

속도중합역산을 위한 반복적 최소자승법 – Part B: CGG 방법

지 준¹⁾

Iterative Least-Squares Method for Velocity Stack Inversion – Part B: CGG Method

Jun Ji¹⁾

요 약 : 속도중합의 역산을 이용하면 탄성과 자료처리에 있어서 다양한 처리가 가능하므로 이 분야는 최근에 들어 매우 유용한 영역으로 주목을 받고 있다. 하지만 다양한 처리에 적용하기 위해서는 사용되는 역산 방법이 잡음에 강하면서도 고해상도의 속도중합 결과를 만들 수 있어야 한다. 이러한 특성을 갖는 대표적인 역산에는 L_1 -norm을 최소화시키는 IRLS (Iteratively Reweighted Least-Squares) 방법을 주로 사용하였다. 본 논문에서는 이러한 성질을 갖는 또 다른 역산 방법의 하나로서 CGG (Conjugate Guided Gradient) 방법을 소개한다. CGG 방법은 반복적 최소자승법의 하나인 Conjugate Gradient (CG) 방법을 변형시킨 형태로 L_1 -norm을 최소화 시키는 역산법으로 활용할 수 있다. 본 논문에서는 CGG 방법을 소개하고 기존의 IRLS 방법과의 차이점 및 결과들을 비교하였다. 모의자료와 현장자료에 대한 실험결과를 통해서 CGG 방법이 IRLS 방법과 마찬가지로 다양한 잔여/모델 norm을 최소화시키는 역산법으로 사용될 수 있음을 보여준다.

주요어 : CGG, IRLS, 최소자승역산, 속도중합

Abstract : Recently the velocity stack inversion is having many attentions as an useful way to perform various seismic data processing. In order to be used in various seismic data processing, the inversion method used should have properties such as robustness to noise and parsimony of the velocity stack result. The IRLS (Iteratively Reweighted Least-Squares) method that minimizes L_1 -norm is the one used mostly. This paper introduce another method, CGG (Conjugate Guided Gradient) method, which can be used to achieve the same goal as the IRLS method does. The CGG method is a modified CG (Conjugate Gradient) method that minimizes L_1 -norm. This paper explains the CGG method and compares the result of it with the one of IRSL methods. Testing on synthetic and real data demonstrates that CGG method can be used as an inversion method for minimizing various residual/model norms like IRLS methods.

Keywords : CGG, IRLS, least-squares inversion, velocity stack

서 론

속도중합(velocity stack)은 공통 중간점 자료(Common Midpoint (CMP) gather) 영역인 시간과 오프셋 영역에서 속도중합 영역인 시간과 속도영역으로 변환하는 과정으로 공통중간점 중합(CMP stacking) 또는 구조보정(migration)에 필요한 속도를 결정하는데 주로 이용되어 왔다. 최근에 들어서는 이러한 속도중합을 역산을 통해서 계산함으로써 탄성과 자료처리가 가능하게 되었다. 예를 들면, 전통적으로 사용되어오던 속도결정에 있어서의 개선(Thorson and Claerbout, 1985)은 물론이고, 무작위로 나타나는 잡음제거(Guitton and Symes, 2003; Ji, 2004), 일정한 규칙을 보이며 존재하는 그라운드 롤(ground roll) 또는 다중반사파의 제거(Hampson, 1986; Herrmann, 2000; Trad *et al.*, 2003), 소실된 오프셋 자료의 복원(Ji, 1994;

Sacchi and Ulrych, 1995) 등을 주요 응용 분야로 들 수 있다.

이러한 응용분야들의 대부분은 공통 중간점 자료로부터 역산을 통해서 얻어지는 속도중합의 결과가 성긴(parsimonious) 양상을 보이거나, 이 때 사용되는 역산방법이 잡음에 강한(robust) 양상을 보일 때 현실적인 적용이 가능하다고 할 수 있다. 역산에서 일반적으로 많이 사용되는 최소자승(least-squares)법은 이러한 요구조건을 만족하지 못하며, 그 한계성을 극복하기 위하여 고해상도의 속도중합결과를 얻으려는 다양한 방법들을 시도해 왔다. 지금까지는 이러한 특성을 갖는 대표적인 역산으로서 L_1 -norm을 최소화시키는 IRLS (Iteratively Reweighted Least-Squares) (Scales and Gersztenkorn, 1987; Scales *et al.*, 1988) 법이 주로 사용되어왔다. 본 논문에서는 이러한 성질, 즉 잡음에 강하면서도 역산결과가 성긴 구성을 갖는 을 갖는 또 다른 역산 방법의 하나로서 CGG

*2005년 4월 22일 접수

1) 한성대학교 정보시스템공학과(Department of Information System Engineering, Hansung University)
jun@hansung.ac.kr

(Conjugate Guided Gradient) 방법을 소개한다. CGG 방법은 반복적 최소자승법의 하나인 Conjugate Gradient (CG) 방법을 변형시킨 형태로서 L_1 -norm을 최소화시키는 역산법으로 활용 할 수 있다. 또한 CGG 방법과 기존의 IRLS 방법과의 차이점 및 결과들을 비교해본다.

