

반복 학습 제어에 대한 소개

도 태 용

한밭대학교 제어계측공학과

1. 서론

제어 시스템 설계 문제를 크게 나누면 “안정화(stabilization)”와 “성능(performance)”의 두 범주로 나눌 수 있을 것이다. 이 중 성능 문제는 설계자에 의해 정의된 최적화 지수나 특정한 norm을 기준으로 시스템 출력이 기준 궤적을 얼마나 정확하게 추종할 수 있는가의 문제이다. 특히, 생산 및 공장 자동화에서 제품의 품질과 경쟁력을 높이기 위해서 제어 시스템의 성능 문제는 반드시 해결되어야 한다. 산업 현장에서 사용되는 다양한 로봇 매니플레이터와 기계 시스템들은 대부분 미리 정해진 경로를 추종하거나, 물건을 집어 특정 위치에 정렬하는 등 반복적인 작업을 수행한다. 따라서 반복적인 작업을 수행하는 시스템을 위한 제어기를 설계할 때, 이전 작업에서 수집한 추종 오차, 제어 입력과 같은 정보를 이용하면 보다 나은 성능을 얻을 수 있을 것이다. 결론적으로, 이와 같이 반복 작업을 수행하는 시스템의 제어 문제는 다음과 같이 정의될 수 있다.

문제 : 기준 궤적 $y_r(t)$ 과 특정 시간 간격 $[0, t_f]$ 가 주어졌을 때, 주어진 시스템이 $y_r(t)$ 를 추종하기 위하여 현재 작업뿐만 아니라 과거에 수행한 작업에서 발생한 정보를 이용하여 제어 입력 $u(t)$ 를 생성하라.

일반적으로 플랜트에 대한 모든 정보가 정확하다면, 수학적 인 제어 이론들을 이용하여 최적의 제어기를 얻을 수 있을 것이다. 그러나 대부분의 플랜트는 묘사되지 않는 불확실성을 가지고 있기 때문에 모델 기반으로 설계된 제어 시스템은 예상하지 못한 결과를 발생시키기도 한다. 따라서 고려하는 시스템의 반복적인 작업 특성과 플랜트의 불확실성을 고려한 제어 전략이 필요하다.

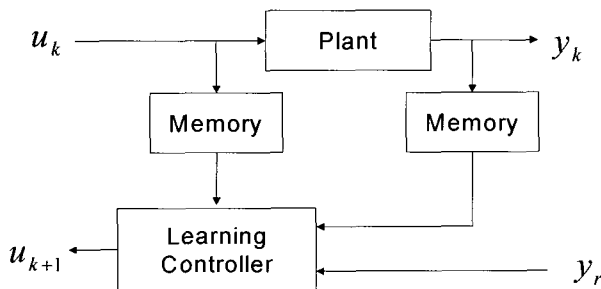


그림 1. 반복학습제어 시스템의 기본 구조[1], [2].

반복학습제어(iterative learning control)는 제어기의 구조가 간단하고 시스템에 대한 정확한 모델이 없어도 제어기 설계가 가능하다. 특히, 그림 1에서 설명하는 것처럼, 반복학습제어는 동일한 작업을 반복적으로 수행할수록 제어 성능이 향상되는 개루프(open loop) 제어 기법이다. 반복학습제어에서는 주어진 작업이 특정 시간 주기를 가지고 기준 궤적을 반복적으로 추종하는 것으로 가정한다. 반복학습제어기는 과거의 제어 입력과 오차 등의 정보를 이용하여 작업동안 모든 지점에서 기준 궤적을 정확하게 추종하고자 순방향(feedforward) 제어 입력을 생성한다. 그림 1의 반복학습제어기가 연산자 $L(\cdot, \cdot)$ 으로 표현된다면, 반복학습제어 알고리즘은

$$u_{k+1}(\cdot) = L(u_k(\cdot), u_{k-1}(\cdot), \dots, e_k(\cdot), e_{k-1}(\cdot), \dots) \quad (1)$$

와 같은 형태를 취한다. 여기서, $u_k(\cdot)$ 와 $e_k(\cdot)$ 는 각각 k 번째 반복 작업 시, 제어 입력과 기준 궤적과 플랜트 출력($y_k(\cdot)$) 사이의 오차를 의미한다. 플랜트의 종류-선형시불변, 선형시변, 비선형 시스템-에 따라, 다루고자하는 영역-시간영역, 주파수영역-에 따라 연산자 L , 즉, 반복학습제어기는 다양하게 설계될 수 있고, 다양한 분야에 적용될 수 있다[1-10]. 식 (1)에서 알 수 있듯이, 반복학습제어는 작업을 반복함에 따라 제어 입력이 갱신되는 구조를 가진다. 따라서 제환(feedback) 제어와 달리 반복학습제어 시스템의 안정성은 작업이 반복됨에 따라 생성된 제어 입력 또는 추종 오차의 수렴성(convergence)으로 판단된다.

