정), 이미 알고 있는 T_{n-1}로부터 T_n을 구하기 위해서는, 탐욕적인 방법- 아직 쓰이지 않은 참노드 중에서 가장 Depth가 작은 노드를 선택하여 leaf로 보태는 방법- 외에도, 참leaf 중에서 Depth가 가장 큰 것들을 제거하고, Depth가 가장 작은 참leaf를 내부노드(internal node)로 만들고 그것의 참자식들을 leaf로서 보태는 방법도 있다는 것과, 언제 탐욕적인 방법을 써야하고 언제 비탐욕적인 방법을 써

> 정의2: u와 v는 T_M의 참노드라 하자. v가 u의 조상이면서 u와 v사이에 다른 참노드가 없으면, v는 u의 참부모, u는 v의 참자식이라 하자. u의 조상이면서 참노드가 없는 경우에는, 루트를 u의 참부모로 하자.

야하는지 무언가 규칙이 숨겨져 있다는 것을 알 수 있다. 이 숨은 규칙을 밝히는 게 이 논문의 주요결과이며, 다음 장에서 소개한다.

그림4(a)의 트리 T'을 보자. T'은 모두 7개의 참노드를 갖고 있는데, 그 중 S_1과 S_3는 참내부노드, S_2, S_4, S_5, S_6, S_7는 참leaf이다. 노드 S_1과 S_3, S_3와 S_7간에, 참부모-참자식 관계가 성립한다. 그러나, S_1과 S_7사이에는 참부모-참자식 관계가 성립하지 않는데, 이들 사이에 참노드 S_3이 있기 때문이다.

Ⅲ. 주요한 결과

이제부터 L은 II.2절에서 정의한 정규언어군-L1, L2, L3군-에 속하는 임의의 정규언어를 가르키고, M은 그것을 받아들이는 DFA를 가르킨다.

3.1 몇가지 정의들

정의3: v를 T_M의 임의의 참노드라 하자. v의 참자식들을 그것의 Depth가 작은 것부터 순서대로 $c_1, c_2, c_3, ..$와 같이 놓고, 자연수 $l_i := depth(c_i) - depth(v)$라 하자 (2.2절의 정규언어군의 참노드는 항상 적어도 두 개 이상의 참자식을 가진다). 또 $\forall i \geq 2,\ x_i := \dfrac{l_1 + l_2 + \cdots + l_i}{i-1}$ 라 하자.

방금 정의한 x_i에 대해서 우리는 다음의 성질을 이끌어 낼 수 있다.

정리1: $x_2 > x_3 > \cdots > x_d \leq x_{d+1} \leq \cdots$ 를 만족하는 상수 d는 언제나 존재한다. ($x_2 \leq x_3$일때, $d = 2$)

정의4: 정리1에서 정의한 d와 x_d에 대해서, x_d를 넘지 않는 최대의 정수를 h_M라 하고, 1과 $d-1$ 사이의 정수 $\lambda_M := (d-1)(h_M+1) - (l_1 + \cdots + l_d) = (d-1)(h_M + 1 - x_d)$ 라 놓자.

그림1-그림3에서 보여진 DFA에 대한 l_i들과 d, h_M, λ_M은 다음과 같다.

$M_1 : x_2 > x_3 = (2+3+3)/2 = 4 = (2+3+3+4)/3 = x_4;$
$d = 3; h_{M_1} = 4; \lambda_{M_1} = 2$

$M_2 : x_2 = 2+3 = 5; d = 2; h_{M_2} = 5; \lambda_{M_2} = 1$

$M_3 : x_2 > \cdots > x_5 = (3+4+5+5+5)/4 = 5.5 < x_6;$
$d = 5; h_{M_3} = 5; \lambda_{M_3} = 2$

정의5: 주어진 DFA M과 트리 T_M이 있다. T_M의 루트는 참노드로 간주한다. V_t는 $depth(u) \leq t$인 참노드 u들의 집합이고, W_m은 T_M의 참노드들을 위에서부터, 즉 Depth가 작은것부터 나열했을 때, m번째 참노드까지의 집합이다. 주어진 참노드의 집합 V에 대해서, $gl(V)$는 참부모가 V에 속하나 자신은 V에 속하지 않는 참노드들의 집합이고, $gl_k(V)$는 $gl(V)$의 참노드들을 Depth가 작은것부터 나열했을 때, k번째 참노드까지의 집합이다.