속도중합 (Velocity Stacking) 역산

일반적인 속도중합은 CMP자료에서 반사파에 해당하는 쌍곡선(hyperbola) 모양의 신호를 따라서 더해주거나 유사도(semblance)를 계산(Taner and Koehler, 1969)하여 속도중합결과를 얻게 된다. 이상적인 경우는 CMP 자료에서의 쌍곡선이 속도중합영역에서의 한 점으로 나타나게(mapping) 되는 경우 일 것이나, 실제적으로 쌍곡선을 따라서 더하는 방법은 자료에 존재하는 다양한 잡음과 제한된 aperture에 기인한 정보의 부족 때문에 이상적인 결과를 가져오지 못한다. 보다 높은 해상도를 가진 속도중합결과를 얻기 위해서는 역산을 통한 속도중합계산이 필요하게 된다. 즉, 공통 중간점 자료와 속도중합 결과를 각각 자료공간(data space)과 모델공간(model space)으로 하는 역산 문제를 풀어 해결하게 된다(Thorson and Claerbout, 1985; Hampson, 1986).

Conjugate Gradient (CG) 최소자승역산

역산문제를 풀기 위해서는 우선 모델공간(m)에 해당하는 속도중합영역의 임의의 한 점이 자료공간(d)에 해당하는 공심점 자료에서의 쌍곡선으로 선형 변환되는 선형연산자 H 와 그것의 어드조인트(adjoint) 연산자인 H^T 를 구성해야한다.

$$d = Hm \quad (1)$$

속도중합역산에 있어서, 어드조인트 연산에 해당하는 H^T 는 속도중합연산자이며, 이러한 어드조인트 연산자의 어드조인트에 해당하는 순방향(forward) 연산자 H 는 벡터 내적의 정의에 의해서 속도중합영역의 한 점을 공통 중간점 영역에서의 쌍곡선으로 변환해주는 식이 된다. 이와 같은 연산자의 관계에서 일반적인 최소자승역산은 다음과 같이 실제 자료와 모델링된 자료의 차이인 잔여(residual)의 L_2 -norm 크기를 최소화시킬 수 있는 모델을 찾는 방법으로써

$$\bar{m} = \min_m \|Hm - d\|_2 \quad (2)$$

실제적인 계산은 다음과 같은 정규방정식(normal equation)을 푸는 것이다.

$$\bar{m} = \frac{H^T d}{H^T H} \quad (3)$$

이러한 정규방정식을 수치적 행렬 역산법으로 직접 풀기도 하지만, 연산자 H 의 크기가 큰 대부분의 경우에는 반복적 방법

으로 해를 구하게 된다. 최소자승역산에 있어서 반복적 방법은 각각의 반복 단계에서 경사방향(Steepest Descent 방법의 경우) 또는 현재 경사방향과 이전 반복단계에서의 경사방향에 이루는 평면상(Conjugate Gradient 방법의 경우)에서의 최소자승해를 구하게 된다.

Claerbout (1992)에 의해서 제안된 Conjugate Gradient 알고리즘은 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$\begin{aligned} r &= Hm - d && \# \text{ residual for an initial model} \\ \text{iterate } \{ & \\ \Delta m &= H^T r && \# \text{ gradient} \\ \Delta r &= H\Delta m && \# \text{ conjugate gradient} \\ (m, r) &= \text{cgstep}(m, r, \Delta m, \Delta r) && \\ & && \# \text{ update model and residual} \\ \} \end{aligned}$$

여기에서 서브루틴인 cgstep()는 이전 반복 시의 conjugate 영역에서 gradient 벡터 $\Delta s = H(m_i - m_{i-1})$ 를 기억하고 있으며, Δr (conjugate gradient)과 Δs (이전반복의 감소벡터)로 구성되는 다음과 같은 제곱식을 최소화시키는 감소(descend) 벡터를 구하게 된다(Claerbout, 1992).

$$Q(\alpha, \beta) = (r - \alpha\Delta r - \beta\Delta s)^T (r - \alpha\Delta r - \beta\Delta s) \quad (4)$$