반복학습제어의 가장 큰 장점은 플랜트 불확실성과 모델링되지 않는 외란이 존재함에도 불구하고 동일 작업을 몇 차례 반복함으로써 훌륭한 추종 성능을 얻을 수 있다. 적응제어(adaptive control)와 비교했을 때, 반복학습제어는 반복적인 작업에만 적용된다는 단점이 있지만, 매개변수의 동정화(identification) 과정이 필요 없고 모델 불확실성에 대하여 강인하다. 반복학습제어의 또 다른 장점은 제어 법칙이 간단하고 반복학습제어기가 개루프 구조를 가지고 있기 때문에 다음 반복 작업을 위한 제어 입력을 오프 라인으로 생성할 수 있다는 것이다.

본고에서는 반복학습제어에 대한 일반적인 소개로서 먼저 반복학습제어의 중요 원리와 연구 결과에 대해 소개한다. 그리고

최근 중요 연구 관심사인 반복학습제어와 기존의 제한 제어와의 관계에 대해 설명한다.

2. Betterment Operation과 λ -놈(Norm)

“Betterment Operation”이라는 이름으로 Arimoto 등에 의해 제안된 거의 최초의 반복학습제어 알고리즘은 오차 $e_k(t) = y_r(t) - y_k(t)$ 의 미분항을 포함한다[3]. 제안된 알고리즘은 다음과 같은 형태를 취한다.

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t) \quad (2)$$

여기서, Γ 는 학습 이득을 의미한다.

정리 1 : 특정 시간 $[0, t_f]$ 에서 신호가 정의되고 시스템 행렬 (A, B, C) 을 가진 선형시불변시스템의 경우, 식 (2)를 가지는 반복학습제어 시스템이

1. $CB > 0$
2. 유도된 놈(induced norm) $\|I - CB\Gamma\|_i < 1$
3. 초기조건, $y_r(0) = y_k(0)$

을 만족하면, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_r(t)$ 가

$$\|f(t)\|_\lambda = \sup_{0 \leq t \leq t_f} [e^{-\lambda t} \max_{1 \leq i \leq q} |f_i|] \quad (3)$$

와 같이 정의된 λ -놈 센스에서 성립한다. 여기서, $f(t)$ 는 q -차원 벡터 신호이다. 즉, λ -놈 센스에서 출력이 기준 궤적에 수렴한다.

증명 : 먼저 k 번째 반복 작업 시 출력 $y_k(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$y_k(t) = g(t) + \int_0^t H(t, \tau) u_k(\tau) d\tau \quad (4)$$

여기서, $g(t) = Ce^{At}x(0)$ 이고, $H(t, \tau) = Ce^{A(t-\tau)}B$ 이다. 식 (2)와 식 (4)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_k(t) &= \dot{y}_r(t) - \dot{y}_k(t) \\ &= \dot{y}_r(t) - [\dot{g}(t) + CBu_k(t) \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \tau) u_k(\tau) d\tau] \\ &= [I - CB\Gamma] \dot{e}_{k-1}(t) \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \tau) \Gamma \dot{e}_{k-1}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

위식의 양변에 λ -놈을 취하면,

$$\begin{aligned} \|\dot{e}_k\| &= \max_{0 \leq t \leq t_f} [e^{-\lambda t} \|\dot{e}_k(t)\|_\infty] \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq t_f} \|I - CB\Gamma\|_\infty \\ &\quad \cdot \max_{0 \leq t \leq t_f} [e^{-\lambda t} \|\dot{e}_{k-1}(t)\|_\infty] \\ &\quad + h_0 \cdot \max_{0 \leq t \leq t_f} \\ &\quad \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \max_{0 \leq \tau \leq t_f} [e^{-\lambda \tau} \|\dot{e}_{k-1}(\tau)\|_\infty] d\tau \\ &= \rho \|\dot{e}_{k-1}\|_\lambda + h_0 \|\dot{e}_{k-1}\|_\lambda \\ &\quad \cdot \max_{0 \leq t \leq t_f} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &= \left(\rho + \frac{h_0(1 - e^{-\lambda t_f})}{\lambda} \right) \|\dot{e}_{k-1}\|_\lambda \end{aligned}$$

