

$C(sI-A)^{-1}B$ 가 최소위상이 될 LMI 조건을 이용한 해석과 설계

Analysis and Design Using LMI Condition for $C(sI-A)^{-1}B$ to Be Minimum Phase

이재관, 최한호*
(Jae-Kwan Lee and Han Ho Choi)

Abstract : We derive a linear matrix inequality(LMI) condition guaranteeing that any invariant zeros of a triple (A, B, C) lie in the open left half plane of the complex plane, i.e. $C(sI-A)^{-1}B$ is minimum phase. The LMI condition is equivalent to a certain constrained Lyapunov matrix equation which can be found in many results relating to stability analysis or control design. We show that the LMI condition can be used to simplify various control engineering problems such as a dynamic output feedback control problem, a variable structure static output feedback control problem, and a nonlinear system observer design problem. Finally, we give some numerical examples.

Keywords : Linear Matrix Inequality(LMI), minimum phase system, zero, output feedback, uncertain system

I. 서론

LMI는 매우 다양한 선형 제어 문제를 위한 매우 강력한 도구로 사용되고 있다. 특히 LMI기반 접근법은 매우 효율적인 수치적인 해를 제공하고, 자료에 불확실성을 갖고 있는 문제에 적절하고, 매우 다양한 사양들을 설계에서 고려할 수 있도록 하는 등의 장점이 있기 때문에 많은 연구자들이 다양한 제어 문제를 LMI 최적화 문제로 전환하기 위한 방법들을 제안하였다[1,2]. 본 논문에서는 주어진 (A, B, C) 의 영점들이 복소평면의 좌반부에 위치하는 즉 $C(sI-A)^{-1}B$ 가 최소위상이 될 LMI조건을 유도한다. 제안된 LMI 조건은 [3-14]에서 다룬 다양한 제어 공학 문제들에서 접하게 되는 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식과 동치이다. 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식의 양한정 해의 존재 여부를 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 이며 $C(sI-A)^{-1}B$ 가 최소위상인가를 확인하여 판단할 수 있음을 보인다. 그리고 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식의 해를 주어진 LMI조건을 풀어 구할 수 있음을 보인다. 이는 [3-14]에서 다룬 다양한 제어 공학 문제들을 단순화할 수 있음을 의미한다. 응용 예로 동적 출력 제한 제어기 설계, 정적 출력 제한 가변 구조 제어기 설계, 비선형 시스템 관측기 설계 문제를 다루고 수치적인 예를 제공한다.

II. 시스템 모델과 이전 결과들

우리는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[u + \zeta(t, x, u)] \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $x \in R^n$ 은 상태이고 $u \in R^m$ 은 제어 입력이고 $y \in R^p$ 는 출력이고 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: A, B, C 는 적절한 차원을 갖는 상수 행렬들이다.

A2: $\text{rank}(B) = m, \text{rank}(C) = p$

A3: (A, B, C) 는 안정 가능(stabilizable)하고 탐지가능(detectable)하다.

A4: $\zeta(t, x, u)$ 는 값을 모르나 크기가 제한되어 있다.

다음의 정의와 보조정리들은 주요 결과를 얻기 위해 필요한 것들이다.

정의 1: 주어진 시불변 시스템 $C(sI-A)^{-1}B$ 또는 (A, B, C) 에 대하여 $\Sigma(s)$ 를 다음으로 정의하자.

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

그러면 $\text{rank}(\Sigma(s)) < n + \min(m, p)$ 가 되도록 하는 복소수 s 를 시스템의 영점이라 부른다.

정의 2: 주어진 시스템 $C(sI-A)^{-1}B$ 의 영점들이 모두 복소평면의 좌반부에 위치하면 즉 다음을 만족시키면 그 시스템을 최소위상이라 한다.

$$\text{rank}(\Sigma(s)) = n + \min(m, p) \quad \forall \text{Re}(s) \geq 0$$

보조정리 1: 주어진 행렬 $G \in R^{n \times q}, K \in R^{n \times r}$ 에 대하여 $\text{rank}(G) = q \leq n, \text{rank}(K) = r \leq n$ 이라고 가정하자. 그러면 $G^T P K = 0$ 를 만족시키는 대칭행렬 P 의 일반해는 $P = \Theta X \Theta^T + \Gamma Y \Gamma^T$ 의 형태로 주어진다. 여기에서 Θ, Γ 는 각각 G^T, K^T 의 널공간(null space)을 이루는 기저 벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬 즉 G, K 의 orthogonal complement이며 X, Y 는 적절한 차원을 갖는 대칭행렬이다.