Conjugate Guided Gradient (CGG) 최소자승역산

앞 절에서 소개된 CG 알고리즘 측면에서 보면, 기존의 IRLS 방법 (잔여와 모델에 가중을 모두 준 경우)은 순방향 연산자 H 가 가중치연산자 W_r 과 W_m 에 의해서 변형된 문제를 기존의 최소자승역산과 동일하게 계산하고 있다고 볼 수 있다. 즉 기존의 최소자승문제를 CG 방법으로 계산하는데 있어서, 연산자 H 와 H^T 를 $W_r H W_m$ 과 $W_m^T H^T W_r^T$ 로 각각 치환한 것에 불과하다고 할 수 있다. 하지만 가중치연산자 W_r 과 W_m 은 역산에서 구하고자하는 잔여와 모델의 함수이므로 결국 비선형 역산문제를 풀게 된다. 이를 구현한 알고리즘은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \text{outer iterate } \{ & \\ \text{diag}(W_r) &= f(r) && \# \text{ compute residual weighting} \\ \text{diag}(W_m) &= f(m) && \# \text{ compute model weighting} \\ r &= W_r(HW_m m - d) && \# \text{ residual for an initial model} \\ \text{inner iterate } \{ & \\ \Delta m &= W_m^T H^T W_r^T r && \# \text{ gradient} \\ \Delta r &= W_r H W_m \Delta m && \# \text{ conjugate gradient} \\ (m, r) &= \text{cgstep}(m, r, \Delta m, \Delta r) && \\ & && \# \text{ update model and residual} \\ \} & \\ m &= W_m m && \# \text{ computed unconditioned model} \\ \} \end{aligned}$$

이는 연산자를 치환함으로써 기존의 연산자에서의 최소자승 모델이 아닌 우리가 원하는 또 다른 연산자에서의 최소자승 모델을 찾는 방법이라고 해석할 수 있다. 하지만 이와 유사한 결과를 얻어내기 위해서, 연산자를 변화시키는 대신에 사용자가 지정한 특정한 좁은 영역(subspace)에서의 최소자승 해를 찾도록 하는 또 다른 방법도 생각해볼 수 있다. 여기에서 사용자가 지정하는 특정한 좁은 영역이란 L_p -norm의 경사방향(gradient direction)이나 모델에 관한 사전 지식(a priori model)이 될 수 있다. 특히, 반복적 역산인 CG방법에 있어서, 이러한 특정 방향으로의 해의 탐색 안내는 잔여분 벡터나 경사방향 벡터에 가중치를 줌으로써 쉽게 구현할 수 있으며, 이러한 기법은 결국 경사방향 벡터를 사용자가 경사방향 벡터를 안내하는 형태를 가지므로 이를 Conjugate Guided Gradient (CGG) 방법이라 부르하고자 한다.

반복적 잔여 가중에 의한 CGG

잔여의 L_1 -norm 이 최소화되는 해를 구하기 위해서 반복적 잔여 가중치를 사용하는 IRLS 역산에서 사용한 가중치 W_i 을 사용하면서 연산자 자체에는 변화를 주지 않는다면, 결과적으로 CG의 반복과정에서 단지 경사 방향에만 영향을 줄 수 있게 된다. 즉, 반복적 역산에서 경사방향을 구할 때는 가중치를 적용하고, 이로부터 conjugate gradient 벡터를 구할 때는 가중치를 사용하지 않게 되면, 이는 잔여 가중에 의해서 경사방향만을 안내하는 것이 되고, 결과적으로 얻게 되는 경사방향은 IRLS에서 사용한 것과 마찬가지로의 경사 방향이 된다. 이를 알고리즘으로 표현하면 다음과 같다.

$r = Hm - d$ # residual for an initial model
iterate {

$diag(W_i) = f(r)$ # compute residual weighting
 $\Delta m = H^T W_i^T r$ # guided gradient
 $\Delta r = H \Delta m$ # conjugate guided gradient
 $(m, r) = cgstep(m, r, \Delta m, \Delta r)$ # update model and residual
}

Fig. 1은 본 논문에 소개하고 있는 CGG 방법의 실험에 사용된 모델링 자료이다. 여기에서 사용된 모델링 자료는 다양한 잡음의 종류를 묘사하기 위해서 가우시안 잡음(최대 크기가 신호의 최대 크기의 0.2배에 해당하며 분산(σ^2) 값이 0.1), 잡음만 있는 트레이스(최대 크기가 신호의 최대 크기의 2배), 그리고 스파이크 형태의 잡음(크기가 신호의 최대 크기의 10배)이 포함된 것을 볼 수 있다.