의 결과를 얻을 수 있다. 여기서, ρ 와 h_0 는

$$\rho = \max_{0 \leq t \leq t_f} \|I - CB\Gamma\|_\infty$$

$$h_0 = \max_{0 \leq t, \tau \leq t_f} \left\| \frac{\partial}{\partial t} H(t, \tau) \Gamma \right\|_\infty$$

각각 정의된다. $0 \leq \rho < 1$ 이기 때문에,

$$\rho_0 = \rho + \frac{h_0(1 - e^{-\lambda t_f})}{\lambda} < 1$$

을 만족하는 충분히 큰 양의 λ 를 선택할 수 있다. 따라서

$\|\dot{e}_k\|_\lambda \leq \rho_0 \|\dot{e}_{k-1}\|_\lambda$ 가 만족함으로 정리 1은 증명된다. ■

λ -놈을 기반으로 하는 수렴 조건은 이와 같은 반복학습제어 시스템뿐만 아니라, 시변 시스템과 로봇을 포함한 다양한 비선형 시스템에서도 사용된다[11-13].

식 (3)의 λ -놈 정의로부터, 양의 λ 에 대해서

$$\|f(t)\|_\lambda \leq \max_{0 \leq t \leq t_f} \|f(t)\|_\infty \leq e^{\lambda t} \|f(t)\|_\lambda$$

와 같은 관계를 유도할 수 있다. 따라서 ∞ -놈을 기반으로 해도 동일한 수렴 조건을 얻을 수 있다. 그러나 반복학습제어 알고리즘이 λ -놈에 대해서 수렴성을 보장할 수 있더라도 추종 오차에서 아주 큰 오버슈트(overshoot)가 발생하는 단점을 가지고 있다[14]. 이 현상은 λ -놈의 수렴 방식과 ∞ -놈의 수렴 방식이 다른 데 그 원인이 있다.

3. 선형 연산자를 이용한 학습 법칙

초기 반복학습제어에서는 선형 연산자를 이용한 학습 법칙이 제안되었다[1]. 대표적인 반복학습제어 법칙으로는

$$u_{k+1} = T_u u_k + T_e (y_r - y_k) \quad (5)$$

와 같은 형태이다. 여기서, T_u 와 T_e 는 선형 연산자이다.

정리 2 : 선형시불변 시스템 $y_k = T_s u_k$ 에 대해서, 식 (5)의 반복 학습제어 알고리즘은 다음 조건을 만족하면 고정점 $u^*(t)$ 로 수렴한다.

$$\|T_u - T_e T_s\|_i < 1 \quad (6)$$

고정점 $u^*(t)$ 는

$$u^*(t) = (I - T_u + T_e T_s)^{-1} T_e y_r(t) \quad (7)$$

와 같이 주어지고, 그 결과로 발생한 추종 오차의 고정점은 $t \in [0, t_f]$ 에 대해서

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (y_r - y_k) \\ &= (I - T_s (I - T_u + T_e T_s)^{-1} T_e) y_r(t) \end{aligned} \quad (8)$$

와 같이 주어진다.

증명 : $k+1$ 번째 제어 입력에 대해서

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= T_u u_k + T_e (y_r - y_k) \\ &= T_u u_k + T_e (y_r - T_s u_k) = f(u_k) \end{aligned}$$

와 같이 표현할 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &= \|T_u (x_1 - x_2) - T_e T_s (x_1 - x_2)\| \\ &\leq \|T_u - T_e T_s\|_i \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

가 되고, $\|T_u - T_e T_s\|_i$ 는 반복에 대한 Lipschitz 상수가 된다.

식 (6)을 만족하면, 제어 입력은 $u^*(t)$ 로 수렴한다. u^* 는

$$u^* = T_u u^* + T_e (y_r - T_s u^*)$$

을 만족해야 하므로 결국 식 (7)과 같은 결과를 얻을 수 있다. 위의 결과와

$$e^*(t) = y_r(t) - y^*(t) = y_r(t) - T_s u^*(t)$$

관계를 이용하면 $e^*(t)$ 을 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

반복학습제어의 연구 중 많은 부분이 위의 선형 연산자 T_u 와 T_e 를 특정 시스템에 맞게 선정하고 설계하고 추종 오차나 제어 입력의 수렴 조건을 구하는데 초점을 맞추고 있다.