증명: $M = [\Theta, \Gamma] \in R^{n \times n}$ 는 역행렬을 갖기 때문에 대칭행렬 P 는 다음처럼 표현될 수 있다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2005. 8. 2., 채택확정: 2005. 9. 15.

이재관: 삼성 SDS(jaegwan.lee@samsung.com)

최한호: 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

$$P = \begin{bmatrix} \Theta^T \\ G^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T \\ G^T \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$= \Theta P_1 \Theta^T + \Theta P_2 G^T + G P_2^T \Theta^T + G P_3 G^T$$

여기에서 $P_1 = P_1^T \in R^{(n-q) \times (n-q)}$, $P_3 = P_3^T \in R^{q \times q}$ 그리고 $P_2 \in R^{(n-q) \times q}$ 이다. $G^T P K = 0$ 와 (2)는 다음을 만족시키는 해 $H \in R^{q \times (n-n)}$ 의 존재를 의미한다.

$$P_2^T \Theta^T + P_3 G^T = H H^T$$

그러므로 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$(P_2^T \Theta^T + P_3 G^T) M = [P_2^T \Theta^T \Theta, P_3 G^T G]$$

$$= H H^T M = [H H^T \Theta, H H^T G]$$

이는 $P_2^T = H H^T \Theta (\Theta^T \Theta)^{-1}$, $P_3 = H H^T G (G^T G)^{-1}$ 임을 의미하고 $P_3 = P_3^T$ 이므로 $H = (G^T G)^{-1} G^T \Pi \Pi^T$ 의 형태이어야 한다. 여기에서 $\Pi = \Pi^T \in R^{(n-n) \times (n-n)}$ 이다. P_2, P_3 는 Π 를 써 다음처럼 표현할 수 있다.

$$P_2^T = (G^T G)^{-1} G^T \Pi \Pi^T \Theta (\Theta^T \Theta)^{-1}$$

$$P_3 = (G^T G)^{-1} G^T \Pi \Pi^T G (G^T G)^{-1}$$

이는 (2)에 주어진 P 가 다음처럼 표현할 수 있음을 의미한다.

$$P = \Theta P_1 \Theta^T + \Theta (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T \Pi \Pi^T G (G^T G)^{-1} G^T$$

$$+ G (G^T G)^{-1} G^T \Pi \Pi^T [\Theta (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta + G (G^T G)^{-1} G^T]$$

결국 $I = M M^{-1} = \Theta (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T + G (G^T G)^{-1} G^T$ 를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$P = \Theta [P_1 - (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T \Pi \Pi^T \Theta (\Theta^T \Theta)^{-1}] \Theta^T + \Pi \Pi^T$$

이는 $P = \Theta X \Theta^T + \Gamma Y \Gamma^T$ 의 형태로 주어짐을 의미하는 것이다. ■

보조정리 2: $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B) = m$ 이라고 가정하자. 그러면 (1)의 (A, B, C) 에서 B, C 를 다음의 형태로 변환하는 변환행렬 $N \in R^{n \times n}$ 가 존재한다.

$$\bar{B} = NB = [0, 0, I]^T, \quad \bar{C} = CN^{-1} = [0, \bar{E}, E]$$

여기에서 $E = CB \in R^{p \times m}$ 이고 $\bar{E} \in R^{p \times (p-m)}$ 는 E^T 의 널공간(null space)을 이루는 기저 벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬 즉 E 의 orthogonal complement로 만약 $p = m$ 인 경우 $\bar{E} = 0$ 이다.

