韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2005. 5. 제 9권, 제 1호, 31-41

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2005, Vol. 9, No. 1, 31-41

Freudenthal의 재발명 방법에 근거한 초등 수학영재 지도 방안

강 홍 규 (공주교육대학교)

I. 서 론

우리나라에서 2000년에 영재교육진흥법과 그 시행령이 공포되고 영재 교육이 시작된 이래로 그 영역이 점점 확대되어 현재는 초등학생 대상의 영재 교육이 활성화되고 있고 그에 대한 관심과 논의도 증대되고 있다. "어떻게 아동의 지적 능력을 탁월하게 함양시킬 수 있을까?" 이런 질문은 비단 교사뿐만 아니라 자녀의 효율적이고 탁월한 지적 성장에 초미의 관심을 가지는 학부모들도 자주 던지는 질문이 되었다. 이 과정에서 수학은 빠질 수 없는 소재이다. 수학이야말로 의심할 여지없이 초등 아동들의 기초 지력을 함양하는데 있어서 최고의 도구이며, 거의 무한에 가까운 응용력으로 인하여 다른 학문을 하기 위한 기초를 제공하며, 부차적이기는 하지만, 훗날 대학 입시를 결정짓는 주요 교과이기 때문이다.

그렇다면 수학 영재 교육에서 추구하는 목적은 무엇인가? 의견차이가 다소 있기는 수학 영재 교육의 목적이 '수학적 사고력'과 '수학적 창의성'이라는 것에는 대다수가 동의를 이루는 것 같다. 사고력이나 창의성이라는 것은 단순한 사실이나 정보의 암기라든가 기능의 기계적인 숙달과는 대비되는 개념이다. 이것은 수학뿐만 아니라 모든 교과에서 마찬가지일 텐데, 암송이나 숙달이 사고력이나 창의력보다 저급한 것으로 치부되는 이유는, 첫째 그것이 고차원의 지력을 함양하는데 도움이 되지 못하기 때문이며, 둘째 장차 써먹을 수 있는 범위, 즉 응용 영역이 편협하기 때문이며, 셋째 지적인 즐거움을 주지 못하기 때문이다.

수학적 사고력과 창의성과 관련하여 또 한 가지 중요한 것은 그것이 수학 영재 교육에서 뿐만 아니라 보통 교육에서도 절대적인 중요성을 가진다는 사실이다. 영재들에게는 고급한 사고력과 창의성을 길러주고 보통 학생들에게는 단순한 사실을 암기시킨다든가 편협한 기능을 반복 연습시킨다는 것은 현대의 자유교육 정신과 맞지 않는다.

이렇듯 수학적 사고력과 수학적 창의성이 중요하다는 것에 대해서는 모두가 인정하고는 있지만, 정작 중요한 문제, 즉 그것이 과연 무엇이고 어떻게 함양될 수 있는가에 대해서는 여러 학설이 대립하고 있는 실정이다. 현대 수학 교육학의 모든 이론은 따지고 보면 종국적으로는 이 질문에 대한 답을 제시하는 것이라고 단언해도 과언이 아닐 정도이다.

물론 사고력이나 창의성이라 해도 일반 교육에서의 그것과 수학에서 특출한 재능을 가지는 아동을 대상으로 하는 영재 교육에서의 그것과는 분명 같지 않을 것이다. 수학 영재아들이 함양해야만 하는 수학적 사고력과 수학적 창의성은 일반 교육에서의 그것보다 보다 전문화되고 특화된 능력일 것은 분명하다. 하지만 두 능력 사이의 교집합이 없을 수는 없다. 왜냐하면 수학 영재아 또한 영재이기 이전에 이 사회의 일원이고, 사회에서 생존하기 위해서는 사회가 요구하는 공통의 교양을 갖추어야만 하기 때문이다. 수학적 사고력과 창의성을 논하는데 있어서 이 글에서는 영재교육에서의 그것과 일반 교육에서의 그것의 교집합에 초점을 맞출 것이다. 즉 보통 학생과 영재 학생 모두에게 공통적으로 요구되는 수학적 사고력과 창의성에 대해서 다룰 것이다.