Fig. 2는 Fig. 1의 모델링 자료에 대하여 반복적 잔여분 가중치를 사용한 CGG 역산의 결과이다. 이 때 사용한 가중치는 L_1 -norm에 대한 경사방향을 구하기 위해서 다음과 같이 주어지는 잔여를 이용한 가중치에서 $p = 1$ 의 값을 사용하였다.

$$diag(W_i) = |r|^{(p-2)/2} \tag{5}$$

역산 결과로부터 다시 모델링한 결과를 보면 성긴 구성의 큰 크기의 잡음을 잘 제거하여 L_1 -norm을 최소화시키는 반복적 잔여 가중치의 IRLS방법 (본 논문집의 또 다른 논문 “IRLS방법” 참조)과 마찬가지로 특성인 큰 크기의 잡음에 강한 성질을 잘 보여주고 있으며, 넓은 영역에 분포하는 작은 크기의 잡음도 사라진 것을 볼 수 있다.

반복적 모델 가중(model weighting)에 의한 CGG

CGG방법에서의 모델가중은 IRLS방법에서의 모델가중과

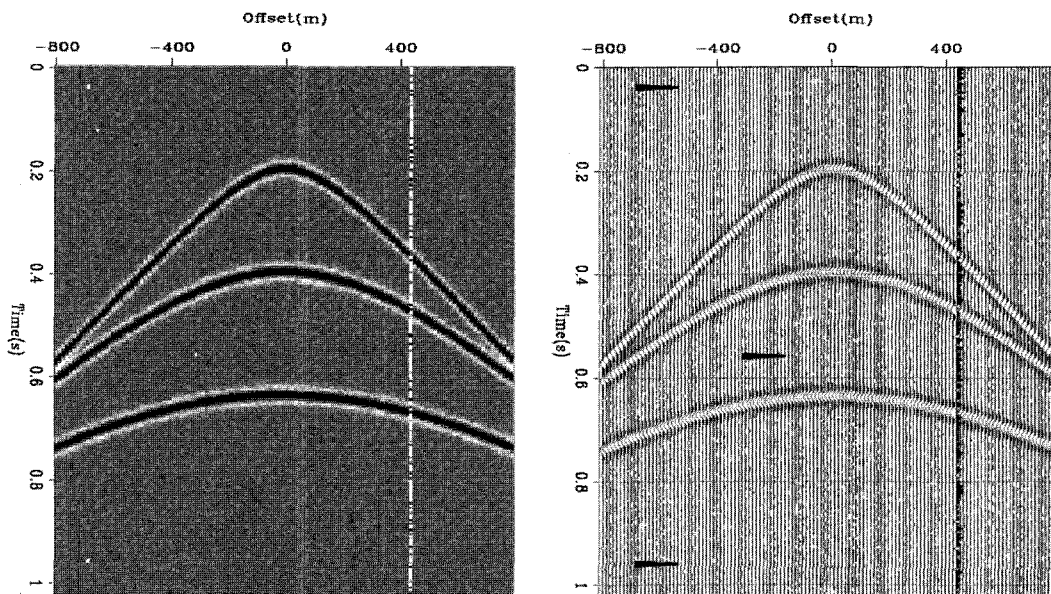


Fig. 1. Synthetic data in raster format (left) and wiggle format (right).

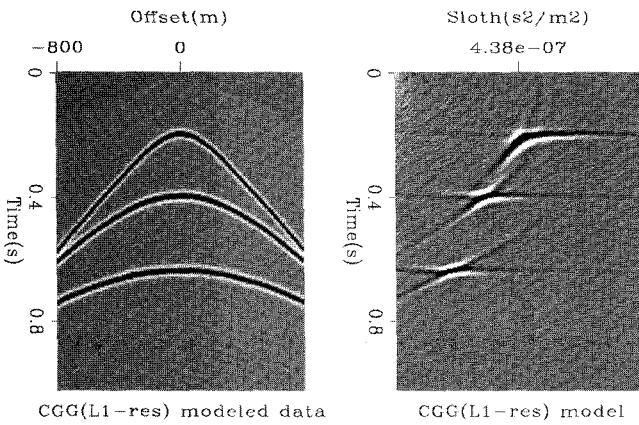


Fig. 2. Residual weighted CGG inversion result (right) and its remodeled data (left).

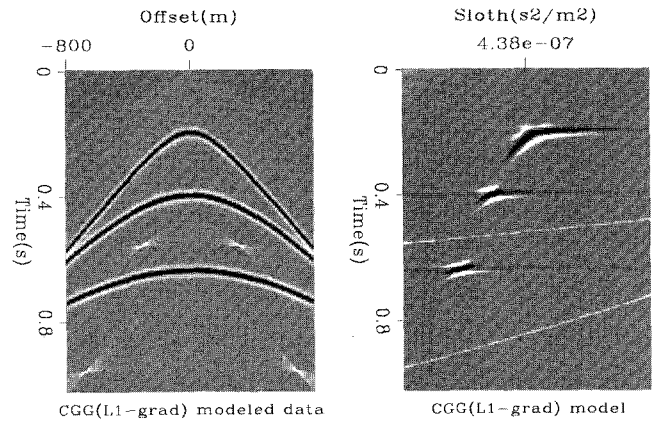


Fig. 3. Model weighted CGG inversion result (right) and its remodeled data (left).

