

연구논문

속도중합역산을 위한 반복적 최소자승법 – Part A: IRLS 방법

지 준¹⁾

Iterative Least-Squares Method for Velocity Stack Inversion – Part A: IRLS method

Jun Ji¹⁾

요 약 : 속도중합을 역산을 이용하면 탄성과 자료처리에서 있어서 다양한 처리가 가능하므로, 이 분야는 최근에 들어 매우 유용한 영역으로 주목을 받고 있다. 이러한 다양한 처리에 속도중합 역산을 응용하기 위해서는 사용하는 역산이 잡음에 강하면서도 고해상도의 속도중합 결과를 얻을 수 있어야 한다. 이러한 성질을 갖는 역산 방법들 중에서 가장 성공적인 방법 중의 하나라고 볼 수 있는 반복적 가중의 최소자승법(Iteratively Reweighted Least-Squares: IRLS)의 이론적 배경과 구현 방법을 소개하고, 기존 기술 특성과 한계성을 살펴보았다.

주요어 : IRLS, 반복가중, 최소자승역산, 속도중합역산

Abstract : Recently, the velocity stack domain is having an attention as a very useful domain for various processing in seismic data processing. In order to be used in many applications, the velocity stack should be obtained through an inversion method and the used inversion should have properties like the robustness to noise and the parsimony of velocity stack result. Iteratively Reweighted Least-Squares (IRLS) method is the one of the inversion methods that have such properties. This paper describes the theoretical background, implementation of the method, and examines the characteristics and limits of the IRLS method.

Keywords : IRLS, iterative reweighted, least-squares, velocity stack inversion

서 론

속도중합(velocity stack)은 공통중간점 모음(CMP gather)영역인 시간과 오프셋영역에서 속도중합영역인 시간과 속도영역으로 변환하는 과정으로서 중합(stack) 또는 구조보정(migration)에 필요한 탄성과 속도를 결정하는데 주로 이용되어왔다. 최근에 들어서는 이러한 속도중합을 역산을 통해서 계산함으로써 탄성과 자료처리에서 있어서 다양한 처리가 가능하게 되었다. 전통적으로 사용되어오던 속도결정에 있어서의 개선(Thorson and Claerbout, 1985)은 물론이고, 무작위로 나타나는 잡음제거(Guitton and Symes, 2003; Ji, 2004)나 일정한 규칙을 보이며 존재하는 그라운드 롤(ground roll) 또는 다중반사파의 제거(Hampson, 1986; Herrmann *et al.*, 2000; Tred *et al.*, 2003), 소실된 오프셋 자료의 복원(Ji, 1994; Sacchi and Ulrych, 1995) 등을 주요 응용분야로 들 수 있다.

이러한 응용분야들의 대부분은 CMP자료로부터 역산을 통해서 얻어지는 속도스택의 결과가 성긴(parsimonious) 양상을 보이거나, 이 때 사용되는 역산방법이 큰 크기의 잡음에 강한

(robust) 양상을 보일 때 현실적인 적용이 가능하다고 할 수 있다. 역산에서 일반적으로 많이 사용되는 최소자승법(least-squares)은 이러한 요구 조건을 만족하지 못하며, 그 한계성을 극복하기 위하여 고해상도의 속도중합 결과를 얻으려는 다양한 방법들을 시도해 왔다. 본 논문에서는 앞에서 언급한 다양한 적용분야에 적합한 고해상도 속도중합을 얻기 위한 여러 방법들 중에서 가장 성공적인 방법 중의 하나라고 할 수 있는 반복적 가중의 최소자승법(Iteratively Reweighted Least-Squares: IRLS)의 이론적 배경과 구현 방법을 소개하고, 기존 기술 특성과 한계성을 살펴보고자 한다.

속도중합(Velocity Stacking) 역산

일반적인 속도중합은 CMP 자료에서 반사파에 해당하는 쌍곡선(hyperbola) 모양의 신호를 따라서 더해주거나 유사도(semblance)를 계산(Taner and Koehler, 1969)하여 속도중합결과를 얻게 된다. 이상적인 경우에서는 CMP 자료에서의 쌍곡선이 속도중합영역에서의 한 점으로 나타나게(mapping) 되지

*2005년 4월 22일 접수

1) 한성대학교 정보시스템공학과(Department of Information System Engineering, Hansung University)
jun@hansung.ac.kr

만, 실제적으로 쌍곡선을 따라서 신호를 더하는 방법은 자료에 존재하는 다양한 잡음과 제한된 aperture에 기인한 정보의 부족 때문에 이상적인 결과를 가져오지 못한다. 보다 높은 해상도를 가진 속도중합결과를 얻기 위해서는 역산을 통한 속도중합 계산이 필요하게 된다. 이를 위해서 Thorson and Claerbout (1985)과 Hampson (1986)은 속도중합결과를 모델공간으로 하는 역산 문제를 풀고자 하였다.