이 논문에서는 Freudenthal의 수학교육론에 입각하여 수학적 사고력과 창의성이 무엇이며 어떻게 그것을 함양할 수 있는지에 대해서 논할 것이다. Freudenthal (1905~1990)은 수학자이자 수학교육학자로서 해박한 수학적 지식을 바탕으로 수학의 인식론적인 본질에 대한 철학적이고 심리학적인 깊은 통찰과 활동주의 교육관에 근거하여 수학교육의 목적론과 방법론 및 내용론을 포괄하는 전체적인 체계로서의 독자적인 수학교육론 구축하여 20세기 말에 수학교육이 나아가야할 방향을 제시했던 인물이다. Freudenthal의 수학교육론은 형

* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40

식적이고 고답적인 수학교육이 아니라 만인을 위한 수학교육을 추구하고 있으며 네덜란드에서 시작된 현실주의 수학교육론의 시원이 된다.

Ⅱ. 수학적 개념과 원리의 본질

수학적 사고력과 창의성을 함양하고자 할 때 가장 효과적이고 본질적인 소재는 무엇인가? 이 질문에 대한 답으로는 연역적 추론, 문제해결, 알고리듬 등 여러 가지가 제시되기도 하지만 '개념과 원리'가 가장 중요한 것이라고 널리 인정된다. 개념은 비단 수학교육뿐만 아니라 모든 교육의 핵심이다. Dewey(1933, p.153)가 그의 주저 「사고하는 방법」에서 말했듯이 "교육에서 개념의 중요성은 아무리 강조해도 지나침이 없으며", "개념화가 아니고서는, 현재의 경험에서부터 미래의 경험을 이해할 수 있는 도구를 얻을 방법은 없으며", "아동이 어떤 활동에 아무리 몰입하고 열광했다 할지라도 개념화가 없었다면 그것은 교육이 아니다."

그렇다면 개념과 원리란 무엇인가? 개념(concept)이란 '그 개념에 속하는 여러 개별물들이 보유하고 있는 공통 특성'이다. 예를 들어 '$\frac{2}{3}$'라는 개념은 '$\frac{2}{3}$ m', '$\frac{2}{3}$ Kg', '$\frac{2}{3}$피자', '$\frac{2}{3}$시간' 등등에 공통으로 속한 그 무엇이다. 원리는 여러 개념 사이의 상호 관계이다. 예를 들어 '삼각형의 내각의 합은 180도이다'가 그것이다. 이 명제가 진술하는 것은 삼각형이라는 개념과 180도라는 개념 사이의 관계이다. 초등 수학에도 여러 개념과 원리가 등장한다. 예를 들면 '3', '$\frac{2}{3}$' '원', '삼각형', '원기둥' 등은 모두 개념이고 '삼각형의 내각의 합은 180도이다', '모든 정다각형의 외각의 합은 360도이다', '$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$', '$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$', '$3.14=3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}$' 등은 원리이다.

개념은 일반적이고(general) 보편적인(universal) 것이다. 그것은 어느 한 사례에만 매여 있지 않으며 그것에 속하는 무한히 많은 사례들에 공평무사하게 적용된다. 원기둥이라는 개념은 숲 속의 나무에도, 원유의 송유관에도, 난로의 연통에도 적용된다. 이와는 다르게 사실이나 정보는 개별적이고 특수하다. 예를 들면 '바둑돌은 검은색이다', '연기통은 양철로 만들어졌다', '피자 반조각' 등이 그것이다.

개념은 추상적인(abstract) 것이다. 바둑돌 세 개는 구체적인 사물(concrete object)이지만 '3'이라는 개념은 이와는 구별되는 것으로서 추상적인 존재이다. 아동은 세 개의 바둑돌 없이는 3이라는 개념을 다룰 수 없지만, 지력이 충분히 발달한 성인이라면 개념을 그것이 적용되는 개별물과 무관하게, 즉 '추상적으로' 다룰 수 있다.

개념은 정신적인(mental) 것이다. 그것은 만질 수도 볼 수도 들을 수도 느낄 수도 없는 것, 즉 인간의 오감에 통해서는 지각될 수 없으며 오직 이성을 통해서만이 인식되는 것이다.

개념이나 원리는 사고되고 탐구되고 이해되는 반면, 사실이나 정보는 기억된다. 또 사실이나 정보가 경험적으로 입증될 수 있는 것과는 다르게 수학적 개념·원리는 결코 경험적으로 입증될 수 없다. 우리 주위에 있는 몇 개의 구체적인 삼각형의 각을 재어서 더해보니 180도가 됨을 확인했다고 한들, 그것이 모든 삼각형의 내각의 합이 180도라는 원리를 입증한 것이라고 볼 수 없다. 왜냐하면 원리가 말하는 것은 과거에도 있었고, 현재에도 있고, 미래에도 있을 '모든' 삼각형에 대해서 그 내각의 합이 180도라는 것이기 때문이다. 수학적인 원리를 입증하는 방법은 오직 한 가지, '연역적인 논증' 밖에 없다.