4. 최적 반복학습제어

폐환 제어의 최적 제어 기법과 유사하게, 반복학습제어에서도 최적화를 기반으로 하는 제어 알고리즘이 제안되어왔다.

Togai와 Yamano가 제안한 이산 반복학습제어 알고리즘, $u_{k+1}(t) = u_k(t) + G e_k(t+1)$ 에서 최적 이득 G 를 가격 함수

$$J = \frac{1}{2} e_k^T(t+1) Q e_k(t+1)$$

를 Gauss-Newton, Newton-Raphson 방법 등을 이용하여 최소화으로써 구하였다[15]. 이와 같은 접근 방식은 [5], [16-17] 등에서 보다 더 체계적으로 발전하였다.

Amann 등에 의해 제안된 최적 제어 기법을 이용한 놈-최적 반복학습제어 알고리즘은 놈 기반의 가격 함수를 최소화시키기 위하여 제어 입력을 반복적으로 갱신한다[18-19].

초기치가 0인 선형 이산 시스템이

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) &= Cx(i) \end{aligned}$$

와 같이 주어졌을 때, N 샘플의 입출력만 고려하자. 이 때 입력 벡터 \mathbf{u} 와 출력 벡터 \mathbf{y} 를

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u(0) \ u(1) \ \dots \ u(N-1)] \\ \mathbf{y} &= [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)] \end{aligned}$$

와 같이 정의할 수 있다. 시스템의 입출력은 식 (9)로 표현된다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (9)$$

여기서, \mathbf{G} 는 다음과 같이 Toeplitz 행렬이다.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \dots & CB \end{bmatrix}$$

가격 함수를

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \|\mathbf{e}_{k+1}\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_R^2 \\ &= \mathbf{e}_{k+1}^T Q \mathbf{e}_{k+1} + (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)^T R (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) \end{aligned}$$

와 같이 정의하고 이를 최소화하는 반복학습제어 법칙을 구한다. 여기서, $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_r - \mathbf{y}_k$ 이고 Q 와 R 은 각각 대칭이고 양한 정한 행렬이다. $k+1$ 번째 반복 작업을 할 때, 제어 입력을 구하기 위하여 벡터 미분을 취하면,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \mathbf{u}_{k+1}} = -\mathbf{G}^T Q \mathbf{e}_{k+1} + R (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) = 0$$

의 결과를 얻을 수 있다. 따라서 최적 제어 입력은

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + R^{-1} \mathbf{G}^T Q \mathbf{e}_{k+1}, \quad \forall k \geq 0 \quad (10)$$

이다. 여기서 식 (10)의 $R^{-1} \mathbf{G}^T Q$ 는 \mathbf{G} 의 adjoint 연산자와 동일하다는 중요한 결과를 얻을 수 있다. 실제 시스템에 적용하기 위해서는 식 (10)의 제어 법칙을 인과(causal) 형태로 변환해야 한다. 자세한 내용은 [18-19]를 참고하기 바란다.

5. 주파수 영역에서의 반복학습제어

기존의 폐환 제어는 주파수 영역에서 주로 해석되고 설계되었기 때문에 다양한 해석 방법과 설계 도구를 가지고 있다. 이를 적극적으로 활용하기 위해서 반복학습제어에서도 주파수 영역에서 제어 알고리즘을 제안하고 수렴성을 보장하려는 노력을 해오고 있다.

Craig [8]에 의해 제안된 주파수 영역 반복학습제어 알고리즘은 Moore [1]와 Padieu와 Su [20], De Luca [7], De Roover [9] 등에 의해 발전되면서 식 (11)과 같은 일반적인 반복학습제어 법칙을 가지게 되었다.

$$U_{k+1}(s) = P(s)U_k(s) + Q(s)E_k(s) \quad (11)$$

여기서, $U_k(s)$ 와 $E_k(s)$ 는 k 번째 반복 작업 시 제어 입력과 추종 오차의 라플라스 변환이고, $P(s)$ 와 $Q(s)$ 는 안정한 학습 필터이다.

정리 3 : 입출력 관계가 $Y(s) = G(s)U(s)$ 로 정의된 단일 입출력 시스템에 식 (11)과 같은 반복학습제어 법칙을 적용할 때, 다음 두 조건

1. 기준 궤적 $Y_r(s) \in H_2$
2. $\|P(s) - Q(s)G(s)\|_\infty < 1$ (12)

을 만족하면 추종 오차 $e(t)$ 는 \mathcal{L}_2 -놈 센스에서 잔존 오차

$$\begin{aligned} e_\infty(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 - P(s)}{1 - P(s) + Q(s)G(s)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

로 수렴한다.