3.2 결과

이 절에서는 우리의 결과를 설명한다. 이를 위해서는 III.1에서 정의한 개념들 외에도 정리6에서 정의될 두 개의 수열 $\{L_m\}, \{R_m\}$의 도움이 필요하다. 우리의 결과는 정리2와 정리3의 내용이다.

정의 6: 주어진 수 m에 대하여, v_m은 T_M의 m번째 참노드라 할 때, 두 수 L_m과 R_m은 다음과 같이 정의된다.

* x_d가 정수, 즉 $x_d = h_M$인 경우:

$L_m := |\{u \in gl(W_m) : depth(u) \leq depth(v_m)$

$R_m := |\{u \in gl(W_m) : depth(u) \leq depth(v_{m+}$
$+ d - 2$

* x_d가 정수가 아닌 경우, 즉 $x_d > h_M$:

$L_m := |\{u \in gl(W_m) : depth(u) \leq depth(v_m)$
$- \lambda_M$

$R_m := |\{u \in gl(W_m) : depth(u) \leq depth(v_{m+}$
$+ d - 2 - \lambda_M$

정리2: 모든 자연수 m에 대하여, $L_m < R_m + 1 = L_{m+1}$ 을 만족한다.

정리2에 의하면, L_1보다 큰 임의의 수 n에 대해서, $n \in [L_m, R_m]$인 구간 혹은 숫자 m이 유일하

게, 언제나 존재한다. 뿐만 아니라, 상수 h_M이나 λ_M, 그리고 정의6의 두 수 L_m, R_m은 오직 DFA M에만 의존하는 수들이다. 따라서, 주어진 DFA M에 대해서, 우리는 구간들 $\{[L_m, R_m]\}$을 계산할 수 있다. 일례로, 그림1에 제시된 DFA M_1에 대해, $L_1 = 12, R_1 = 21, L_2 = 22, R_2 = 23, L_3 = 24, R_3 = 40$ 임을 그림5를 통해 확인해 볼 수 있다. 이와 같이, 구간 $[L_m, R_m]$과 구간 $[L_{m+1}, R_{m+1}]$은 서로 겹치지 않으며 연달아 있다. 따라서, L_1보다 큰 임의의 수 n에 대해서, $n \in [L_m, R_m]$인 구간 혹은 숫자 m이 유일하게, 언제나 존재한다. 위의 예에서 $n = 30$에 대해서, $30 \in [L_3, R_3]$이므로, $m = 3$이 된다. 그러면, 이제 정리3을 살펴보자.

> 정리3: $L_m \le n \le R_m$인 모든 n에 대하여, 트리 $T_n^m := W_m \cup gl_n(W_m)$은 n개의 참leaf를 갖는 트리 중 최소 외부경로길이 혹은 최소 Cost를 갖는다.

결국, 정리2와 정리3에 의하면, 주어진 DFA M과 자연수 n에 대해서, 우리는 문제2에서 정의한 최적트리-n개의 참leaf를 갖는 T_M의 부분트리 중 최소 외부경로길이 혹은 최소 Cost를 갖는 트리-를 찾을 수 있다. 우선, (i) 모든 m에 대해 L_m과 R_m을 계산한 후, (ii) 주어진 n에 대해서 $n \in [L_m, R_m]$을 만족하는 m을 찾는다. 그러면, W_m을 참내부노드 집합으로 하고, 이로부터 뻗어 나온 최상위 n개의 참leaf들을 갖는 트리가 바로 최적트리인 것이다. 앞의 예를 따르면, 주어진 DFA M_1과 임의의 숫자 n에 대해서, 우리는 n개의 참leaf를 갖는 부분트리 중 최소 외부경로길이 혹은 Cost를 갖는 트리를 찾으려 한다. 그러면, (i) 주어진 DFA M_1으로부터 구간들의 열 $\{[L_m, R_m]\}$을 구한 다음, (ii) 수 n에 대해서 $n \in [L_m, R_m]$을 만족하는 m을 찾는다. 예를 들어, $n = 30$에 대해서, $m = 3$을 구한다. 그러면, W_3을 참내부노드 집합으로 하고, 이로부터 뻗어 나온 최상위 30개의 참leaf들을 갖는 트리가 바로 30개의 참leaf를 갖는 트리중의 최적트리인 것이고, 이는 문제1-Prefix coding 문제-로 해석해 보면, 패턴 '01'로 끝나는 30개의 단어로 이루어진 Prefix 코드 중에서 단어길이의 합이 가장 작은 코드를 얻게 된 것이다.