개념이나 원리는 서로 다른 사물들을 관계 지음으로써 전혀 무관한 것처럼 보이던 사물들을 하나의 원리의 특수한 현상으로 종합시킨다. 원이라는 개념에 의해서 태양과 굴렁쇠는 종합된다. 수학뿐만 아니라 모든 학문에서 그러하다. 유체의 압력이라는 개념에 의해서 진공관에서의 물의 흡수 현상과 거대한 배를 물위에 뜨게 만드는 부력 현상이 하나로 종합된다. 금속이라는 개념에 의해서 철이나 주석이나 수은이 종합되고, 포유류라는 개념에 의해서 날아다니는 박쥐와 물속에 사는 고래와 인간이 종합된다.

이러한 관계들은 눈에 보이지 않는다. 개인의 삶과 세계를 움직이는 것은 이러한 눈에 보이지 않는 이러한 관계로서의 개념, 원리들이며 이러한 정신적인 존재들을 깨우치게 하는 것이 교육의 목적이다.

지금까지 수학적인 개념·원리의 본성에 대해서 고

찰하였다. 다음 장에서는 이러한 수학적인 개념·원리와 영재 교육(일반 교육)의 목표로서의 수학적 사고력·창의성과의 관계에 대해서 논할 것이다. 그 내용을 다소 추상적으로 요약한다면, 개념이나 원리는 사고의 기본 단위로서 사고와 완전히 동일하지는 않지만, 개념이나 원리를 교사로부터 기성품으로 건네받지 않고 학생 스스로 그러한 개념이나 원리를 구성하고 그 발생 과정을 마음속에서 재현시킨다면, 그 과정은 수학적 사고와 동일하고 그 속에서 수학적 창의성은 함양될 수 있다는 것이다. 요컨대 수학적 개념과 원리의 발생적 구성의 바로 수학적 사고이고 그 과정에서 수학적 창의성이 함양될 수 있다는 것이다. 이를 논증하는데 있어서 Freudenthal의 수학교육론에 근거할 것이다.

Ⅲ. Freudenthal의 현실주의 수학교육론에 근거한 수학 영재 교육

1. 수학 영재 교육의 목적으로서의 수학적 사고력과 수학적 창의성

수학적 사고력과 창의성은 수학 영재성의 한 요소이다. 김홍원외(1996)는 수학 영재성을 다음과 같이 네 가지 측면에서 정의하였다.

ⅰ) 수학적 사고 능력: 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 수학적 추론 능력(연역적 사고, 귀납적 사고), 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력

ⅱ) 수학적 과제 집착력: 흥미와 태도, 인내심, 지속성, 집중성, 자신감.

ⅲ) 수학적 창의성: 유창성, 융통성, 독창성, 정교성

ⅳ) 배경지식: 수학적 지식(관계적 지식, 절차적 지식), 수학 외적 지식.

수학 영재성의 첫째 요소인 수학적 사고력에 대해서는 위의 분석 이외에 Krutetskii의 분석이 유명하다. Krutetskii가 말하는 수학적 능력의 구성 요소를 요약하면 다음과 같다(우정호, 1984, p.219)

ⅰ) 수학적 정보의 수집: 수학적 사실을 형식화하여 인식하고, 문제의 형식과 구조를 파악하는 능력

ⅱ) 수학적 정보의 처리

— 수학적 대상을 일반화하는 능력
— 추론을 단축시키는 능력
— 사고 과정의 유연성
— 우아한 방법을 찾는 노력
— 사고 과정의 가역성

ⅲ) 수학적 정보 파지: 수학적 관계, 유형적 특성, 논증의 골격, 문제 풀이의 방법, 문제에 대한 접근 방법 등에 대한 일반화된 기억

김홍원외(1996)가 정의한 수학 영재성의 둘째 요소인 수학적 창의성에 대해서 고찰해보자. 흔히 창의성하면 보통을 넘어선 비범하고 기괴한 어떤 것을 가리키는 것으로 이해되기 쉽다. 물론 영재들에게는 이런 측면이 있을 수도 있다. 그러나 이 논문에서 일반 교육과 영재 교육의 공통의 추구 사항으로서의 창의성은 그런 특수하고 기이한 창의성이 아니다. 그것은 이 사회 속에서 정상적인 생활을 추구하는 시민이라면 누구든지 필요로 하는 창의성이고, 나아가 이후 어떤 전문적인 영역의 창의성을 기르기 위해서는 반드시 기초로 삼아야만 하는 그런 창의성이다. 위에서 언급했듯이 수학적 영재성에 대한 김홍원외(1996)의 분석 가운데 있는 수학적 창의성—유창성, 융통성, 독창성, 정교성—은 이에 부합되는 것으로 판단된다. Dewey(1916, p.274)가 창의성으로 규정했던 마음의 태도—즉각적 태도(directness), 개방된 마음(open-mindedness), 집중과 전념(whole-heartedness), 책임감(responsibility)—도 김홍원외의 그것과 단어는 다르지만 유사한 차원의 것으로 보인다.