증명: $\Lambda^T \in R^{n \times (n-p)}$ 를 C 의 널공간(null space)을 이루는 기저 벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬 즉 Λ^T 는 C^T 의 orthogonal complement라고 하자. 그러면 변환행렬 $N_1 = [\Lambda^T C^T]^T$ 를 정의할 수 있고 $N_1^{-1} = [\Lambda^T (\Lambda \Lambda^T)^{-1}, C^T (C C^T)^{-1}]$ 이 성립함을 쉽게 알 수 있다. N_1 에 대하여 (A, B, C) 의 좌표를 변환하여 다음을 얻을 수 있다.

$$A_1 = N_1 A N_1^{-1}, B_1 = N_1 B = \begin{bmatrix} AB \\ E \end{bmatrix}, C_1 = C N_1^{-1} = [0, I]$$

그리고 다음의 변환행렬 N_2 를 고려하자.

$$N_2 = \begin{bmatrix} I - \Lambda B (E^T E)^{-1} E^T \\ 0 & (\bar{E}^T \bar{E})^{-1} \bar{E}^T \\ 0 & (E^T E)^{-1} E^T \end{bmatrix}, N_2^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{E}^T \\ B^T \Lambda^T & E^T \end{bmatrix}^T$$

결국 변환행렬 N_2 를 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\bar{A} = N_2 A_1 N_2^{-1},$$

$$\bar{B} = N_2 B_1 = [0, 0, I]^T, \quad \bar{C} = C_1 N_2^{-1} = [0, \bar{E}, E]$$

III. 주요결과

정리1: Φ, Λ^T 를 B^T, C 의 널공간(null space)을 이루는 기저 벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬 즉 B, C^T 의 orthogonal complement라고 하자. 그리고 (1)의 (A, B, C) 를 고려하자. 그러면 다음의 3항은 동치이다.

S1: 다음의 LMI는 해 X, Y 가 존재한다.

$$X = X^T, Y = Y^T, \Phi X \Phi^T + C^T Y C > 0,$$

$$\Lambda (\Phi X \Phi^T A + A^T \Phi X \Phi^T) \Lambda^T < 0 \quad (3)$$

S2: 다음의 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식을 만족시키는 리아푸노프 행렬 P 가 존재한다.

$$P > 0, \Lambda (PA + A^T P) \Lambda^T < 0, B^T P \Lambda^T = 0 \quad (4)$$

S3: $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B) = m$ 이고 (A, B, C) 는 최소위상이다.

증명: 보조정리 1은 (3)과 (4)가 동치임을 의미한다. 결국 S1과 S2는 명백하게 동치이다. S2와 S3가 동치임을 보이겠다.

(S2=>S3) S2가 성립한다고 가정하자. 즉 (4)의 해가 존재한다고 가정하자. $B^T P \Lambda^T = 0$ 는 $B^T P = FC$ 를 만족시키는 행렬 $F \in R^{m \times p}$ 의 존재를 의미하고 이는 다음을 의미한다 [15].

$$m = \text{rank}(B) = \text{rank}(B^T P B) = \text{rank}(F C B)$$

$$\leq \text{rank}(CB) \leq \min(p, m) = m$$

s 를 영점이라고 하면 정의1에 의해 다음을 만족시키는 $n + m$ 차원의 0이 아닌 복소벡터 $z = [z_1^T, z_2^T]^T$ 가 존재한다.

$$s z_1 - A z_1 + B z_2 = 0, \quad -C z_1 = 0 \quad (5)$$

한편 [1]에 주어진 Finsler의 보조정리는 (4)를 만족시키는 해 P 에 대하여 다음을 만족시키는 양수 ϵ 가 존재함을 의미한다.

$$P > 0, PA + A^T P - \epsilon C^T C < 0 \quad (6)$$

(6)의 좌우에 z_1^*, z_1 를 곱해주어 다음을 얻을 수 있다.

$$z_1^* P z_1 > 0, z_1^* (PA + A^T P) z_1 - \epsilon z_1^* C^T C z_1 < 0$$

위 식과 (5), $B^T P = FC$ 를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$(s + s^*) z_1^* P z_1 + 2 z_1^* P B z_2 = (s + s^*) z_1^* P z_1 < 0$$

위 식은 영점들이 0보다 작음을 의미한다.