알고리즘적으로는 유사하나 다른 의미를 갖는다. IRLS 에서의 모델 가중은 모델에 preconditioning 을 적용한 것으로 최소자승해를 구한 후에 다시 모델 가중을 적용하여 주어야 하지만, CGG 방법에서의 경사 가중은 단순한 해를 찾기 위한 탐색방향의 조절로서 최종적인 해는 그 자체로서 의미를 갖게 된다. 반복적 경사 가중에 의한 CGG 방법에서는 경사방향을 구한 후에 이에 가중치를 적용하여 경사방향을 안내하는 방법으로, 이때 사용되는 가중치는 이전 반복 시에 얻어진 모델의 절대값이 사용될 수 있다. 반복적 역산에서의 모델 값은 반복이 진행됨에 따라서 해에 수렴하므로, 반복과정에서 얻는 모델의 절대값의 일정 지수승 만큼의 값을 다음과 같이 가중치로 사용하면

$$diag(W_m) = |m|^p \tag{6}$$

이미 찾아진 모델에서 큰 값을 보이는 부분에 대해서 더 많은 가중을 주어 기존의 최소자승의 해보다는 성긴(parsimonous) 구성을 갖는 해를 찾는 방향으로의 안내 역할을 하게 된다. 그리고 경사방향의 가중에서도 잔여 가중에서와 마찬가지로 conjugate gradient 벡터를 구하는 과정에서는 가중치가 적용되지 않아 기존의 잔여 최소자승해를 구하는 과정이 그대로 적용되게 된다. 이를 알고리즘으로 표현하면 다음과 같다.

```

r = Hm - d           # residual for an initial model
iterate {
  diag(W_m) = f(m)   # compute model weighting
  Δm = W_m^T H^T r   # guided gradient
  Δr = HΔm           # conjugate guided gradient
  (m, r) = cgstep(m, r, Δm, Δr)
                    # update model and residual
}
    
```

Fig. 3은 앞에서 사용된 것과 같은 모델링 자료에 대하여 반복적 경사 가중의 CGG 방법을 사용한 결과이다. 이 때 사용

된 가중치는 다음과 같이 이전 반복의 모델의 절대 값이다.

$$diag(W_m) = |m|^1 \tag{7}$$

역산 결과 얻어진 최적의 모델을 보면 이전의 모델보다 성긴 구성을 갖는 결과를 보이는 것을 알 수 있다. 또한 상대적으로 크기가 작은 잡음들도 잘 제거됨을 모델링된 자료로부터 확인할 수 있다.

반복적 잔여/모델 가중에 의한 CGG

IRLS방법에서와 마찬가지로, 앞에서 소개된 잔여와 모델 각각에 대한 가중 방법들은 각각의 가중치가 CGG방법에서 갖는 서로 다른 효과들을 분리하여 살펴보기 위한 것이며, 이러한 효과들을 함께 누리고자 한다면 두 가지 가중치를 함께 적용할 수 있다. 즉 다음과 같이 각 반복 단계마다 경사방향을 구할 때 적절한 잔여와 경사에 각각의 가중치 행렬 W_r 과 W_m 을 곱한 후에 CG 반복을 하면 된다.

```

r = Hm - d           # residual for an initial model
iterate {
  diag(W_r) = f(r)   # compute residual weighting
  diag(W_m) = f(m)   # compute model weighting
  Δm = W_m^T H^T W_r^T r   # guided gradient
  Δr = HΔm           # conjugate guided gradient
  (m, r) = cgstep(m, r, Δm, Δr)
                    # update model and residual
}
    
```

Fig. 4는 최소자승법의 실험에 사용된 같은 자료에 대하여 반복적 잔여 및 모델 가중치를 사용한 최소자승법의 결과를 보인 것이다. 이 때 사용한 가중치들은 잔여의 경우에는 L_1 -norm이 최소화되는 해를 구하기 위해서 $p=1$ 의 값을 사용하였으며, 모델 가중의 경우에는 이전 반복의 모델의 절대값을 사용하였다. 역산 결과 얻어진 최적의 모델을 보면 이전의 모

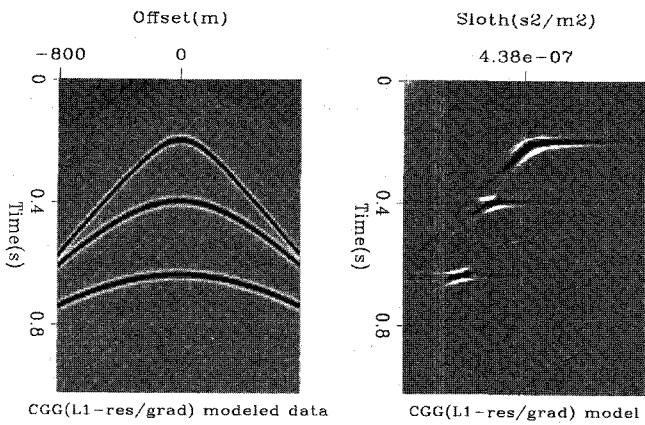


Fig. 4. Residual/Model weighted CGG inversion result (right) and its remodeled data (left).