위에서 창의성으로 정의된 것들은 한결같이 '마음에 새로운 어떤 것을 가져오는' 마음의 태도 혹은 자세에 관한 것들이다. 그렇다면 무엇이 새롭다는 것인가? 이 질문에 대한 대답은 창의성에 대한 보다 구체적인 정의로 우리를 이끈다. 새로운 것은 '사물(object)'이 아니라 '관계(relation)'이다. 다시 말해서 새로운 것은 마음 밖의 물리적인 것이 아니라 눈에 보이지 않는 마음속의 것이라는 점이다. Dewey의 다음 말은 창의적인 마음이 획득하게 되는 새로운 것이 무엇인가에 대해서 잘 말해준다.

> 신기성이라든가 창의성이라든가 하는 것은 그것이 우리에게 낯익은 것과는 다른 각도에서 취급된다든가, 종래와는 다른 용도에 사용되는 측면을 가리키는 말이다. 뉴톤이 중력의 이론을 사고해내었을 때, 그 사고의 창의적인 측면은 그가 다룬 자료에 있었던 것이 아니다. 자료는 낯익은 것이었다. 해, 달, 행성, 무게, 거리, 질량, 제곱 등등. 이것은 모두 익히 알고 있던 것들이었다. 이것들은 창의적인 아이디어가 아니라 확립된 사실이었다. 뉴톤의 독창성은 이런 낯익은 것들을 새로운 맥락에 도입하여 종래와는 다른 '용도'에 사용했다는 점에 있다. 모든 놀랄 만한 과학적 발견, 모든 위대한 발명, 모든 훌륭한 예술작품이 이와 마찬가지이다. 독창이나 창의를 기발한 환상과 결부시키는 것은 어리석은 사람이나 하는 생각이다. 그렇지 않은 사람들은, 독창성의 척도는 일상의 사물을 다른 사람의 생각이 미치지 못하는 특이한 용도에 사용하는 데에 있다고 생각한다. 다시 말하면, 조작이 신기한 것이지, 그것에 사용된 자료가 새로운 것은 아니라는 것이다(Dewey, 1916, p.251).

새로운 것은 사물이 아니라 관계나 용도나 조작이라는 Dewey의 이러한 관점은 '창의성과 개념 그리고 사고 사이의 밀접한 관련'을 내포한다. 이전에 제 II장에서 고찰했듯이 사물 사이의 관계나 용도는 개념이므로 따라서 창의는 새로운 개념을 구성하는 것과 같게 되고, 개념을 구성하는 것은 사고와 동일하므로, 따라서 사고는 곧 창의가 된다. 사실상 Dewey에게 있어서 사고의 본질은 창의이고 모든 사고는 창의적이다.

> 교육과 관련하여 생각해볼 때, 여기서 따라 나오는 결론은, '모든' 사고는 이때까지 파악되지 않았던 여러 고려사항들을 새로운 관점에서 조망하는 것이며, 이 점에서 창의적이라는 것이다. 나무토막을 쌓는 방법을 발견하는 세 살짜리 아이나, 5센트와 5센트를 합하면 얼마가 된다는 것을 알아내는 여섯 살짜리 아이는, 비록 세상의 모든 사람이 그것을 알고 있다 하더라도, 진짜 발견자이다. 거기에는 경험의 진정한 증가라고 할 만한 것, 다시 말하면, 또 하나의 항목을 기계적으로 추가하는 것이 아닌, 질적 변화에 의한 증가가 있는 것이다(Dewey, 1916, p.252).

결국 창의성이란 지식과 동떨어진 모종의 일반적인 형식이 아니다. 창의성은 수학적인 개념, 원리를 그 자체에 충실하게 배울 때 오직 그때에만 얻을 수 있는 특성이다. 무엇을 먹는가에 상관없이 먹는 방법을 말할 수 있겠지만 그것을 키우기 위해서는 무엇인가 먹음으로써 가능하다. 수학적 개념과 원리를 가장 수학답게 충실하게 학습하는 것 자체가 창의성을 키우는 방법이라는 말이다.