최소자승역산(Least-Squares [LS] Inversion)

역산문제를 풀기 위해서는 우선 모델공간(m)에 해당하는 속도중합영역의 임의의 한 점이 자료공간(d)에 해당하는 CMP자료에서의 쌍곡선으로 아래와 같이 선형 변환되는 선형연산자 H 와 그것의 어드조인트(adjoint) 연산자인 H^T 를 구성해야한다.

$$d = Hm \tag{1}$$

속도중합역산에 있어서, 어드조인트 연산에 해당하는 H^T 는 주어진 속도에 해당하는 쌍곡선의 궤적을 따라서 신호를 더하여 주는 속도중합 연산자로서, 다음과 같이 표현되고

$$m(s, \tau) = \sum_{h=h_{min}}^{h_{max}} d(h, t = \sqrt{\tau^2 + h^2 s^2}) \tag{2}$$

여기에서 $d(h, t)$ 는 오프셋-시간 영역의 CMP 자료를 $m(s, \tau)$ 는 느리기(slowness)-시간 영역의 속도중합 자료를 각각 말한다. 이러한 어드조인트 연산자의 어드조인트에 해당하는 순방향(forward) 연산자 H 는 벡터 내적의 정의에 의해서 다음과 같이 속도중합영역의 한 점을 CMP영역에서의 해당 쌍곡선으로 변환해주는 식이 된다.

$$d(h, \tau) = \sum_{s=s_{min}}^{s_{max}} m(s, \tau = \sqrt{t^2 - h^2 s^2}) \tag{3}$$

이와 같이 주어지는 연산자의 관계에서 일반적인 최소자승 역산은 다음과 같이 실제 자료와 모델링된 자료의 차이인 잔여분(residual)의 L_2 -norm 크기를 최소화시킬 수 있는 모델을 찾는 방법으로

$$\bar{m} = \min_m |d - Hm|_2 \tag{4}$$

실제적인 계산은 다음과 같은 정규방정식(normal equation)을 푸는 것이다.

$$\bar{m} = \frac{H^T d}{H^T H} \tag{5}$$

이러한 정규방정식을 행렬역산법으로 직접 풀기도 하지만, 연산자 H 의 크기가 큰 대부분의 경우에는 켈레구배(conjugate gradient: CG) 방법과 같은 반복적 방법으로 풀게 된다.

Fig. 1에서는 최소자승역산의 실험에 사용된 모델링 자료를 보여주고 있다. 여기에서 사용된 모델링 자료는 다양한 종류의 잡음들을 묘사하기 위해서 가우시안 잡음(최대 크기가 신호의 최대 크기의 0.2배에 해당하며 분산(σ^2) 값은 0.1), 잡음만 있는 트레이스(최대 크기가 신호의 최대 크기의 2배), 그리고 스파이크 형태의 잡음(신호의 가장 큰 크기의 10배 크기)이 포함된 것을 볼 수 있다.

Fig. 2는 최소자승 역산의 결과와 그 결과에 대한 모델링을 통해서 재현된 CMP자료를 보여주는데, 산재한 가우시안 잡음은 대체적으로 잘 제거되었으나, 스파이크 형태의 크기가 큰 잡음들은 완전히 배제하지 못하는 최소자승역산법의 한계를

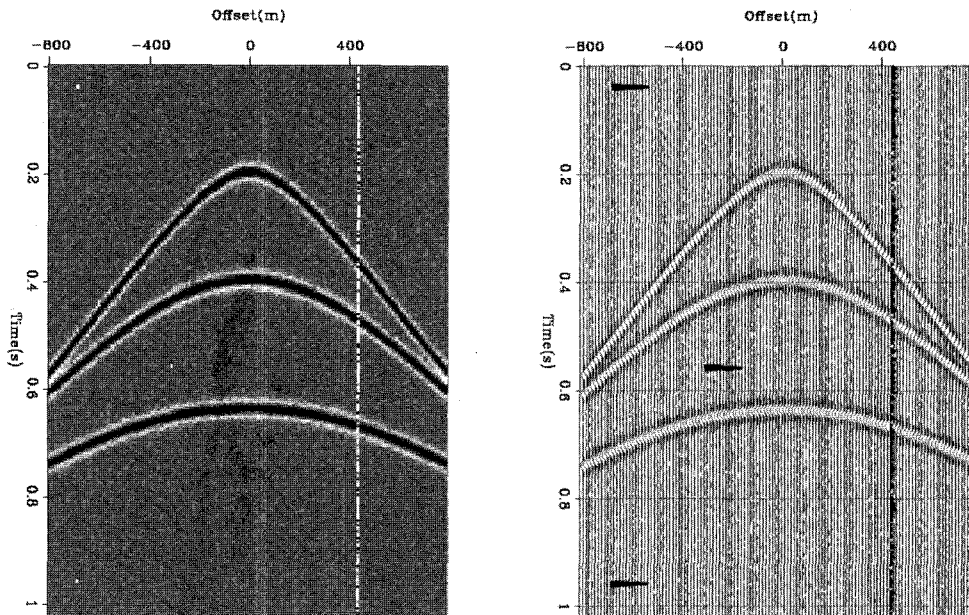


Fig. 1. Synthetic data for testing in raster (left) and wiggle format (right), respectively.