3.3 정리2와 정리3의 증명

정리2와 정리3의 엄밀한 증명은 매우 복잡하고 길다. 특히, L_m과 R_m의 정의 자체가 DFA M에 의해 결정되는 상수-x_d-가 정수인가 아닌가에 따라 두 경우로 나뉘어 있기 때문에, 증명의 본질적인 아이디어는 같음에도 불구하고 두 경우로 나뉘어 증명되어야 한다. 따라서, 여기에서는 'x_d가 정수인 경우', 즉 $x_d = h_M$인 경우에 대해서만 증명하기로 하자.

3.3.1 필요한 보조정리들

이제부터 T는 언제나 n개의 참leaf를 갖는 최적트리 (n개의 참leaf를 갖는 트리들 중 최소 외부경로길이를 갖는 것)이고, W_T는 T의 참내부노드들의 집합, $\kappa_T := \max_{\{v \in W_T\}} depth(v)$ 라 하자. 또, n개의 참leaf를 갖는 최적트리들의 참내부노드 개수의 최대값을 $f_M(n)$이라 하자. 즉,
$f_M(n) := \max\{|W_T| : T$는 n개의 참leaf를 가진 최적트리$\}$이다. 보조정리1은 d와 h_M의 정의로부터, 보조정리2는 T가 최적트리라는 사실로부터 쉽게 유추될 수 있다.

> 보조정리1: (i) $l_d < x_d \le l_{d+1}$ 이다.
> (ii) v는 T_M의 임의의 참노드이고, c_i는 v의 i번째 참자식이라 하자. 그러면,
> $depth(c_d) \le depth(v) + h_M - 1$ 이고,
> $depth(c_{d+1}) \ge depth(v) + h_M$ 을 만족한다.

> 보조정리2: u와 v는 $depth(u) < depth(v)$를 만족하는 T_M의 임의의 참노드이다. 최적트리 T는 항상 다음을 만족한다.
> (i) $v \in W_T$이면, $u \in W_T$
> (ii) $u, v \in gl(W_T)$이고 $v \in T$이면, $u \in T$

이제 좀더 복잡한 보조정리들을 소개할까 한다. 먼저 소개된 보조정리1과 보조정리2는 정리2와 정리3의 증명에 요긴하게 쓰이고, 앞으로 소개될 두 보조정리도 정리3의 증명에 필수적이다.

> 보조정리3: 최적트리 T는 항상 $depth(u) \le \kappa_T + h_M - 1$인 $u \in gl(W_T)$를 포함해야 한다.

보조정리4: T는 n개의 참leaf와 $f_M(n)$개의 참내부노드를 가진 최적트리이다. v는 T의 참leaf 중 가장 Depth가 작은 것이다. 그러면, $|\{u \in gl(W_T) \cap T: depth(u) \geq depth(v)+h_M\}| \leq d-2$.

3.3.2 정리2의 증명

$L_m < R_m + 1$은 L_m과 R_m의 정의를 보면 자명하다. 그러므로, $R_m + 1 = L_{m+1}$만을 증명하면 된다. 정의에 의하면, L_{m+1}은 참부모가 W_{m+1} (T_M에서 위로부터 $m+1$번째 참노드까지 모은 집합)에 속하면서, Depth가 $depth(v_{m+1}) + h_M - 1$ 이하인 참노드들의 개수이다. 그러면, 이 집합은, 참부모가 v_{m+1}인 노드들과 참부모가 W_m에 속하는 것들로 나뉜다. 보조정리1에 의하면, 전자의 개수는 d이다. 반면에, 후자는

$$\{u \in gl(W_m) : depth(u) \leq depth(v_{m+1}) + h_M - 1, u \neq v_{m+1}\}$$

이어서 그 개수가 $(R_m - (d-2) - 1)$이다. 따라서, 우리는 $L_{m+1} = d + (R_m - d + 1) = R_m + 1$을 얻는다.