Freudenthal의 현실주의 수학교육론에는 Dewey의 사고와 창의에 대한 이러한 견해가 잘 구체화되어 있다. 다음 절에서는 Freudenthal의 수학교육론을 통하여 수학적 개념을 가장 수학답게 충실하게 다루는 것이 무엇인가에 대해서 보다 구체적으로 파악하고자 한다.

2. 수학화

Freudenthal의 수학교육론은 '수학화'라는 핵심 개념을 중심으로 전개된다. 수학화란 현실 안에 있는 여러 현상들을 수학적인 수단을 사용하여 조직하고 그럼으로써 현실에 질서를 부여하는 활동을 말한다. 한차례 수학화가 이루어지면 이 수학화의 업적은 현실에 함유되어 현실을 확장시키고 이렇게 확장된 현실은 새로운 수학적인 수단에 의하여 재조직되는데, 이전 단계에서 조직의 수단이 되었던 본질이 이제는 조직되어야만 할 현상이 된다. 수학화는 이러한 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준의 상승으로 이루어지며 종국적으로는 추상적이고 연역적인 구조에 이르게 된다. 예를 들면 공간적 형태를 그림으로 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이며, 평행사변형의 여러 특성 중 어느 하나가 다른 하나로부터 연역되도록 여러 특성을 배열하는 것은 평행사변형의 개념 영역을 수학화하는 것이며, 기하학적인 여러 정리를 그 중의 몇 개로부터 추론할 수 있도록 그 정리들을 배열하는 것은 기하학을 수학화(공리화)하는 것이며, 이러한 연역체계를 언어적인 수단을 통하여 조직하는 것은 기하학을 수학화(형식화)하는 것이다(Freudenthal, 1973, p.44).

Freudenthal에 의하면 수학은 현실과 관련을 맺을 때 비로소 살아 있게 되며, 특히 형식적인 연역 체계의 경우 그것을 낳은 수학화의 과정으로부터 단절되어 완성품으로 학생들에게 제시될 경우 그것은 딱딱하게 굳은 미이라와 같은 것에 지나지 않게 된다. 수학을 수학화 과정의 산물로 볼 때, 이 과정이 끊임없이 관계를 맺어야만 하는 현실이란 감각적인 경험 상황만을

지칭하는 것은 아니다. 그것은 물리적 세계나 사회적 세계뿐만 아니라 정신적인 세계까지도 총칭하는 것으로서 각 수준의 수학화의 성과물을 담보함에 의해서 계속적으로 확장되는 것이다(정영옥, 1997, p.14).[2)]

이처럼 수학적 지식과 현실과의 관련을 강조하는 Freudenthal에게 있어서 수학적 관념의 응용은 더 이상 순수한 수학적 관념의 현시 내지는 부차적인 것이 아니라 그 관념의 존재를 좌우하는 본질적인 것으로 된다. 수학화는 수학적 관념이 현실과 밀접히 관계 맺는다는 것이며 수학적 관념이 현실과 관계 맺는다는 것은 바로 수학적 관념이 응용된다는 말과 다름 아니다.

Freudenthal은 과거의 연역주의적인 교수법에서 수학의 응용을 다루는 방법은 타당하지 못한 것으로서 교수학적으로 전도된 형태라고 말한다. 그것은 수학적 관념이 이미 존재한 후에 그것이 구체화된 현실적 상황으로 찾아 들어가는 방식으로 그 대표적인 사례가 전통적인 학교에서 다루어 온 문장제와, 일반적인 공식의 변수에 특수한 값을 대입함으로써 해결되는 기계적인 문제 등이다.

이에 비하여 진정한 응용은 수학적 관계, 개념, 구조로 정리될 필요가 있는 현실로부터 출발하여 그 현실을 정리하는 과정에서 수학적 관념이 수단으로 사용되면서 발생하는 것을 말한다. 예를 들면 음수가 지렛대에 응용되려면 음수는 지렛대에서 출발해야 하며, 로그는 계산자나 공기압 또는 쌍곡선과 함께 시작되어야만 이런 것들에 응용될 수 있으며, 벡터의 내적은 역학적 일과 함께, 도함수는 속도나 가속도와 함께, 선형함수는 자연과 사회에서 모든 사람이 친숙해져 있는 비례관계와 함께 시작하여야만 한다고 Freudenthal (1973, p.75)은 말한다.