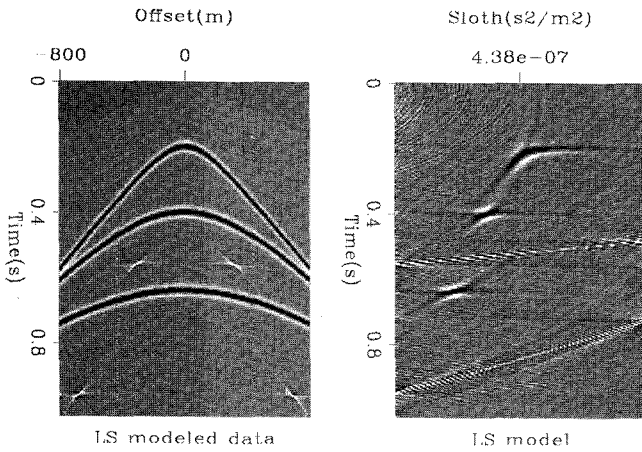


Fig. 2. LS inversion result (right) and its remodeled data (left).

볼 수 있다.

반복적 가중의 최소자승역산(Iteratively Reweighted LS [IRLS] Inversion)

최소자승역산의 한계는 역산을 위해서 최소화시키는 값이 잔여(residual)의 L_2 -norm이기 때문에 생기는 현상으로, 이러한 문제점은 잔여의 L_1 -norm을 최소화시킴으로써 개선 할 수 있다(Claerbout and Muir, 1973). L_1 -norm의 잡음에 강한(robust) 성질에도 불구하고, L_1 -norm을 최소화시키는 역산법이 널리 사용되고 있지 못했던 주된 이유는 최소자승역산에 널리 사용되는 steepest descent 방법이나 CG 방법과 같이 적용이 쉬운 역산법이 없었기 때문이다. 하지만 최근에 들어서는 비선형 역산을 위해서 개발된 반복적 가중의 최소자승(Iteratively Reweighted Least-Squares) 역산법(Scales and Gersztenkorn, 1987; Scales et al., 1988)을 선형역산에 적용하여 임의의 L_p -norm을 최소화 시키는 방법이 도입되어 L_1 -norm의 최소화에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

잔여 가중(Weighting the Residual)

최소자승역산법에 있어서 잔여에 적절한 가중치를 주어서 해를 구하게 되면, 그 결과 얻어지는 해는 잔여의 L_2 -norm이 아닌 또 다른 norm의 해에 해당하게 된다. 즉 다음과 같이 최소화시키고자하는 잔여에 가중치 행렬 W_r 을 곱한 후에 최소자승역산을 적용하게 되면

$$\bar{m} = \min_m |W_r(d - Hm)|_2 \tag{6}$$

결과적으로 얻어지는 해는 변형된 식인 $W_r d = W_r H m$ 에 대한 최소자승의 해로써 정규방정식에 의한 해는

$$\bar{m} = \frac{H^T W_r^T W_r d}{H^T W_r^T W_r H} \tag{7}$$

로 주어지며, 만약에 가중치로 사용된 행렬 W_r 이 다음과 같이

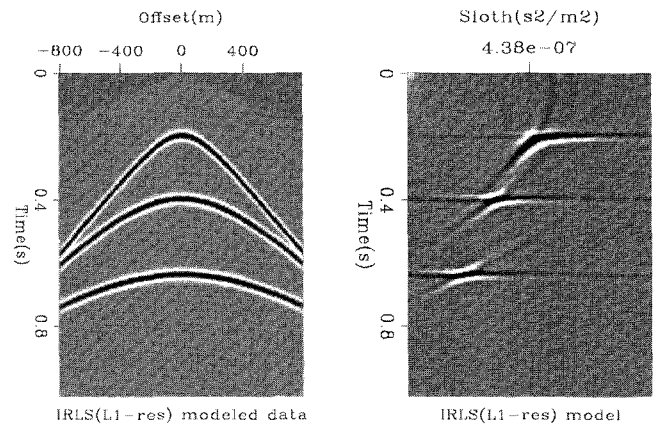


Fig. 3. IRLS (L_1 -norm residual) inversion result (right) and its remodeled data (left).

일반적인 최소자승역산 결과의 잔여(r)에 해당하는 값들로 구성된 대각행렬(diagonal matrix)이라 하면,

$$diag(W_r) = |r|^{(p-2)/2} \tag{8}$$

가중된 최소자승역산은 결과적으로 다음과 같이 되므로

$$r^T W_r^T W_r r = r^T |r|^{(p-2)} r = |r|^p = |r|_p \tag{9}$$

잔여의 L_p -norm을 최소화시키는 해를 구한 것이 된다. 이때, 최종 잔여를 처음부터는 알 수 없는, 반복적 역산법인 CG 방법으로 역산을 풀 경우에는, 각 반복 단계마다 이전 반복 단계에서 얻어진 잔여를 사용하여 가중치를 주게 되며, 반복과정이 진행됨에 따라 해에 수렴하는 과정에서 가중치 또한 적절한 최종 잔여분의 값으로 수렴하게 된다.