증명 : $k + 1$ 번째 반복 작업 시 추종 오차는

$$\begin{aligned} E_{k+1}(s) &= Y_r(s) - Y_{k+1}(s) \\ &= Y_r(s) - G(s)U_{k+1}(s) \\ &= Y_r(s) - G(s)(P(s)U_k(s) + Q(s)E_k(s)) \quad (14) \\ &= (P(s) - Q(s)G(s))E_k(s) \\ &\quad + (1 - P(s))Y_r(s) \end{aligned}$$

와 같이 주어진다. k 번째 반복 작업 시 추종 오차도 위와 유사하게 구해진다. 연속적인 반복 작업의 두 추종 오차의 차를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{k+1}(s) - E_k(s) &= (P(s) - Q(s)G(s)) \\ &\quad \cdot (E_k(s) - E_{k-1}(s)) \end{aligned}$$

이로부터,

$$\begin{aligned} \|E_{k+1}(s) - E_k(s)\|_2 &= \|e_{k+1}(t) - e_k(t)\|_2 \\ &\leq \|P(s) - Q(s)G(s)\|_\infty \\ &\quad \cdot \|e_k(t) - e_{k-1}(t)\|_2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

와 같은 관계를 유도할 수 있고, 위의 두 조건을 만족하면 추종 오차는 $e_\infty(t)$ 로 \mathcal{L}_2 -놈 센스에서 수렴한다. $e_\infty(t)$ 는 식 (14)에서 $E_k(s)$ 와 $E_{k+1}(s)$ 를 $E_\infty(s)$ 로 치환함으로써 구할 수 있다.

식 (13)에서 알 수 있듯이, $P(s) = 1$ 이면, $e_\infty(t)$ 가 0이 되어 완벽 추종이 가능하다. 그러나 식 (12)의 조건을 만족하는 시스템이 가역(invertible) 시스템으로 제한된다. 따라서 주파수 영역에서 일반적인 시스템을 위한 반복학습제어기는 수렴 조건을 만족하고 $e_\infty(t)$ 를 최소화할 수 있도록 설계된다. $P(s)$ 는 보통 저역 통과 필터로 사용하는데, 그 주파수 범위는 기준 궤적과 시스템의 주파수 범위에 맞춰진다. $Q(s)$ 는 $P(s)$ 가 주어진 하에서 식 (12)의 조건을 만족하도록 설계된다.

주파수 영역에서 반복학습제어기를 설계할 때는 플랜트 모델을 사용하게 됨으로 플랜트 불확실성이 있을 경우 그 수렴성을 보장할 수 없다. 이를 해결하기 위해 강인 제어 기법을 활용한 반복학습제어기 설계 기법들이 [21-23]에서 제시되었다.

5. 반복학습제어와 폐환제어와의 관계

반복학습제어는 근본적으로 개루프 제어이기 때문에 외란과 매개변수의 변화에 민감한 경향이 있다. 또한 비록 반복학습제어기가 추종 오차의 수렴성을 보장하더라도 학습 초기 단계에서 추종 오차가 커지기도 한다. 이런 단점을 극복하기 위해서, 반복학습제어기가 실제 시스템에 적용될 때는 폐환 제어기와 함께 사용된다. 폐환 제어기의 역할은 시스템의 안정성을 보장하고, 강인성을 향상시키며 추종 오차를 일정 한계에서 유지시킨다. Bondi 등 [24]에 의해 반복학습제어기와 폐환 제어기를 결합하는 방법이 제시된 이래, 다양한 접근 방법들이 연구되었다 [5-6], [21-23], [25].

최근에는 반복학습제어를 폐환 제어의 관점에서 해석하려는 노력이 시도되고 있다. De Roover 등 [26]은 반복적인 작업의 성능 개선을 위한 반복학습제어와 주기적이면서 연속적인 작업의 성능 개선을 위한 반복제어(repetitive control)가 쌍대성(duality)의 관계를 가지고 있음을 내부 모델 원리(internal model principle)를 이용하여 증명하였다. 반복 제어기는 시스템의 출력에 내부 모델을 가지는 서보(servo) 보상기의 구조를 가지고, 반복학습제어기는 시스템의 입력에 내부 모델을 가지는 외란 관측기(disturbance observer)의 구조를 가진다.