델보다 성긴 구성을 갖는 결과를 보이며, 역산 결과로부터 다시 모델링한 결과는 성긴 구성의 큰 크기의 잡음을 잘 제거하여 L_1 -norm의 특성인 robustness를 잘 보여주고 있다.

실제자료 적용사례

본 연구에서는 제안된 CGG 역산을 실험하기 위해서 다양한 종류의 잡음을 포함하고 있는 두 개의 실제 육상 탐사에서 얻은 공통발파점 자료(Common Shot Point (CSP) gather)를 사용하였다. 두 자료가 모두 공통중간점자료(CMP gather)가 아닌 공통발파점 자료(CSP gather)라 하더라도 포함된 이벤트

들이 쌍곡선(hyperbolic) 역산을 수행하기에는 충분한 쌍곡선 양상을 보이고 있다.

Fig. 5는 사용된 첫 번째 실제 자료, 잔여/모델에 가중치를 적용한 CGG 역산의 결과와 그 결과로부터 재 구성한 자료이다. Fig. 5에서 실제 자료에는 강한 그라운드 룰과 근거리 오프셋의 전반부와 0.8 km 오프셋 후반부의 이상 크기의 신호, 그리고 1.6 km와 2.0 km 오프셋 주변의 트레이스 쉬프트(shift) 등과 같은 다양한 종류의 잡음이 포함되어 있음을 알 수 있다. 이 때 사용한 가중치는 잔여의 경우에는 L_1 -norm을 구하도록, 모델의 경우에는 이전 반복의 모델의 절대 값을 가중치로 사용하였다. 예상대로 결과는 넓게 분포하는 잡음뿐만 아니라, 국지적으로 존재하는 잡음도 잘 제거 하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6은 사용된 또 다른 잡음 특성을 보이는 두 번째 실제 자료이다. 이 자료가 갖고 있는 잡음의 특성은 널리 산재해 있는 무작위 잡음과 중간지점과 후반부의 오프셋에 존재하는 트레이스들의 신호 크기의 변화이다. 이 실험에서도 역시 잔여의 경우에는 L_1 -norm을 구하도록, 모델의 경우에는 이전 반복의 모델의 절대 값을 가중치로 사용하였다. 그로부터 재구성한 자료에서는 넓은 영역에 걸쳐 분포하는 무작위 잡음은 대체적으로 감소시키나, 임펄스 형태의 잡음이라 할 수 있는 몇몇 트레이스들의 이상 신호 크기들은 보정에 실패하고 있는 것을 볼 수 있다. 이러한 다수의 잡음 트레이스들은 통계학적으로 볼 때 spike 형태도 아니면서 Gaussian 형태도 아닌 그 중간 정도에 위치한 잡음들로서 잔여 가중보다는 모델 가중을 증가시켜

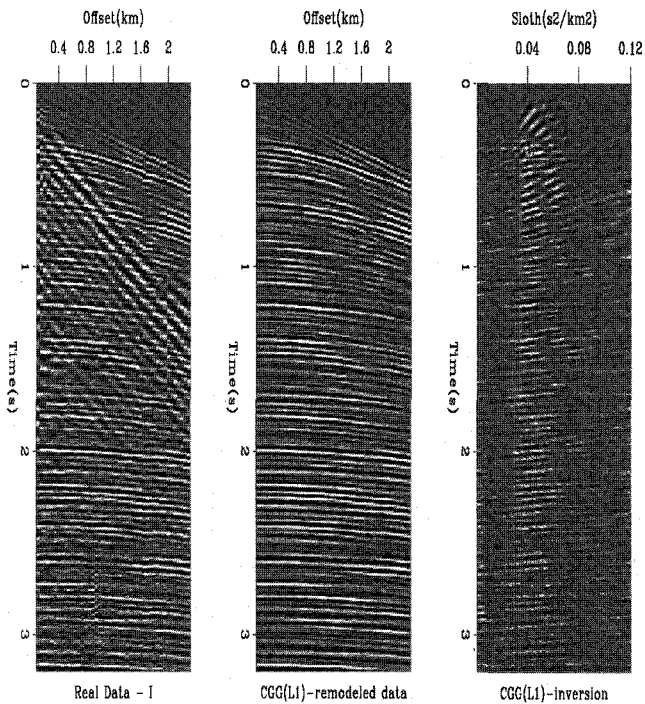


Fig. 5. Real data I (left). CGG inversion result (right) and its remodeled data (middle).