(S3⇒S2) S3가 성립한다고 가정하자. 보조정리 2에 의하여 (A, B, C) 는 $\bar{B} = [0, 0, I]^T, \bar{C} = [0, \bar{E}, E]$ 의 형태를 갖도록 변환이 가능하다. 그러므로 일반성의 훼손없이 다음과 같이 가정하자.

$$B = [0, 0, I]^T, C = [0, C_1, C_2], A = [I, 0, 0] \quad (7)$$

여기에서 $C_0 = [C_1, C_2] \in R^{p \times p}$ 는 역행렬이 존재하고 $C_1 \in R^{p \times (p-m)}, C_2 \in R^{p \times m}$ 이다. A 를 다음과 같이 나누자.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기에서 $A_{31} \in R^{m \times (n-p)}, A_{32} \in R^{m \times (p-m)}, A_{33} \in R^{m \times m}, A_{11} \in R^{(n-p) \times (n-p)}, A_{12} \in R^{(n-p) \times (p-m)}, A_{13} \in R^{(n-p) \times m}, A_{21} \in R^{(p-m) \times (n-p)}, A_{22} \in R^{(p-m) \times (p-m)}, A_{23} \in R^{(p-m) \times m}$.

정의 2, (7), (8)에 의해 모든 실수부분이 0보다 크거나 같은 복소수 s 에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & 0 \\ -A_{21} & sI - A_{22} & -A_{23} & 0 \\ -A_{31} & -A_{32} & sI - A_{33} & I \\ 0 & -C_1 & -C_2 & 0 \end{pmatrix} = n + m \quad (9)$$

$C_0 = [C_1, C_2], I$ 둘 모두 역행렬이 존재하기 때문에 (9) 식은 다음을 의미한다.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} sI - A_{11} \\ -A_{21} \end{pmatrix} = n - p, \quad \forall \text{Re}(s) \geq 0$$

그리고 이는 (A_{21}, A_{11}) 이 탐지가능(detectable)하다는 것을 의미한다. 즉 다음을 만족시키는 (P_1, P_2) 가 존재한다 [15].

$$P_1 > 0, P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 + P_2 A_{21} + A_{21}^T P_2^T < 0$$

만약 우리가 P 를 다음과 같이 놓으면

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & 0 \\ P_2^T & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad P_3 > P_2^T P_1^{-1} P_2 \quad (10)$$

[1]에 주어진 Schur complement 공식에 따라 $P > 0$ 이 됨을 알 수 있다. (7)과 (10)의 값을 가지고 (4)가 성립함을 쉽게 알 수 있다. ■

주 1: 정리 1을 사용하여 (A, B, C) 가 최소위상이며 $CB = B^T C^T > 0$ 이면 시스템 $C(sI - A)^{-1}B$ 를 상수 출력 변환을 사용하여 strictly positive real 시스템으로 만들 수 있

음을 보일 수 있다. 이는 [12]와 [13]에 주어진 결과와 유사한 것이다. 그리고 [16]과 [17]에서는 $m = p, \text{rank}(C) = \text{rank}(B) = m$ 인 아주 제한적인 경우에 대하여 유사한 결과를 유도했다.

보조정리 1과 Schur complement 공식[1]을 사용하면 정리 1을 일반화시킨 다음의 따름정리를 얻을 수 있다.

따름 정리 1: (1)의 (A, B, C) 를 고려하자. D, E 를 적절한 차원의 상수 행렬이라고 가정하고 다음의 구속조건을 갖는 리카치 행렬식을 고려하자.

$$P > 0, B^T P A^T = 0, \Lambda(PA + A^T P + EE^T + PDD^T P)\Lambda^T < 0 \quad (11)$$

(11)의 해가 존재할 필요충분조건은 다음 LMI의 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} X = X^T, Y = Y^T, \Phi X \Phi^T + C^T Y C > 0 \\ \Lambda(\Phi X \Phi^T A + A^T \Phi X \Phi^T)\Lambda^T & \Lambda \Phi X \Phi^T D^T & \Lambda E \\ D \Phi X \Phi^T \Lambda^T & -I & 0 \\ E^T \Lambda^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

(12)의 해가 존재하면 (11)을 만족시키는 리아푸노프 행렬은 $P = \Phi X \Phi^T + C^T Y C$ 로 주어진다. 그리고 만약 $\text{rank}(CB) \neq \text{rank}(B)$ 이거나 (A, B, C) 가 최소위상이 아니면 구속조건을 갖는 리카치 행렬식 (11)과 LMI (12)의 해는 존재하지 않는다.