Fig. 3에서는 최소자승법의 실험에 사용된 동일한 모델링 자료에 대하여 반복적 잔여 가중치를 사용한 최소자승법의 결과를 보여주고 있다. 이 때 사용한 가중치는 잔여의 L_1 -norm이 최소화 되도록 하는 해를 구하기 위해서 $p=1$ 의 값을 사용하였다. L_1 -norm의 경우처럼 $p=1$ 인 경우에는 가중치가 $|r|^{-1/2}$ 이므로 잔여가 0에 가까워지면 가중치는 발산하게 된다. 따라서 실제 구현에 있어서는 잔여가 일정한 임계값(ϵ)보다 작아지면 가중치를 다음과 같은 임계값으로 치환하게 된다.

$$diag(W_r) = \begin{cases} |r|^{-1/2} & \text{when } |r| \geq \epsilon \\ \epsilon & \text{when } |r| < \epsilon \end{cases} \tag{10}$$

이러한 임계 값을 결정하는 데는 자료가 갖고 있는 가장 큰 값의 일정 배수, 예를 들면 $0.01 \times$ 최대값, 또는 자료의 일정 percentile에 해당되는 값이 사용되곤 한다. 전자의 경우에는 자료를 구성하는 값들의 통계학적 분포에 따라서 각기 다른 값을 할당해야 하는 단점이 있는 반면에 후자의 경우에는 이미 자료의 통계학적 분포가 임계 값 결정에 반영되어 있으므로 보다 안정적인 임계 값 결정 방법이라 할 수 있다. 본 연구

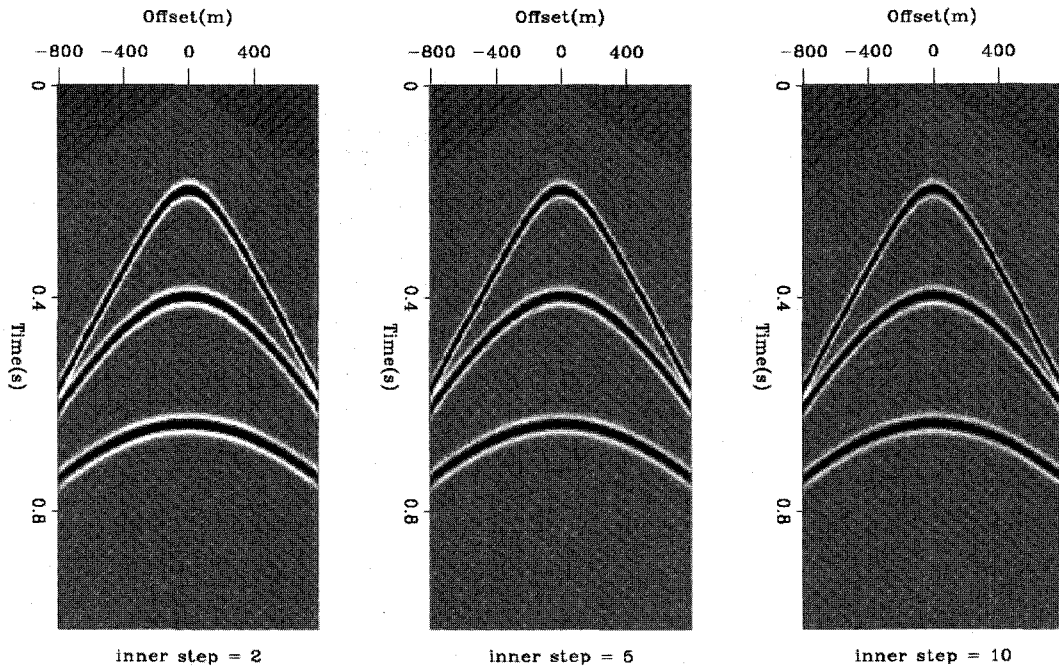


Fig. 4. IRLS (L_1 -norm residual) inversion result with various number of inner iteration steps: 2 step (left), 5 steps (middle), and 10 steps (right), respectively.

에서는 자료의 2 percentile 에 해당하는 값, 즉 자료를 크기대로 정렬한 후에 자료의 2%가 포함되는 위치에 존재하는 값을 임계 값으로 사용하였다. 역산 결과에 대한 모델링 결과(Fig. 3)를 보면 성진 구성의 큰 크기의 잡음을 잘 제거하는 L_1 -norm의 특성인 robustness를 잘 보여주고 있으면서, 배경에 넓게 분포하는 작은 크기의 잡음도 잘 제거함을 알 수 있다.

한편 반복적 역산법인 CG 방법을 사용하여 IRLS 방법을 구현하는 데는 두 단계의 반복이 중첩되게 된다. 하나는 주어진 가중치에 대한 최소자승 해를 구하는 CG방법에 있어서의 내부 반복이고, 또 다른 하나는 가중치 변화에 따른 외부 반복이다. 이러한 알고리즘을 다음과 같이 요약할 수 있다.

```

outer iteration {
     $W_r = f(r)$       # compute residual weight
    inner iteration {
        solve for  $W, d = W_r H m$ 
    }
}
    
```

이러한 내부/외부 반복 회수의 결정에는 적절한 이론적 배경이 존재하고 있지 않으며, 대부분은 실험적/경험적인 방법이 사용되게 된다. 본 연구에서는 이러한 내부/외부 반복 회수의 적절한 결정을 위해서 실험을 수행하였으며, 그 결과를 Fig. 4에 표시하였다. Fig. 4의 세 가지 결과는 모두 30회의 외부 반복을 적용하였으며, 내부 반복은 각각 2회, 5회 그리고 10회를 하였다. 내부 반복회수 중에서 가장 작은 회수인 2회는 평면 탐색을 수행하는 CG방법에서 빠른 수렴속도를 얻을 수 있는

최소한의 회수이다. 서로 다른 반복회수의 결과는 대체적으로는 유사하게 나타난다. 따라서 본 연구에서는 모든 IRLS 방법을 적용하면서, 내부 반복을 2회만 수행하였다.