반복학습제어는 시스템에 대한 정확한 정보가 없더라도 추종

성능을 개선하기 위한 강인 제어의 한 종류이다. 이런 개념 위에서 반복학습제어와 기존의 강인 제어를 접목한 연구가 시도되었다[26-28].

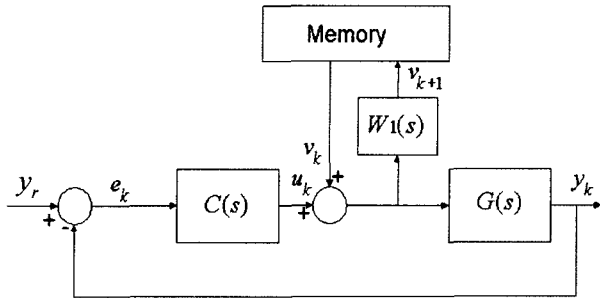


그림 2. 궤환 기반의 반복학습제어 시스템.

그림 2와 같이 궤환 기반의 반복학습제어 시스템을 고려하자. 플랜트는 $G(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))G_n(s)$ 와 같이 곱셈형 불확실성을 가진 것으로 가정하자.

여기서, $G_n(s)$ 는 공칭 플랜트 모델이고, $W_2(s)$ 는 안정한 가중치 함수이며, $\Delta(s)$ 는 $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ 을 만족하는 불확실하지만 안정한 전달 함수이다. 제어 입력의 갱신 규칙은 식 (15)와 같이 주어진다.

$$V_{k+1}(s) = W_1(s)(V_k(s) + C(s)E_k(s)) \quad (15)$$

여기서, $W_1(s)$ 는 성능 가중치 함수이고, $C(s)$ 는 궤환 제어기이다.

정리 4 : 그림 2와 같은 궤환 기반의 반복학습제어 시스템을 고려할 때, 식 (15)의 입력 갱신 규칙을 가진 반복학습제어 시스템의 추종오차가 \mathcal{L}_2 -놈 센스에서 잔존 오차 $e_\infty(t)$ 가

$$\begin{aligned} e_\infty(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 - W_1}{1 - W_1 + CG_n(1 + \Delta W_2)} Y_r \right) \end{aligned} \quad (16)$$

로 수렴하기 위한 **필요충분조건**은 궤환 제어기가 강인 성능 조건으로 알려진

$$\|W_1 S\| + \|W_2 T\|_\infty < 1 \quad (17)$$

을 만족하는 것이다. 여기서, $S = 1/(1 + CG_n)$ 는 공칭 감도 함수이고, $T = 1 - S$ 로 공칭 상보 감도 함수이다.

증명 : (충분조건) 정리 3의 증명과 유사하게, $k + 1$ 번째 반복 작업을 수행할 때 추종 오차 $E_{k+1}(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$E_{k+1} = \left(\frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right) E_k + \frac{1 - W_1}{1 + CG_n(1 + \Delta W_2)} Y_r \quad (18)$$

k 번째 반복 작업 시 추종 오차도 위와 유사하게 구해진다. 연속적인 반복 작업의 두 추종 오차의 차를 구하면 다음과 같다.

$$E_{k+1} - E_k = \left(\frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right) (E_k - E_{k-1}).$$

이 결과로부터,

$$\begin{aligned} \|E_{k+1}(s) - E_k(s)\|_2 &= \|e_{k+1}(t) - e_k(t)\|_2 \\ &\leq \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \cdot \|e_k(t) - e_{k-1}(t)\|_2 \end{aligned}$$

의 관계를 구할 수 있다. 따라서,

$$\frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} < 1 \quad (19)$$

의 조건을 만족하면 추종 오차는 $e_\infty(t)$ 로 수렴한다. 식 (19)가 강인 성능 조건 식 (17)로 변환되는 것은 [29]를 참고하기 바란다. $e_\infty(t)$ 는 식 (18)에서 E_k 와 E_{k+1} 를 E_∞ 로 치환함으로써 구할 수 있다.