주 2: 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식 (4)와 비슷한 형태의 비선형 행렬식은 [3-4]와 [7-13]처럼 (1)로 표현될 수 있는 정합조건을 만족하는 시스템을 위한 안정도 해석이나 제어기 설계 문제를 다룬 논문들에서 접할 수 있고 구속조건을 갖는 리카치 행렬식 (11)과 비슷한 비선형 행렬식들은 [5-6]과 [14]처럼 시스템 행렬이 $A + DF(t)E$ (여기에서 $\|F(t)\| \leq 1$) 형태를 취해 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성을 포함한 시스템을 위한 안정도 해석이나 제어기 설계 문제와 관련된 예전의 결과들에서 접할 수 있다. 정리 1과 따름정리 1은 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 의 성립 여부와 (A, B, C) 의 최소위상 여부를 시험해 보아 (4)나 (11) 형태의 비선형 행렬식 해의 존재 여부를 판단하고 해가 존재하는 경우에는 (4)나 (11) 형태의 비선형 행렬식 대신에 LMI 식인 (3)과 (12)를 풀어 X, Y 를 구해 (4)나 (11)의 해인 리아푸노프 행렬 P 값을 공식 $P = \Phi X \Phi^T + C^T Y C$ 를 사용해 구할 수 있음을 의미한다. 즉 위의 정리 1과 따름정리는 [3-14]등에서 고려되었던 안정도 해석이나 제어기 설계 문제를 LMI 최적화 문제로 단순화시킬 수 있음을 의미한다.

정리 1과 보조정리 1은 출력이 입력보다 많은 경우(실제 많은 경우가 이에 해당함)에 적용된다. 이와 반대되는 경우 $p = \text{rank}(C) \leq \text{rank}(B) = m$ 즉 입력이 출력보다 많은 경우는 (A, B, C) 를 (A^T, C^T, B^T) 로 대체하면 되므로 정리 1에 대응하는 다음의 결과를 쉽게 얻을 수 있다.

따름 정리 2: (1)의 (A, B, C) 를 고려하자. 그러면 다음의 3항은 동치이다.

S4: 다음의 LMI는 해 X, Y 가 존재한다.

$$X = X^T, Y = Y^T, \Lambda^T X \Lambda + B Y B^T > 0, \quad (13)$$

$$\Phi^T (\Lambda^T X \Lambda \Lambda + A^T \Lambda^T X \Lambda) \Phi < 0$$

S2: 다음의 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식을 만족시키는 리아푸노프 행렬 P 가 존재한다.

$$P > 0, \Phi^T (PA + A^T P) \Phi < 0, CP\Phi = 0 \quad (14)$$

S3: $\text{rank}(CB) = \text{rank}(C) = p$ 이고 (A, B, C) 는 최소위상이다.

IV. 응용 예

1. 동적 출력 제한 안정화 문제

[3]에서는 $\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1 \|u\| + r_2 \|x\|$ 이 성립한다는 가정하에서 (1)을 위한 다음과 같은 관측기 기반 제한 제어기가 제안되었다.

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu, u = K\hat{x} \quad (15)$$

여기에서 K 는 $u = Kx$ 로 했을 때 전체 제어시스템의 quadratic 안정도를 보장하는 제한 이득이고 \hat{x} 는 관측된 상태이고 L 은 관측기 이득이고 r_1, r_2 는 작은 기지의 값들이다. [3]의 저자들은 만약 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식 (4)가 해를 갖고 γ 가 매우 큰 수이고 관측기 이득이 $L = \gamma P^{-1} C^T$ 로 주어지면 시스템 (1)과 (15)의 폐회로 시스템은 안정하다는 것을 보였다. 결국 정리 1과 [3]의 결과를 이용하면 다음과 같은 새로운 결과를 얻을 수 있다.