3. 재발명 방법

앞서 논했듯이 Freudenthal에 의하면 수학적 개념을 가장 수학답게 충실하게 가르치는 것, 그럼으로써 창의성을 기를 수 있게 하는 것은 어떤 수학적 개념이나 원리의 역사적인 수학화 과정을 재현하는 것이 된다. 즉 수학적 개념·원리 등은 현실 속의 여러 현상을 조직하는 수단으로써 작용하는 과정을 통해서 학습되어야 한다. 이러한 선조가 거친 역사적인 수학화를 교실에서 재현하는 것을 '재발명 방법'이라고 말한다.

Freudenthal이 말하는 수학교육방법으로서의 재발명 방법은, 아동의 현실 안에서 조직되어야 할 현상으로부터 시작해서, 점진적인 수학화 과정을 거침으로써, 추상적인 수학적 지식으로 나아가야만 한다는 것이다. Freudenthal의 점진적인 수학화를 추구하는 교육과정에서 교과는 수학화해야 할 현실적 맥락을 포함함 문맥들로 이루어지며 학생의 현실과 밀접한 관련이 있는 수학적 내용을 포함한 현상으로부터 시작해서 점진적으로 형식화되어 나가야만 한다(정영옥, 1997, p.122).

Freudenthal의 이러한 재발명 방법은 18세기 Clairaut에서 시작되어 Lindner, Mager, Klein, Poincaré, Toeplitz 등에 의해서 연역적인 수학 지도법에 대한 대안으로 지속적으로 주장되어 온 역사 발생적 원리의 연장선상에서 파악할 수 있다. 발생적 원리는 지식이 형성된 순서와 방법 그대로 학생들의 마음속에서 진행되어야 한다는 것을 의미하며 역사 발생적 원리와 심리발생적 원리로 분류될 수 있다. 역사 발생적 원리는 개체 발생은 종족 발생을 되풀이한다는 생물학에서의 Häckel의 '재현의 법칙'에 따른 것으로서, 한 개인의 학습의 순서는 인류의 역사적인 학습순서를 따라야만 한다는 것이고, 심리발생적 원리는 아동의 심리적 작동 원리에 기초하여 학습의 순서를 정해야만 한다는 것이다.

그러나 Freudenthal은 역사 발생적 원리와 심리발생적 원리 모두 불충분하다고 여기고 문제점을 지적하고 있다. 역사 발생적 원리의 문제점은 개인의 특성에 따른 학습요인을 고려하지 않고 고정된 교재구조를 주장하게 된다는 점에 있다. Freudenthal(1973, p.103)에게 있어서 학생들에게 수학화과정을 통해 재발명시켜야 하는 것은 발명가의 역사적인 발자국이 아니라 개선되고 더 잘 인도된 역사의 과정이어야만 한다. 또한 Freudenthal은 심리발생의 순서란 수학이 개인에서 자발적으로 어떻게 발달하는가에 관한 것으로서 이것은 심리학자의 관심사이며 교육자의 관심은 이와 달라야만 한다고 말한다. 결국 Freudenthal(1973, p.135)의 재

2) 흔히 현실이라는 개념은 이상과 대비되는 것으로 파악되어 관념이나 이념이 결여된 즉각적이고 실용적인 삶만을 지칭하는 것으로 받아들여지기도 한다. 하지만 Freudenthal의 현실은 이러한 이분법속에서 이념보다 저급한 것으로서 파악되는 것으로서의 현실과는 같지 않은 것이다.

발명 방법에서 '재발명'이 의미하는 것은 Socrates식의 회상도 역사발생의 순서도 심리발생의 순서도 그대로 따르는 것이 아니다.

Freudenthal의 이러한 수학화의 재현을 통한 재발명 방법은 선험론적이라기보다는 경험론적인 계열에 속하는 방법이다. 그것은 대표적인 선험론적 계열인 Bruner로 대표되는 수학교육 현대화 운동의 철학과 대비되며, 특히 우리나라의 전통적인 수학교육 방법과도 대비되는 것이다.

Freudenthal이 말하는 재발명 방법을 보다 정확히 파악하기 위하여 그것과 대비되는 전통적인 수학교육 방법을 먼저 고찰해보자.

전통적인 방법을 취하는 사람들도 재발명 방법을 취하는 사람들과 마찬가지로 새로운 개념과 원리의 형성이 창의성과 동일하며 높은 교육적 가치를 가진다는 것을 인정하는 데서 출발한다. 오히려 재발명 진영보다도 개념과 원리의 중요성을 더 강하게 인식하고 그것의 효율적인 교수와 학습을 더 추구하고 있다고도 볼 수 있다.