(필요조건) 먼저 다음 부등식을 만족하는 w_0 가 있다고 가정하자.

$$\frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \geq 1 = \frac{W_1(jw_0)S(jw_0)}{1 + \Delta(jw_0)W_2(jw_0)T(jw_0)} \quad (20)$$

그리고 다음을 만족하는 $V_1(s)$ 과 $Y_r(s)$ 를 선정하자.

$$|E_2(jw) - E_1(jw)| = \begin{cases} c & \text{if } |w - w_0| < \epsilon \text{ or } |w + w_0| < \epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

여기서, $0 < \epsilon \ll 1$ 이고, $c = c_0 \sqrt{\pi/2\epsilon}$ 이다. 그러면,

$$\begin{aligned} \|e_2(t) - e_1(t)\|_2^2 &= \|E_2(s) - E_1(s)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_2(jw) - E_1(jw)|^2 dw \\ &= c_0^2 \end{aligned}$$

가 된다. $\|e_3(t) - e_2(t)\|_2$ 의 경우, 식 (20)으로 인해 다음과 같은 결과가 나타난다.

$$\begin{aligned} \|e_3(t) - e_2(t)\|_2^2 &= \|E_3(s) - E_2(s)\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} |E_2 - E_1|^2 dw \\ &\cong \frac{c_0^2}{2\pi} \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \Big|_{w=w_0} \cdot \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{c_0^2}{2\pi} \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \Big|_{w=-w_0}^2 \cdot \pi \\
 & = \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \Big|_{\infty}^2 \cdot c_0^2 \geq c_0^2 \\
 & = \|E_2(s) - E_1(s)\|_2^2 = \|e_2(t) - e_1(t)\|_2^2
 \end{aligned}$$

이와 유사한 방법으로 모든 k 에 대해서,

$$\|E_{k+1}(s) - E_k(s)\|_2 \geq \|E_k(s) - E_{k-1}(s)\|_2$$

임을 보일 수 있다. 그러므로 강인 성능 조건이 위배되면, k 가 증가함에 따라 추종 오차는 발산한다. 즉, 강인 성능 조건은 수렴을 위한 필요조건이다. ■

이 결과로부터 두 가지 중요한 사실이 확인된다. 첫 번째, 기존의 반복학습제어의 수렴 조건들은 충분조건이었다. 그러나 강인 제어에서 알려진 강인 성능 조건은 단순히 반복학습제어의 수렴을 위한 충분조건일뿐만 아니라 필요조건임을 증명하였다. 두 번째로는 성능 가중치 함수 $W(s)$ 를 이용하여 강인 성능 조건을 만족하는 폐환 제어를 설계하면 그것이 바로 반복학습제어의 학습 필터의 역할을 수행한다. 즉, 폐환 제어기와 반복학습제어기를 동시에 설계할 수 있다.

6. 결론

본고에서는 반복학습제어의 탄생과 기본 원리에 대해서 설명하였다. 반복학습제어 시스템을 설계하는 다양한 방법에 대해서 소개하였다. 반복학습제어와 관련된 최근의 관심 분야인 폐환 제어와의 연관성에 대해서 소개하고 그 연구 결과를 간단히 제시하였다.

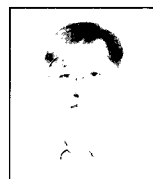
반복학습제어는 반복 작업을 통해서 성능을 개선한다는 기본 개념 위에서 성장해왔다. 이와 유사한 개념에 출발한 제어 분야로는 반복 제어[30], 선형 반복 프로세스(linear repetitive process)[31] 등이 있다. 반복학습제어는 이들 제어 분야뿐만 아니라, 적응 제어와 강인 제어의 연구 결과를 결합하여 보다 한층 더 발전하고 있다.

참고문헌

- [1] K. L. Moore, *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] K. L. Moore, "Iterative learning control an expository overview," *Applied and Computational Controls, Signal Processing and Circuits*, pp. 425-488, 1998.
- [3] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Betterment operation of robots by learning," *J. Robotic Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 123-140, 1984.
- [4] S.-R. Oh, Z. Bien and I. H. Suh, "An iterative learning control method with application for the robot manipulators," *IEEE J. Robotics and Automation*, vol. 4, no. 5, pp. 508-514, 1988.
- [5] T.-Y. Kuc, K. Nam, and J. S. Lee, "An iterative learning control of robot manipulator," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 6, pp. 835-842, 1991.
- [6] J. J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, 1988.
- [7] A. De Luca, G. Paesano, and G. Ulivi, "A frequency domain approach to learning control: Implementation for a robot manipulator," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 39, no. 1, pp. 1-10, 1992.
- [8] S. S. Garimella and K. Srinivasan, "Application of iterative learning control to coil-to-coil in rolling," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 6, no. 2, pp. 281-293, 1998.
- [9] D. de Roover and O. H. Bosgra, "Synthesis of robust multivariable iterative learning controllers with application to a wafer stage motion system," *Int. J. Control*, vol. 73, no. 10, pp. 968-979, 2000.
- [10] M. Norrlöf and S. Gunnarsson, "Experimental comparison of some classical iterative learning control algorithms," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 18, no. 4, pp. 636-641, 2002.
- [11] D. Wang, "A simple iterative learning controller for manipulators with flexible joints," *Automatica*, vol. 31, no. 9, pp. 1341-1344, 1995.
- [12] Y. Chen, Z. Gong, and C. Wen, "Analysis of a high-order iterative learning control algorithm for uncertain nonlinear systems with state delays," *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 345-353, 1998.
- [13] A. Tayebi and J.-X. Xu, "Observer-based iterative learning control for a class of time-varying nonlinear systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, no. 3, pp. 452-455, 2003.
- [14] H. S. Lee and Z. Bien, "Note on convergence properties of iterative learning controller with respect to sup-norm," *Automatica*, vol. 33, no. 8, pp. 1591-1593, 1997.