3.3.3 정리3의 증명

주어진 수 n에 대해, m은 $L_m \leq n \leq R_m$을 만족하는 수라 하자. $f_M(n)$의 정의에 의해서, n개의 참leaf와 $f_M(n)$개의 참내부노드를 갖는 최적트리는 존재한다. 그리고, 보조정리2에 의해 이 최적트리는 $T_n^{f_M(n)}$이어야 함을 알 수 있다. 즉, $T_n^{f_M(n)}$은 n개의 참leaf를 갖는 최적트리이다. 반면, 우리의 목적은 T_n^m이 n개의 참leaf를 갖는 최적트리임을 보이는 것이다. 우리는, m이 아닌 어떠한 γ에 대해서도 T_n^γ가 $T_n^{f_M(n)}$일 수 없음을 보임으로써, $T_n^m = T_n^{f_M(n)}$이고 따라서 최적트리라는 것을 보일 것이다. $\gamma \leq m-1$인 경우와 $\gamma \geq m+1$인 경우로 나누어서 증명한다.

* $\gamma \leq m-1$인 경우: 이 경우, 우리는 T_n^γ가 $depth(u) \geq depth(v_{\gamma+1}) + h_M$인 참leaf u를 $d-1$개 이상 갖는다는 것을 보인다. T_n^γ에서 $v_{\gamma+1}$은 Depth가 가장 작은 참leaf이므로, 보조정리4에 의하여, T_n^γ은 $T_n^{f_M(n)}$과 같을 수 없음이 증명된다. 먼저 $\gamma = m-1$인 경우를 보자. T_n^{m-1}은 T_n^m에서 참내부노드 v_m를 참자식들을 모두 떼어내 참leaf로 변화시키고, 잃은 만큼의 참leaf를 $gl(W_{m-1}) - gl_n(W_m)$에서 가져다 붙인 것이다 (그림 6). 우리는 이때, (i) 떼어낸 v_m의 참자식들이 적어도 d개, 따라서 $gl(W_{m-1}) - gl_n(W_m)$에서 가져다 붙여야 하는 참leaf가 v_m을 제외하고 적어도 $d-1$개인 것과, (ii) 이들 모두 Depth가 적어도 $depth(v_m) + h_M$임을 보인다. 그러면, T_n^{m-1}는 $depth(u) \geq depth(v_m) + h_M$인 참leaf u를 $d-1$개 이상 갖게 되어 $\gamma = m-1$에 대한 증명이 끝난다. n은 L_m과 R_m사이의 수이므로, 정의6으로부터 $gl_n(W_m)$은 W_m의 참자식이면서 Depth가 $depth(v_m) + h_M - 1$ 이하인 모든 참노드를 갖고 있음을 알 수 있다. 고로, v_m의 참자식 중 Depth가 $depth(v_m) + h_M - 1$ 이하인 모든 참노드가 이에 포함되므로, 보조정리1에 의하여, 이들의 수는 적어도 d인 것을 알 수 있어 (i)이 증명된다. (ii)를 증명하기 위해, $gl(W_{m-1}) - gl_n(W_m)$을 살펴보자. 참부모가 W_{m-1}에 포함되는 참노드는 v_m을 제외하고 모두 $gl(W_m)$에 포함된다. 만일 그것의 Depth가 $depth(v_m) + h_M - 1$이었다면, 앞에서 살펴본 바와 같이 $gl_n(W_m)$에 포함되었을 것이므로, $gl(W_{m-1}) - gl_n(W_m)$에 포함되어 있는 참노드는 모두 Depth가 적어도 $depth(v_m) + h_M$이다. 고로 (ii)가 증명되었다. 이와 같은 방법으로, $\gamma \leq m-2$인 모든 경우에 대해 단계적으로 참내부노드 $v_{\gamma+1}$을 참leaf로 바꾸고, 대신 $gl(W_\gamma) - gl_n(W_{\gamma+1})$로부터 참노드를 가져다 붙이는 식으로 T_n^γ을 만들 수 있는데, 참leaf의 개수는 n으로 일정해야 하는 반면, 이를 만들 수 있는 참부모의 개수는 갈수록 줄어드므로, 지워지는 $v_{\gamma+1}$의 참자식 수는 d 이상으로 계속 늘어나고, 대신 붙여지는 참노드의 depth는 갈수록 $depth(v_{\gamma+1}) + h_M$보다 커진다. 고로, T_n^γ가 $depth(u) \geq depth(v_{\gamma+1}) + h_M$인 참leaf u를 $d-1$개 이상 가질 수밖에 없음이 더욱 자명해진다.