따름 정리 3: (1)에서 $\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1 \|u\| + r_2 \|x\|$ 이 성립한다고 하자. $u = Kx$ 로 했을 때 전체 제어시스템의 quadratic 안정도가 보장된다고 가정하자. 만약 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 이고 (A, B, C) 는 최소위상이면 (1)은 관측기 기반 제어기 (15)에 의해 안정화 가능하다. 이 경우 LMI (3)은 해가 존재하고 충분히 큰 γ 에 대하여 관측기 이득을 $L = \gamma (\Phi X \Phi^T + C^T Y C)^{-1} C^T$ 로 놓으면 폐회로 응답은 안정하다.

위의 따름 정리는 [3]에 주어진 동적 출력 제한 안정화 조건의 해 존재유무를 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 이고 (A, B, C) 가 최소위상인가를 통해 판단할 수 있고 관측기 이득은 [3]에 주어진 비선형 행렬식의 형태로 주어진 동적 출력 제한 안정화 조건대신에 LMI (3)을 풀어 구할 수 있음을 의미한다.

2. 정적 가변구조 출력 제한 안정화 문제

[6]에서는 SB 의 역행렬이 존재하고, $Sx = 0$ 으로 주어지는 스위칭평면에 구속된 등가 동역학 시스템을 안정하게 하고, $S = GC$ 를 만족시키는 G 의 존재를 보장하는 행렬 S 가 존재할 필요충분조건을 다음과 같은 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식으로 주었다.

$$W > 0, \Phi^T (WA^T + AW) \Phi < 0, B^T = GCW \quad (16)$$

$B^T = GCW$ 는 $W^{-1}A^T = \Phi L$ 를 만족시키는 L 의 존재를

의미하므로 (16)의 해가 존재하면 다음의 행렬식이 성립한다.

$$W > 0, L^T \Phi^T (WA^T + AW) \Phi L < 0, B^T W^{-1} A^T = 0$$

위 식은 다음을 의미한다.

$$W > 0, \Lambda (A^T W^{-1} + W^{-1} A) \Lambda^T < 0, B^T W^{-1} A^T = 0$$

만약 $P = W^{-1}$ 로 변수치환하면 위식은 (4)와 같은 형태이다. 결국 다음과 같은 새로운 결과를 얻을 수 있다.

따름 정리 4: (1)에서 $\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1 \|u\| + r_2 \|x\|$ 이 $0 \leq r_1 < 1, r_2 \geq 0$ 에 대하여 성립한다고 하자. SB 의 역행렬이 존재하고, 스위칭평면 $Sx = 0$ 에 구속된 등가 동역학 시스템을 안정하게 하고, $S = GC$ 를 만족시키는 G 의 존재를 보장하는 행렬 S 가 존재한다고 가정하자. 그러면 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 며 (A, B, C) 는 최소위상이다.

위의 따름정리 4는 (A, B, C) 가 비최소위상이면 (1)은 선형 스위칭평면을 갖는 정적 가변구조 출력 제한 제어기를 통해 안정화될 수 없음을 의미한다. 그러므로 시스템의 최소위상 여부를 미리 시험해서 [6]에 주어진 알고리즘의 적용가능성 여부를 판단할 수 있다.

3. 비선형 시스템 관측기 설계

[9-11]에서는 $\rho(u, y, t)$ 라는 기지의 0보다 크거나 같은 값을 갖는 함수에 대하여 불확실성 $\zeta(t, x, u)$ 가 $\|\xi(t, x, u)\| \leq \rho(u, y, t)$ 만족시키는 경우 시스템 (1)을 위한 관측기 설계법이 제안되었다. [9-11]의 방법은 다음과 같은 구속조건을 갖는 리아푸노프행렬식을 만족시키는 해 (P, L, F) 의 존재를 요구한다.

$$P > 0, PB = C^T F^T, P(A - LC) + (A - LC)^T P = -Q < 0 \quad (17)$$

[10]의 저자는 다음과 같은 형태의 관측기를 제안했다.

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu - \rho(u, y, t) \frac{BFCe}{\|FCd\|} \quad (18)$$

여기에서 $e = \hat{x} - x$ 로 관측오차를 의미한다. [9-11]에는 (P, L, F) 를 찾기위한 체계적인 알고리즘이 주어지지 않았음에 유의해야 한다. [1]에 주어진 Projection lemma에 의해 (17)은 (4)와 동치임을 보일 수 있다. 그러므로 (17)식의 해 (P, L, F) 가 존재할 필요충분조건은 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 며 (A, B, C) 는 최소위상임을 알 수 있다. 그리고 정리 1에 의해 (P, L, F) 를 구하기 위한 식을 다음처럼 얻을 수 있다.