모델 가중(Weighting the Model)

역산결과 얻어지는 해의 성진(parsimonious) 특성을 얻고자 한다면, 모델에 가중을 적용할 수 있다. 즉, 순방향(forward) 모델링을 다음과 같이 변화를 준 후 최소자승 해를 구하고

$$d = H W_m n \tag{11}$$

최종적인 가중치를 적용하여 해를($m = W_m^{-1} n$) 얻으면 된다. 반복적 최소자승역산에 의해서 얻어지는 해는 모델 또한 L_2 -norm이 최소인 값을 취하게 되므로 다음과 같이 되고,

$$|n|_2 = n^T n = m^T W_m^T W_m^{-1} m, \tag{12}$$

잔여의 가중 시에 사용한 것과 유사하게, 최소자승역산의 해인 m 의 함수로 구성된 대각행렬(diagonal matrix)을 다음과 같이 모델 가중치라 하면,

$$diag(W_m) = |m|^{(2-p)/2}, \tag{13}$$

최소화된 가중된 모델은

$$m^T |m|^{(p-2)} m = |m|^p = |m|_p \tag{14}$$

가 되어 모델의 L_p -norm이 최소화되는 해를 구한 결과로 해석할 수 있다.

이때, 최소자승역산의 해에 해당하는 모델을 처음에는 알 수

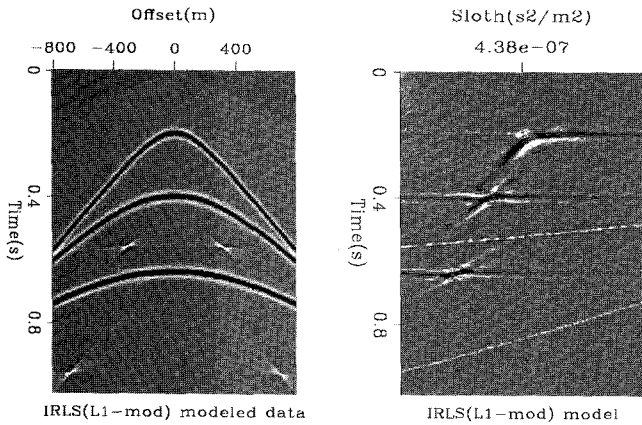


Fig. 5. IRLS (with L_1 -norm model) inversion result (right) and its remodeled data (left).

없는, 반복적 역산법인 CG방법으로 풀 경우에는 잔여 가중치 법에서와 마찬가지로 각 반복 단계마다 이전 반복 단계에서 얻어진 모델을 사용하여 가중치를 주게 되며, 반복과정이 진행됨에 따라 해에 수렴하는 과정에서 가중치 또한 적절한 최종 모델의 함수로 수렴하게 된다.

Fig. 5는 앞에서 사용된 것과 동일한 모델링 자료에 대하여 반복적 모델 가중치를 사용한 최소자승법의 결과이다. 이 때 사용한 가중치는 모델의 L_1 -norm이 최소화되는 해를 구하기 위해서 $p=1$ 의 값을 사용하였다. 역산 결과 얻어진 최적의 모델을 보면 이전의 모델보다 성긴 구성을 갖는 결과를 보이며, 그 결과로부터 모델링된 자료를 보면 강한 크기의 스파이크 형태의 잡음제거 효과도 어느 정도 보이면서 가우시안 노이즈도 제거하는 좋은 양상을 보이고 있다. 하지만 속도중합 단면에서도 큰 값을 갖게 되는 큰 크기 잡음에 대한 제거는 제대로 이루어지고 있지 않음을 알 수 있다.

잔여와 모델 가중(Weighting the Residual and the Model)

앞에서 소개된 잔여와 모델 각각에 대한 가중 방법들은 각각의 가중치가 갖는 서로 다른 의미를 분리하여 살펴보기 위한 것이며, 이러한 효과들을 함께 누리하고자 한다면 두 가지 가중치를 함께 적용할 수 있다. 즉 다음과 같이 최소화시키고자 하는 잔여와 모델에 각각의 가중치 행렬 W_r 과 W_m 을 곱한 후에 최소자승역산을 적용하게 되면

$$\bar{n} = \min_n \|W_r(d - HW_m n)\|_2 \quad (15)$$

결과적으로 얻어지는 해는 변형된 식인 $W_r d = W_r H W_m \bar{n}$ 에 대한 최소자승의 해로써 정규방정식에 의한 해는

$$\bar{n} = \frac{W_m^T H^T W_r^T W_r d}{W_m^T H^T W_r^T W_r H W_m} \quad (16)$$

이 되며, 최종적인 해는 다시 모델 가중치를 적용하여 $\bar{m} = W_m \bar{n}$ 을 얻게 된다.