* $\gamma \geq m+1$인 경우: 이 경우, 우리는 $depth(u) \leq depth(v_\gamma) + h_M - 1$이고, $gl(W_\gamma)$에 포함되면서 $gl_n(W_\gamma)$에 포함되지 못한 참노드 u가 있음을 보일

것이다. 그러면, T_n^{γ}에서 $depth(v_{\gamma}) = k_{T_n^{\gamma}}$를 만족하므로, 보조정리3에 의하여, T_n^{γ}은 최적트리일 수 없음이 증명된다. 먼저 $\gamma = m+1$인 경우를 보자. T_n^{m+1}은 T_n^m에서 참leaf v_{m+1}을 참자식들을 붙여 참내부노드로 변화시키고, 붙인 만큼의 참leaf를 $gl_n(W_m)$에서 제거한 것이다 (그림6). 한편, n이 L_m과 R_m사이의 수이므로, 정의6으로부터 $gl_n(W_m)$은 W_m의 참자식이면서 Depth가 $depth(v_{m+1}) + h_M$ 이상인 참leaf를 기껏해야 $d-2$개 갖고 있음을 알 수 있다. 따라서, 우리가 붙여야하는 v_{m+1}의 참자식들이 적어도 d개, 따라서 $gl_n(W_m)$에서 제거해야 하는 참leaf가 v_{m+1}을 제외하고 적어도 $d-1$개임을 보이면, Depth가 $depth(v_{m+1}) + h_M - 1$ 이하이고, $gl(W_{m+1})$에 포함되면서 $gl_n(W_{m+1})$에 포함되지 못한 참노드 u가 있음을 보여 증명을 끝낸 셈이 된다. 그러면, T_n^m으로부터 T_n^{m+1}으로 가기 위해 v_{m+1}에 붙여야하는 v_{m+1}의 참자식들이 적어도 d개임을 보이자. 우선 Depth가 $depth(v_{m+1}) + h_M - 1$ 이하의 참자식들은 모두 붙여야 한다. 그렇지 않으면, 붙여지지 않은 이 노드 자체가 위의 노드 u의 조건을 다 만족하여 증명이 끝난다. 그러면, v_{m+1}의 참자식이면서 Depth가 $depth(v_{m+1}) + h_M - 1$ 이하인 참노드는 모두 몇 개인가. 보조정리1에 의해 이는 d개이다. 고로, $\gamma = m+1$인 경우에 대해 증명이 끝났다. 동일한 방법으로, $\gamma \geq m+2$인 모든 경우에 대해 단계적으로 참leaf v_{γ}을 참내부노드로 바꾸고, 대신 붙인 만큼의 참leaf를 $gl_n(W_{\gamma-1})$에서 제거한다. 참leaf의 개수는 n으로 일정해야 하는 반면, 이를 만들 수 있는 참부모의 개수는 갈수록 늘어나므로, 제거되는 $gl_n(W_{\gamma-1})$의 참leaf의 Depth는 갈수록 $depth(v_{\gamma}) + h_M - 1$보다 작아진다는 것을 알 수 있다. 고로, $depth(u) \leq depth(v_{\gamma}) + h_M - 1$이고 $gl(W_{\gamma})$에 포함되면서, $gl_n(W_{\gamma})$에 포함되지 못한 참노드 u가 있을 수밖에 없음은 더욱 자명해진다.

Ⅳ. 결 론

이상으로 우리는, II.2절에서 소개된 정규언어군에 속하는 임의의 정규언어 L에 대해서, 그 안의 최적 Prefix 코드 $C_n \subseteq L$을 찾는 방법을 보였다. 이는, L에 대응하는 DFA M과 자연수 n에 대해서, 문제2에서 정의한 최적트리-n개의 참leaf를 갖는 T_M의 부분트리 중 최소 외부경로길이 혹은 최소 Cost를 갖는 트리-를 찾음에 의해서였다. (i) 모든 m에 대해 L_m과 R_m을 계산한 후, (ii) 주어진 n에 대해서 $n \in [L_m, R_m]$을 만족하는 m을 찾는다. 그러면, W_m을 참내부노드 집합으로 하고, 이로부터 뻗어나온 최상위 n개의 참leaf들을 갖는 트리가 최적트리이고, 이 트리의 참leaf들에 대응하는 단어들의 집합이 바로 우리가 찾는 최적 Prefix 코드 $C_n \subseteq L$이다. 관련된 주제로서 앞으로 연구해 볼 만한 흥미로운 문제는, II.2절에서 소개한 정규언어군 외에도 좀더 일반적인 정규언어군에 대해 최적 Prefix 코드를 찾는 방법은 무엇인가이다.