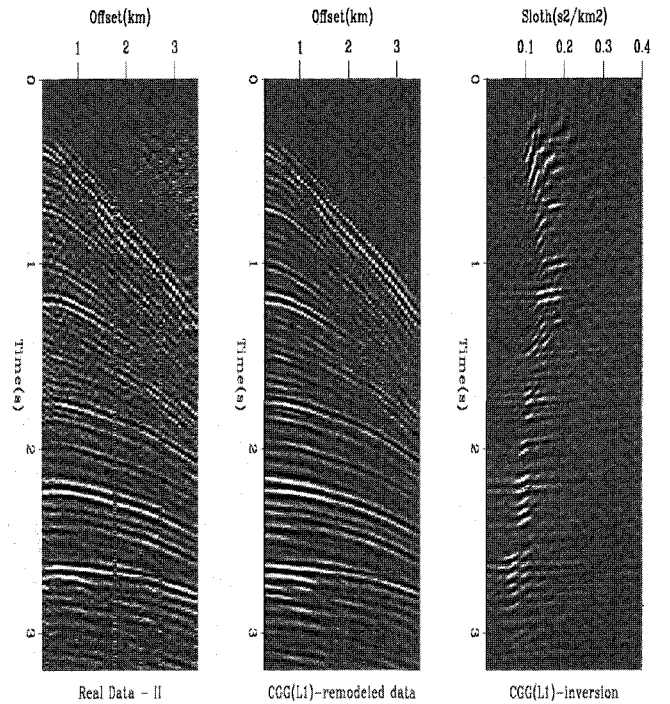


Fig. 6. Real data II (left). CGG inversion result (right) and its remodeled data (middle).