전통적인 방법의 주된 특징은 개념과 원리를 빠르고 강하게 형식화한다는 점이다. 거기에서는 단순한 하나의 사례만 다룬 후 곧바로 완성된 개념이나 원리를 형식화해서 제시한 다음 숙달을 위한 연습을 거치고 마지막으로 적용문제를 다룬다. 물론 개념이나 원리를 형식화하기 이전에 '생활에서 알아보기'를 통해서 의미를 풍부하게 하려 시도를 드러내기는 하지만, 그 맥락이 그리 풍부하지는 못하며 그것을 통해서 개념이나 원리를 이해시키기에는 너무 빈약하다. 따라서 이후의 급격한 형식화에서 의미의 결여가 불가피하게 발생된다. 형식화하고 적용 연습한 다음에는 새로운 영역에 개념과 원리를 응용할 수 있기 위해서는 이미 필요한 만큼 충분히 이해가 성취되어 있어야 함에도 불구하고 그렇지 못한 상태가 된다. 결국 전통적인 방식에서 교재에서는 개념과 원리의 이해는 그것이 형식적인 공식으로 제시되기 이전의 생활에서 알아보기와 사례 들기를 통해서가 아니라 그 이후의 다양한 연습과 응용을 통해서라고 볼 수 있다. Freudenthal(1983, p.33)은 이 방법을 '구상화(concretization) 방법'이라고 지칭한다. 그 방법을 도식화하면 다음과 같다.

i) 형식화와 공식화를 통해서 개념이나 원리의 정수(精髓)를 제시

ii) 간단한 사례에 적용 연습함으로써 개념과 원리를 이해

iii) 이해된 개념과 원리를 여러 상황에 응용.

사실 이러한 구상화 방법이 성립하기 위해서는 독특한 인식론적인 가정이 전제되어야만 한다. 인식론적인 가정이란, 첫째 어떤 개념이나 원리와 같은 일반물의 정수는 그것에 속하는 개별물 없이도 독자적으로 아동들에게 심어질 수 있다는 것이고, 둘째 아동들은 이렇게 심어진 정수를 처음에는 이해하지 못하지만 이후 반복적으로 다양한 사례들에의 적용 연습을 거친다면 그 정수를 '점진적으로 이해'할 수 있다는 것이다. 따라서 이 구상화 방법을 따른다면, '이해한다'라는 것은 아동의 마음에 새로운 무엇이 추가되는 과정일수는 없으며 다만 이미 아동의 마음속에 형식적이고 공식적으로 심어진 정수를 '전보다 더욱 명료하게' 파악하게 되는 것일 수밖에 없게 된다.

이 방법의 최대의 문제점은 '창의성'을 기를 수가 없다는 점이다. 왜냐하면 이 방법의 근간은 개념과 원리의 정수(精髓)를 기호와 상징을 통하여 완성된 형태로 '미리 알려주고' 시작하기 때문이다. 물론 이렇게 하는 이유는 선조들이 이룩한 완성품에서 출발함으로써 그것을 애초에 발견한 선조들의 역사적인 시행착오를 줄일 수 있을 것이라는 생각 때문이다. 선조들의 업적에 발을 딛고, 선조들의 시행착오를 되풀이 하지 않으면서 효율적이고 경제적으로 지식을 습득하는 것, 이것이 진정한 진보 아닌가? 하지만 이러한 방법은 효율성을 획득했는지는 몰라도, 지식 교육의 진정한 목표, 즉 사고 결과로서의 지식보다는 그 지식을 사용하고 만들어낸 사고 과정이 더 중요하다는 명제에는 모순이다. 이 방법에서 아동들이 배우는 것은 교사가 건네준 공식을 그대로 적용하는 연습과 그 결과 획득된 기성의 개념과 원리일 뿐, 답이 주어지지 미지의 상태에서 그 답을 치열하게 찾아가는 탐구의 정신은 아니다. Dewey는 이러한 전통적인 방법의 문제점에 대해서 다음과 같이 말한다.