참 고 문 헌

〔1〕 정욱현, 윤영석, 호요성. "Huffman 부호와 평균 부호길이 함수의 특성을 이용한 양방향 가변길이 부호의 생성 방법", *Proceedings of the IEEK Conference 2003,* p.137-140, 2003.

〔2〕 T. Berger, R. W. Yeung. "Optimum "1"-ended Binary Prefix Codes", *IEEE Transactions on Information Theory 36(3),* p. 1435-1441, 1990.

〔3〕 R. M. Capocelli, A. De Santis, G. Persiano. "Binary Prefix Codes Ending in a "1"", *IEEE Transactions on Information Theory,* 40(1), p. 1296-1301, 1994.

〔4〕 Chan Sze-Lok, M. Golin. "A Dynamic Programming Algorithm for Constructing Optimal "1"-ended Binary Prefix-Free Codes", *IEEE Transactions on Information Theory,* 46(4), p. 1637-1644, 2000.

〔5〕 T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms,* MIT Press, 1990.

〔6〕 V. S. Choi, M. J. Golin. "Lopsided Trees I: Analyses", *Algorithmica,* 31, p.240-290, 2001.

〔7〕 S. Kapoor, E. Reingold. "Optimum Losided Binary Trees", *Journal of the Association for Computing Machinery,* 36(3), p.573-590. 1989.

〔8〕 S. A. Savari. "Some Notes on Varn Coding", *IEEE Transactions on Information Theory,* 40(1), p. 181-186, 1994.

〔9〕 S. A. Savari. "A Probabilistic Approach to Some

Asymptotics in Noiseless Communications", *IEEE Transactions on Information Theory,* 46(4), p. 1246-1262, 2000.

〔10〕 B. F. Varn. "Optimal Variable Length Codes (Arbitrary Symbol Costs and Equal Code Word Probabilities)", *Informat. Contr.* 19, p. 289-301, 1971.

〈부록-그림〉

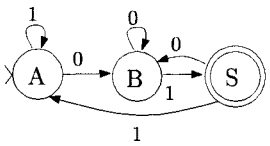
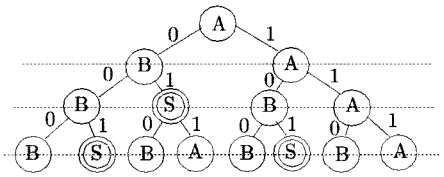


그림 1. (a) '01'로 끝나는 단어를 받아들이는 DFA M_1



(b) DFA M_1의 무한트리 T_{M_1}; State S를 갖고 있는 노드들이 참노드이다.

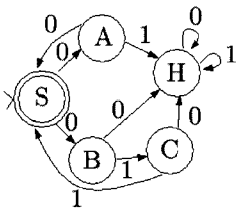
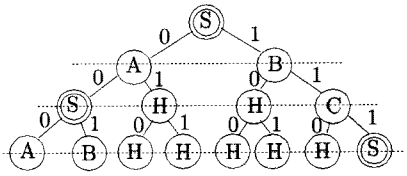


그림 2. (a) $(00+111)^*$를 받아들이는 DFA M_2



(b) DFA M_2의 무한트리 T_{M_2}; State S를 갖고 있는 노드들이 참노드, H는 참자식을 갖지 않는다.

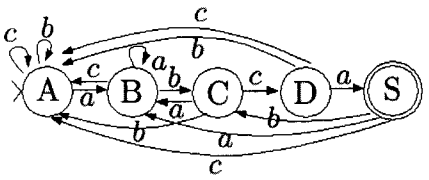
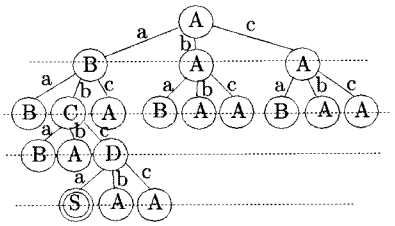


그림 3. (a) 'abca'로 끝나는 단어를 받아들이는 DFA M_3



(b) DFA M_3의 무한트리 T_{M_3}; State S를 갖고 있는 노드들이 참노드이다.