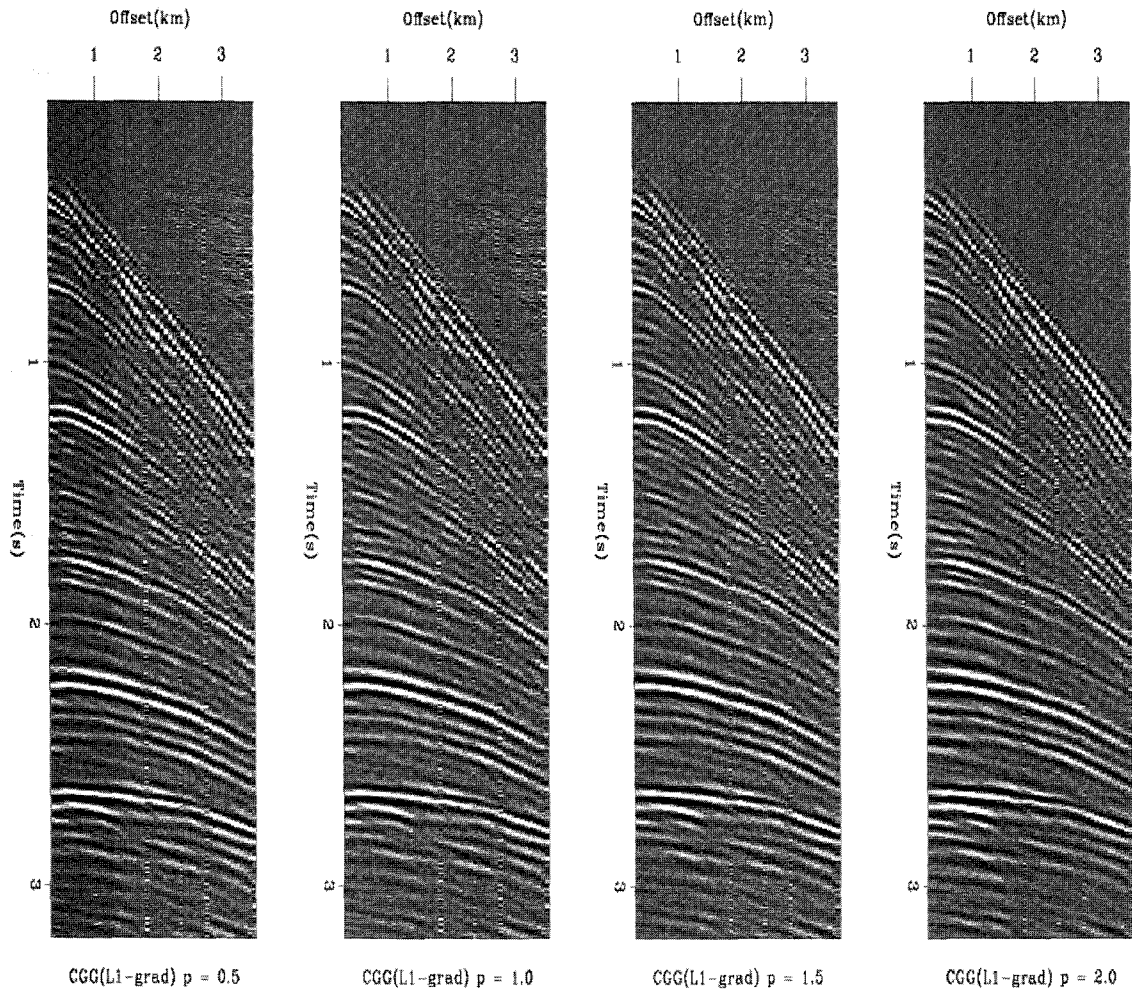


Fig. 7. CGG (L_1 -norm residual) inversion results with various model weighting powers: $p = 0.5, 1.0, 1.5,$ and 2.0 from left to right, respectively.

쌍곡선 이벤트들에 대한 상대적인 크기를 감소시켜 제거할 수 있게 된다. Fig. 7에서는 다양한 모델 가중치의 지수 승 값을 적용한 결과를 보이고 있으며, 여기에서 모델 가중치의 크기가 증가할수록 반사이벤트에는 영향을 주지 않으면서도 잡음으로만 구성된 트레이스들이 점차 약화되고 있는 것을 관찰할 수 있다.

결 론

속도중합역산을 다양한 탄성과 자료처리에 응용하기 위해서는 잡음에 강한(robust) 양상을 보이며, 속도중합의 결과가 성긴(parsimonious) 양상을 보이는 역산 방법을 사용해야 한다. 본 논문에서는 기존의 CG 방법에 변형을 주어 반복적 가중치를 통한 최소자승 해의 탐색방향을 조절하는 방법인 CGG 방법을 소개하였다. 모델링 자료와 실제자료에 적용해 본 결과 소개된 CGG 방법을 사용한 속도중합역산은 잡음에 강하며 성긴 특성을 보이고 있다. 따라서 CGG 방법에서 사용하는 선형역산에서의 감소방향(gradient direction)을 적절히 조종하는

기법은 유사한 목적으로 사용할 수 있는 비선형 역산인 IRLS 방법과 마찬가지로 다양한 잔여/모델 norm을 최소화시키는 역산방법으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

사 사

본 연구는 2004학년도 한성대학교 교내연구비 지원과제임.

참고문헌

Claerbout, J., 1992, *Earth sounding analysis: Processing versus inversion*, Blackwell Scientific Publ. Inc.
 Guitton, A., and Symes, W., 2003, Robust inversion of seismic data using the Huber norm, *Geophysics*, **68**, 1310-1319.
 Hampson, D., 1986, Inverse velocity stacking for multiple elimination, *J. Can. Soc. Expl. Geophysics.*, **22**, 44-45.
 Herrmann, P., Mojesky, T., Magesan, M., and Hugonnet, P., 2000, De-aliased, high-resolution Radon transforms, *Soc. of Expl. Geophys., 70th Ann. Internat. Mtg.*, 1953-1956.

- Ji, J., 1994, Near-Offset interpolation in wavefront synthesis imaging, *Stanford Exploration Project Report*, **82**, 195-208.
- Ji, J., 2004, Conjugate guided gradient (CGG) method for robust inversion and its application to velocity-stack inversion, *Stanford Exploration Project Report*, **115**, 315-336.
- Sacchi, M., and Ulrych, T., 1995, High-resolution velocity gathers and offset space reconstruction, *Geophysics*, **60**, 1169-1177.
- Scales, J. A., and Gersztenkorn, A., 1987, Robust methods in inverse theory, in Scales, J. A. Ed., *Geophysical imaging, Symposium of Geophysical Society of Tulsa, SEG*, 25-50.
- Scales, J. A., Gersztenkorn, A., Treitel, S., and Lines, L. R., 1988, Robust optimization methods in geophysical inverse theory, *SEG 58th Ann. Internat. Mtg., Session:S7.1*.
- Taner, M. T., and Koehler, F., 1969, Velocity spectra - Digital computer derivation and application of velocity functions, *Geophysics*, **34**, 859-881.
- Thorson, J. R., and Claerbout, J. F., 1985, Velocity stack and slant stochastic inversion, *Geophysics*, **50**, 2727-2741.
- Tred, D., Ulrych, T., and Sacchi, M., 2003, Latest views of the sparse Radon transform, *Geophysics*, **68**, 386-399.