따름 정리 5: (1)에서 $\rho(u, y, t)$ 라는 기지의 0보다 크거나 같은 값을 갖는 함수에 대하여 불확실성 $\zeta(t, x, u)$ 가 $\|\xi(t, x, u)\| \leq \rho(u, y, t)$ 를 만족시킨다고 가정하자. $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 며 (A, B, C) 는 최소위상이라고 가정하자. 그러면 (17)은 해가 존재하고 다음과 같은 이득을 갖는 (18)의 관측기는 관측오차의 안정성을 보장한다.

$$L = \gamma P^{-1}C^T, F = B^T C^T Y, P = \Phi X \Phi^T + C^T Y C \quad (19)$$

여기에서 γ 는 충분히 큰 양수이고 X, Y 는 LMI (3)의 해이다.

증명: $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 이며 (A, B, C) 는 최소위상이라고 가정하자. 정리 1에 의해 (3)의 해는 존재한다. [1]에 주어진 Projection lemma에 의해 (17)은 (4)와 동치이므로 (17)의 해가 존재할 필요충분조건은 LMI (3)의 해가 존재하는 것이다. [1]에 주어진 Finsler의 보조정리에 의해 (3)의 해가 존재하고 (P, L, F) 가 (19)처럼 주어졌다면 다음이 성립한다.

$$B^T(\Phi X \Phi^T + C^T Y C) = B^T P = B^T C^T Y C = F C \\ PA + A^T P - 2\gamma C^T C = P(A - LC) + (A - LC)^T P < 0 \quad (20)$$

(1)과 (18)을 사용하여 다음과 같은 오차 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{e} = (A - LC)e - B\xi - \rho \frac{BFCe}{\|FCe\|} \quad (21)$$

리아푸노프 함수를 $V = e^T P e$ 라고 하면 도함수는 다음처럼 구해진다.

$$\dot{V} = 2e^T P(A - LC)e - 2e^T P B \xi - 2\rho \frac{e^T P B F C e}{\|FCe\|} \\ \leq 2e^T P(A - LC)e + 2\|FCe\|\rho - 2\|FCe\|\rho \\ \leq -e^T Q_0 e$$

여기에서 $-Q_0 = PA + A^T P - 2\gamma C^T C, PB = C^T F^T$ 가 사용되었다. (20)은 $-Q_0 < 0$ 를 의미하므로 결국 관측오차는 지수적으로 안정하다. ■

V. 수치적 예

예 1 : 다음의 전달함수를 고려하자.

$$H(s) = \left[\frac{(s-1)}{s^3}, \frac{(s+1)(s-1)}{s^3} \right]^T \quad (22)$$

(22)의 controllability canonical form은 다음과 같이 구해진다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

(22)는 $H(s)$ 의 영점이 1임을 의미한다. 즉 (22)의 시스템은 비최소위상이다. 결국 따름정리 3과 5는 [3], [9-11]에 주어진 방법은 (23)의 데이터를 갖는 시스템 (1)에 적용 불가능함을 의미한다. 따름정리 4를 이용해서 우리는 (23)의 데이터를 갖는 시스템 (1)은 선형 슬라이딩 평면을 갖는 정적 가변구조 출력 궤환 제어기를 통해 안정화될 수 없음을 의미한다.

예 2 : 다음을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

위의 데이터로부터 우리는 영점이 없고(즉 최소위상)이

며 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 가 성립함을 알 수 있다. 따름정리 3과 5는 [3], [9-11]에 주어진 방법은 (24)의 데이터를 갖는 시스템 (1)에 적용 가능함을 의미한다. LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 LMI (3)의 해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} 162.8 & -162.6 \\ -162.6 & 162.5 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 162.4 & 0.008 \\ 0.008 & 0.825 \end{bmatrix}$$

따름정리 4를 사용하면 다음과 같은 이득을 갖는 관측기 (18)은 관측오차의 안정성을 보장함을 알 수 있다.

$$L = \gamma \begin{bmatrix} -0.296 & 1.215 \\ -23.959 & 0.230 \\ -54.819 & 0.526 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.825 \end{bmatrix}^T$$

여기에서 $\gamma \geq 0.119$ 를 만족시키는 양수이다.