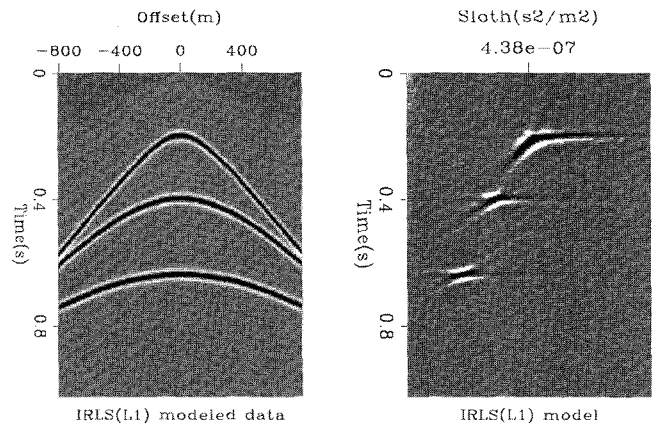


Fig. 6. IRLS (with L_1 -norm residual/model) inversion result (right) and its remodeled data (left).

Fig. 6은 최소자승법의 실험에 사용된 동일한 자료에 대하여 반복적 잔여 및 모델 가중치를 사용한 최소자승법의 결과이다. 이 때 사용한 가중치들은 잔여와 모델 모두 L_1 -norm이 최소화 되는 해를 구하기 위해서 $p=1$ 의 값을 사용하였다. 역산 결과 얻어진 최적의 모델을 보면 이전의 모델보다 성긴 구성을 갖는 결과를 보이며, 역산 결과로부터 모델링한 결과는 성긴 구성의 큰 크기의 잡음을 잘 제거하여 L_1 -norm의 특성인 robustness를 잘 보여주고 있다.

실제자료 적용사례

본 연구에서는 IRLS 역산을 실험하기 위해서 다양한 종류의 잡음을 포함하고 있는 두개의 실제 육상 탐사에서 얻은 공통발파점 자료(Common Shot Point (CSP) gather)를 사용하였다. 두 자료가 모두 공통중간점 자료(CMP gather)가 아닌 공통발파점 자료(CSP gather)라 하더라도 포함된 이벤트 들이 쌍곡선 역산을 수행하기에는 충분한 쌍곡선 양상을 보이고 있다.

Fig. 7은 첫 번째 실제 자료와 L_2 -norm을 최소화 시키는 최소자승역산의 결과, 그리고 그로부터 모델링된 자료를 각각 보여주고 있다. Fig. 7로부터 실제 자료에는 강한 그라운드 롤과 근거리 오프셋의 전반부와 0.8 km 오프셋 후반부의 이상 크기의 신호, 그리고 1.6 km와 2.0 km 오프셋 주변 트레이스들의 이상 쉬프트(shift) 등과 같은 다양한 종류의 잡음이 포함되어 있음을 알 수 있다. 또한 역산된 결과로부터 모델링된 자료를 살펴보면 일반적인 최소자승역산(즉 L_2 -norm 최소화)은 넓은 영역에 걸쳐 분포하는 대부분의 잡음을 제거할 수 있으나 국지적으로 강하게 존재하는 잡음으로 볼 수 있는 부분들(0.8 km 오프셋 후반부의 이상 크기의 신호, 그리고 1.6 km와 2.0 km 오프셋 주변 트레이스들의 이상 쉬프트(shift)) 제거하는 데는 한계가 있음을 알 수 있다. 또한 역산으로 얻어진 속도 중합 단면도 속도 결정이 쉽지 않을 정도로 다양한 신호가 넓게

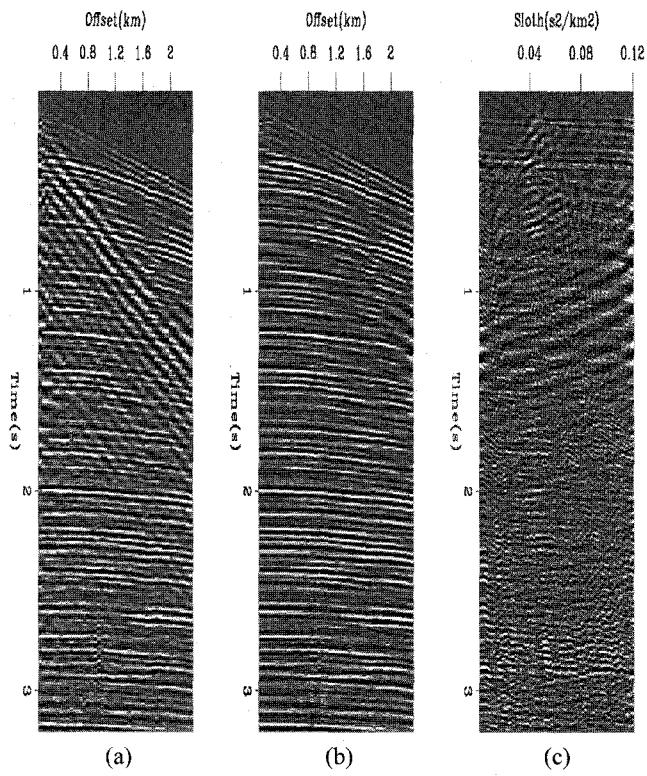


Fig. 7. Real data I (a), LS inversion result (c) and its remodeled data (b).