- [15] M. Togai and O. Yamano, "Analysis and design of an optimal learning control scheme for industrial robots: A discrete system approach," *Proc. Conf. on Decision and Control*, pp. 1399-1404, 1985.
- [16] T.-Y. Kuc and J. S. Lee, "Learning strictly positive real linear systems with uncertain parameters and unknown input disturbances," *Automatica*, vol. 37, no. 5, pp. 791-792, 1996.
- [17] M. Norrlöf, "An adaptive iterative learning control algorithm with experiments on an industrial robot," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 18, no. 2, pp. 245-251, 2002.
- [18] N. Amann, D. H. Owens, E. Rogers, "Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence," *IEE Proc.-Control Theory and Applications*, vol. 143, no. 2, pp. 217-224, 1996.
- [19] N. Amann, D. H. Owens, E. Rogers, "Iterative learning control using optimal feedback and feedforward actions," *Int. J. Control*, vol. 165, no. 2, pp. 277-293, 1996.
- [20] F. Padieu and R. Su, "An H_∞ approach to learning control systems," *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 4, pp. 465-474, 1990.
- [21] C. L. Roh, M. N. Lee, and M. J. Chung, "ILC for nonminimum phase system," *Int. J. Systems Science*, vol. 27, no. 4, pp. 419-424, 1996.
- [22] J.-H. Moon, T.-Y. Doh, and M. J. Chung, "A robust approach to iterative learning control design for uncertain systems," *Automatica*, vol. 34, no. 8, pp. 1001-1004, 1998.
- [23] T.-Y. Doh, J.-H. Moon, K. B. Jin, and M. J. Chung, "Robust iterative learning control with current feedback for uncertain linear systems," *Int. J. Systems Science*, vol. 30, no. 1, pp. 39-47, 1999.
- [24] P. Bondi, G. Casalino, and L. Gambardella, "On iterative learning control theory for robot manipulator," *IEEE J. Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 14-22, 1988.
- [25] P. Lucibello, "On the role of high-gain feedback in P-type learning control of robot arm", *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 12, no. 4, pp. 602-605, 1996.
- [26] Q. Hu, J.-X. Xu, and T. H. Lee, "Iterative learning control design for Smith predictor," *System and Control Letters*, vol. 44, pp. 201-210, 2001.
- [27] A. Tayebi and M. B. Zaremba, "Robust iterative learning control design in straightforward for uncertain LTI systems satisfying the robust performance condition," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 48, no. 1, pp. 101-106, 2003.
- [28] T. Y. Doh, "Comments on "Robust iterative learning control design is straightforward for uncertain LTI systems satisfying the robust performance condition",," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 49, no. 4, pp. 629-630, 2004.
- [29] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Maxwell Macmillan, 1992.
- [30] S. Hara, Y. Yamamoto, T. Omata, and M. Nakano, "Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 33, no. 7, pp. 659-668, 1988.
- [31] E. Rogers and D. H. Owens, *Stability Analysis for Linear Repetitive Processes, Lecture Notes in Control and Information Sciences Series*, vol. 175, Springer-Verlag, 1992.

----- 저자약력 -----



《도 태 용》

- 1969년 2월 18일생.
- 1992년 2월 경북대학교 전자공학과 (공학사).
- 1994년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사).
- 1999년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사).
- 1997년 3월~2001년 8월 삼성전자 디지털미디어연구소 책임연구원.
- 2001년 9월~2002년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 BK21 초빙교수.
- 2002년 3월~현재 한밭대학교 제어계측공학과 교수.
- 관심분야 : 반복학습제어, 반복제어, 강인제어, DSP 기반 제어 시스템 설계, 지능로봇.