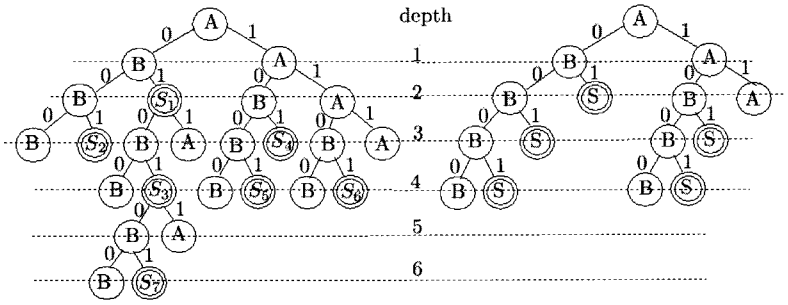


그림 4. 5개의 참leaf를 갖는 두 부분트리 $T', T'' \subseteq T_{M_1}$;
$cost(T') = 3+3+4+4+6 = 20$이고
$cost(T'') = 2+3+3+4+4 = 16$이다.
T'에 대응하는 코드는 {001,101,1001,1101,010101}이고,
T''에 대응하는 코드는 {01,001,101,0001,1001}이다.

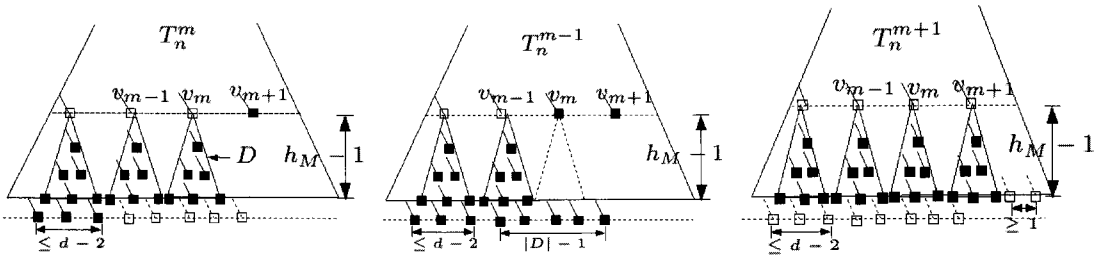


그림 5. 정리3의 증명 과정: $\gamma = m-1$인 경우와 $\gamma = m+1$인 경우, T_n^m으로부터 T_n^{m-1}, T_n^m으로부터 T_n^{m+1}을 만드는 과정을 관찰하라.

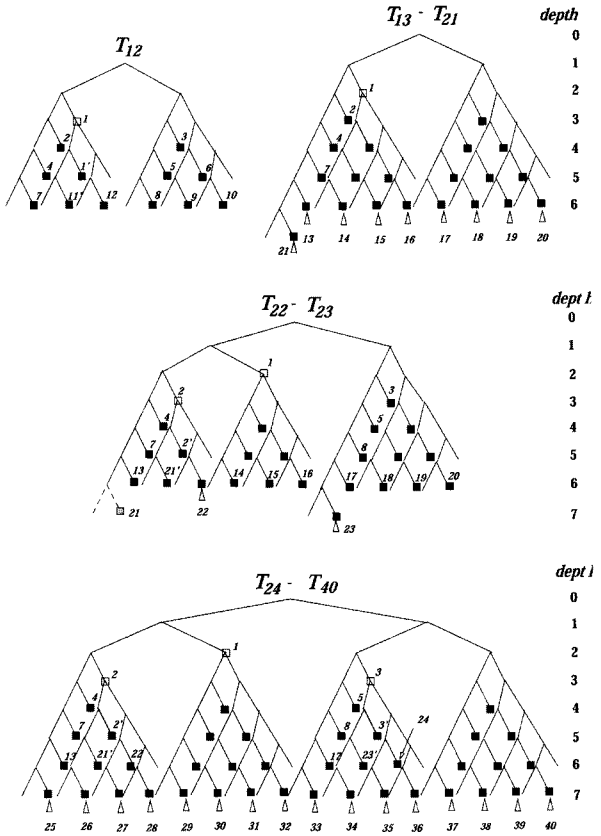


그림 6. 그림1의 DFA M_1 ('01'로 끝나는 단어를 받아들이는 DFA)에 대한 최적 Prefix 트리열 $T_{12} \sim T_{40}$ 과, 그의 Construction 과정.

나 현 숙(Hyeon-Suk Na) 정회원

1993년 2월 서울대학교 수학과 졸업

1995년 2월 포항공대 수학과 석사

2002년 2월 포항공대 수학과 박사