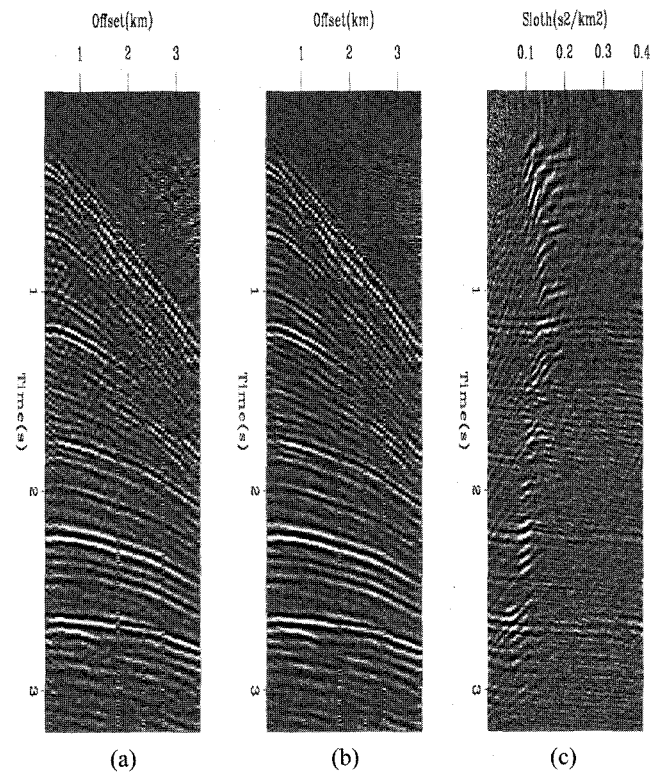


Fig. 9. Real data II (a), LS inversion result (c) and its remodeled data (b).

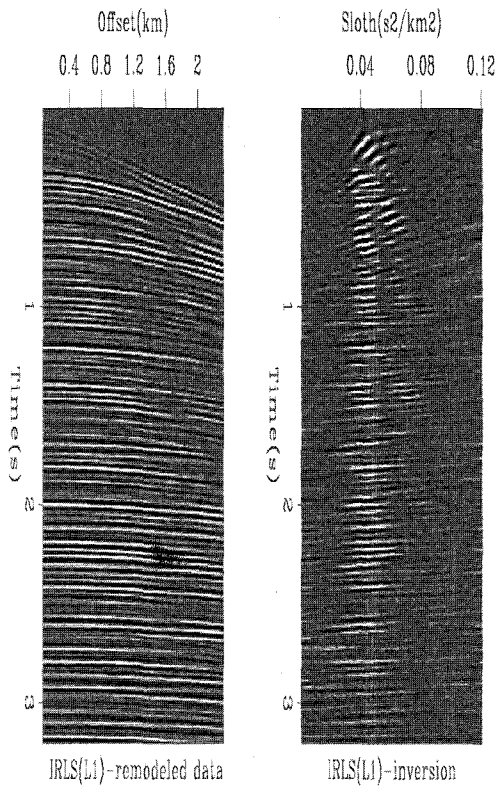


Fig. 8. IRLS L_1 -norm inversion result (right) and its remodeled data (left).

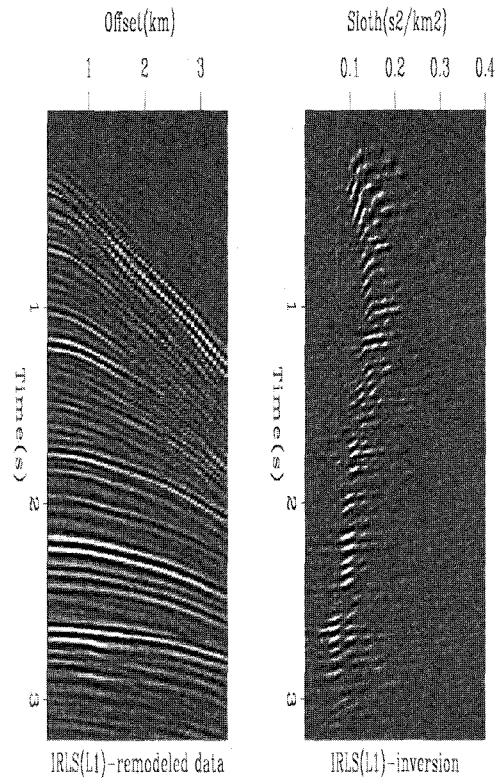


Fig. 10. IRLS L_1 -norm inversion result (right) and its remodeled data (left).

퍼져서 나타나는 것을 볼 수 있다.