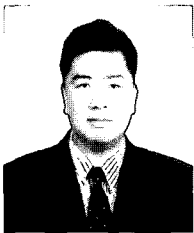
VI. 결론

본 논문에서는 (A, B, C) 가 최소위상이 될 LMI조건을 구하였다. 구해진 LMI조건식은 [3-14]과 같은 많은 제어공학 문제들에서 접할 수 있는 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식과 동치임을 보였다. 그리고 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식 해의 존재여부를 (A, B, C) 의 최소위상여부와 $\text{rank}(CB) = \text{rank}(B)$ 의 성립여부를 통해 판단할 수 있음을 보였다. 구속조건을 갖는 리아푸노프 행렬식의 해가 존재할 경우에는 제안된 LMI조건을 통해 해를 구할 수 있음을 보였다. 그리고 기존 [3-14]과 같은 많은 제어공학 문제들을 쉬운 형태로 변환시킬 수 있음을 수치적인 예와 함께 보였다.

참고문헌

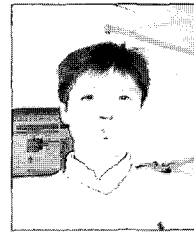
- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory*, PA: SIAM, 1994.
- [2] L. ElGhaoui, and S. Niculescu, "Robust decision problems in engineering: A linear matrix inequality approach," in *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, L. ElGhaoui, and S. Niculescu, eds., PA:Siam, 2000, pp. 3-37.
- [3] A. R. Galimidi, and B. R. Barmish, "The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, pp. 410-419, 1986.
- [4] D. M. Dawson, Z. Qu, and J. C. Carroll, "On the state observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems," *Syst. Control Lett.*, vol. 18, pp. 217-222, 1992.
- [5] C. F. Cheng, "Output feedback stabilization for uncertain systems: constrained Riccati approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 81-84, 1998.
- [6] H. H. Choi, "Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 335-341, 2002.

- [7] 최한호, 국태용, “크기가 제한된 제어를 갖는 가변 구조제어 시스템의 접근 안정 영역 추정,” 제어자동화 시스템 공학 논문지, 제9권, pp. 616-622, 2003.
- [8] A. Steinberg, and M. Corless, “Output feedback stabilization of uncertain dynamical systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, pp. 1025-1027, 1985.
- [10] B. L. Walcott, M. J. Corless, and S. H. Zak, “Comparative study of nonlinear state observation techniques,” *Int. J. Control*, vol. 45, pp. 2109-2132, 1987.
- [11] B. L. Walcott, and S. H. Zak, “Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications,” *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.*, vol. 18, pp. 40-48, 1998.
- [12] C. H. Huang, P. A. Ioannou, J. Maroulas, and M. G. Safonov, “Design of strictly positive real systems using constant output feedback,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, pp. 569-573, 1999.
- [13] I. Barkana, “Comments on ‘Design of strictly positive real systems using constant output feedback,’” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, pp. 2091-2093, 2004.
- [14] H. H. Choi and T.-Y. Kuc, “Comments on ‘Output feedback stabilization for uncertain systems: constrained Riccati approach,’” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, pp. 2044, 2001.
- [15] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, NY: CBS College Publishing, 1984.
- [16] G. Gu, “Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 925-927, 1990.
- [17] K.-S. Kim and Y. Park, “Equivalence between two solvability conditions for a static output feedback problem,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, pp. 1877, 2000.



이재관

1968년 1월 18일생. 1991년 2월 서울대학교 기계설계학과 준우등 졸업(공학사). 1993년 2월 서울대학교 기계설계학과(공학석사). 1999년 2월 서울대학교 기계설계학과(공학박사). 1999년 3월~2001년 2월 서울대학교 정밀기계 설계공동연구소 연구원. 2002년 3월~현재 삼성 SDS 책임 컨설턴트. 관심분야는 반도체 관련 설비 등 동역학 시스템 및 제어기 설계, 유전 알고리즘 및 최적화 알고리즘.



최한호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원. 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수. 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로봇틱스.