Fig. 8은 LS 역산에서 실험한 실제 자료에 대하여 잔여와 모델에 가중치를 적용한 IRLS 역산의 결과와 그 결과로부터 재구성한 자료를 보여주고 있다. 이 때 사용한 가중치는 잔여와 모델 모두 L_1 -norm을 구하도록 적용하였다. 예상대로 결과는 넓게 분포하는 잡음뿐만 아니라, 국지적으로 존재하는 잡음도 잘 제거 하는 것을 볼 수 있으며, 속도 중합 단면에서의 성긴 구성을 갖는 특성도 볼 수 있다.

Fig. 9는 또 다른 잡음 특성을 보이는 두 번째 실제 자료이며, 이 자료가 갖고 있는 잡음의 특성은 널리 산재해 있는 무작위 잡음과 중간지점과 후반부의 오프셋에 존재하는 트레이스들의 신호 크기의 변화이다. 이 실험에서도 역시 기존의 최소자승역산의 결과와 그로부터 재구성한 자료에서는 넓은 영역에 걸쳐 분포하는 무작위 잡음은 대체적으로 감소시키지만, 임펄스 형태의 잡음이라 할 수 있는 몇몇 트레이스들의 이상 신호들에 대한 보정에는 실패하고 있는 것을 볼 수 있다.

Fig. 10은 LS 역산에 사용된 것과 같은 자료에 대하여 잔여와 모델에 가중치를 적용한 IRLS 역산의 결과와 그 결과로부터 재구성한 자료를 보여주고 있다. 이 때 사용한 가중치는 역시 잔여와 모델 모두 L_1 -norm을 구하도록 적용하였다. 예상대로 결과는 넓게 분포하는 잡음뿐만 아니라, 국지적으로 존재하는 잡음도 잘 제거 하는 것을 볼 수 있으며, 속도 중합 단면은 L_2 -norm의 결과에 비해 훨씬 성긴 양상을 가짐을 볼 수 있다.

결 론

속도중합역산을 다양한 탄성과 자료처리에 응용하기 위해서는 사용되는 역산 방법이 잡음에 강한(robust) 양상을 보이며, 얻어지는 속도중합의 결과가 성긴(parsimonious) 양상을 보이는 특성을 가져야한다. 이러한 특성을 갖는 역산에는 L_p -norm을 최소화시키는 IRLS 방법이 있다. IRLS 방법에서는 잔여 가중치를 적용하여 잔여의 L_1 -norm을 최소화시켜 큰 크기의 잡음에도 강한 역산이 되게 해주며, 모델 가중을 통해서 모델의 L_1 -norm이 최소화 되도록 하여 속도중합 결과가 성긴 형

태를 갖도록 하게 해준다. 모의 자료와 현장자료에 대한 속도 중합역산 실험을 통해서 L_1 -norm을 최소화시키는 IRLS법의 경우 기존의 최소자승역산의 문제점이던 큰 잡음에 민감한 성질과 속도중합단면에서의 잡음생성 등의 문제점들이 크게 개선됨을 알 수 있었다.

참고문헌

- Claerbout, J. F., and Muir, R., 1973, Robust Modeling with Erratic Data, *Geophysics*, **38**, 829-844.
- Guittou, A., and Symes, W., 2003, Robust inversion of seismic data using the Huber norm, *Geophysics*, **68**, 1310-1319.
- Hampson, D., 1986, Inverse velocity stacking for multiple elimination, *J. Can. Soc. Expl. Geophysics.*, **22**, 44-45.
- Herrmann, P., Mojesky, T., Magesan, M., and Hugonnet, P., 2000, De-aliased, high-resolution Radon transforms, *Soc. of Expl. Geophys., 70th Ann. Internat. Mtg.*, 1953-1956.
- Ji, J., 1994, Near-Offset interpolation in wavefront synthesis imaging, *Stanford Exploration Project Report*, **82**, 195-208.
- Ji, J., 2004, Conjugate guided gradient (CGG) method for robust inversion and its application to velocity-stack inversion, *Stanford Exploration Project Report*, **115**, 315-336.
- Sacchi, M., and Ulrych, T., 1995, High-resolution velocity gathers and offset space reconstruction, *Geophysics*, **60**, 1169-1177.
- Scales, J. A., and Gersztenkorn, A., 1987, Robust methods in inverse theory, in Scales, J. A. Ed., *Geophysical imaging, Symposium of geophysical society of Tulsa, SEG*, 25-50.
- Scales, J. A., Gersztenkorn, A., Treitel, S., and Lines, L. R., 1988, Robust optimization methods in geophysical inverse theory, *SEG 58th Ann. Internat. Mtg., Session:S7.1*.
- Taner, M. T., and Koehler, F., 1969, Velocity spectra - Digital computer derivation and application of velocity functions, *Geophysics*, **34**, 859-881.
- Thorson, J. R., and Claerbout, J. F., 1985, Velocity stack and slant stochastic inversion, *Geophysics*, **50**, 2727-2741.
- Tred, D., Ulrych, T., and Sacchi, M., 2003, Latest views of the sparse Radon transform, *Geophys.*, **68**, 386-399.