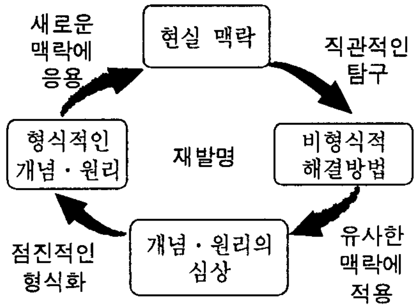
> 교과를 완성된 형식으로 제시하는 것이 학습의 왕도라고 하는 생각은 우리 마음을 강하게 사로잡는 생각이다. 미성숙한 학생이 교과를 배울 때, 이미 유능

한 학자들이 마쳐 놓은 부분에서 시작하면 시간과 정력을 절약할 수 있고 쓸데없는 오류를 저지를 필요가 없지 않은가? 이것만큼 자연스러운 생각이 또 어디에 있는가? 그 결과가 어떤 것이었던가는 교육사에 대서특필되어 있다. 학생들은 과학을 공부할 때 전문가의 사고의 순서에 따라 교과를 주제별로 조직한 교과서를 가지고 배운다. 전문적인 개념과 정의가 처음부터 소개된다. 법칙이 아주 초기단계에 소개되면서, 기껏해야 한두 마디, 그것이 어떻게 해서 나왔다는 말이 붙어 있다. 학생들은 일상 경험의 친숙한 자료를 과학적으로 취급하는 방법을 배우는 것이 아니라, 그냥 교과로서의 '과학'을 배운다 (Dewey, 1916, p.343).

Dewey의 지적은 선조들의 시행착오를 반복하지 않고 신속하게 교과를 배우겠다는 의도가 결과적으로는 그 교과의 가장 근본적인 정신, 즉 '탐구 방법'을 배우지 못하게 했다는 것이다.

이러한 전통적인 방법과 대비되는 것으로서의 재발명 방법의 가장 큰 특징은 개념·원리 지도의 출발점이 형식화되고 공식화된 기성의 완성물(text)이 아니라 현실맥락(context)이라는 점이다. 이 현실맥락은 그 속에 개념과 원리가 '암묵적으로' 녹아있는 풍부한 의미 구조를 가지고 있다. 아동은 현실 맥락 문제를 해결하는데 있어서 교사로부터 규격화된 개념과 원리를 건네받지 않고서도, 그 현실상황이 함유하고 있는 풍부한 의미 구조를 바탕으로 비형식적인 방법을 개발하여 스스로 문제를 해결한다. 이어서 아동은 이 방법을 다양한 현실 맥락에 적용시키고 나아가 그것을 모종의 심상(mental image)으로 세련시킨다. 심상이란 학습자가 현실 세계의 현상 가운데에서 어떤 개념이나 원리를 접해보고 다루어봄으로써 발생되는 일종의 암묵적인 직관 또는 개념 이미지라고 할 수 있는 것으로서 장차 어떤 수학적 개념·원리로 발전할 수 있는 정신적인 맹아와 같은 것이다(정영옥, 1997, p.72). 심상이 구성되고 그것을 무의식적으로 사용하다보면, 아동은 점점 자신의 심상을 의식하게 된다. 이러한 심상을 점진적으로 형식화시키고 명시적으로 정의하면 교사의 머릿속에 있는 것과 같은 완성된 수학적 개념·원리에 도달하게 된다. 마지막으로 이러한 형식적인 개념·원리를 새로운 상황에 응용함으로써 그에 대한 이해를 더욱 확고히 함과 동시에 일반화한다(정영옥, 1997, p.84). 이 과정은 다음과 같이 네 단계로 도식화시킬 수 있다.

i) 현실 맥락(context)
ii) 학생 스스로 비형식적인 문제 해결 방법 고안
iii) 개념·원리의 심상을 구성
iv) 점진적으로 형식화시킴으로써 개념·원리에 도달



<그림 III-1> 재발명 방법의 과정[3]

재발명 방법에서 아동이 성공적으로 비형식적 방법을 개발한다면 교사는 아동의 그러한 비형식적 전략을 조기에 형식화시키고 공식화시키려는 유혹을 받기 쉽다. 그러나 아동은 그 속에 내포된 개념과 원리를 무의식적으로 사용할 뿐 아직 명확히 의식하고 있다고 볼 수 없다. 재발명 방법에서는 아동의 비형식적 방법을 섣사리 형식화해서 명시적으로 드러내려 하지 않으며, 대신에 그러한 방법을 다양한 현실상황에서 반복적으로 적용하게 함으로써 아동이 충분히 익숙해질 때까지 기다린다. 이러한 측면은 간단한 사례를 통해서 개념과 원리를 급격하게 공식화시킨 다음 서둘러 형식적인 연습으로 진행하는 전통적인 개념 지도 방법과 크게 대비된다.

Dewey는 이 방법의 장점을 다음과 같이 말하고 있다.

대부분의 학생들이 과학 전문가가 되지는 않을 것이므로, 그들에게는 과학자들이 도달한 결과를 먼발치서, 또 한 손 거쳐서 베끼는 것보다는 과학적 방법이 어떤 것인가에 대하여 약간의 통찰을 얻는 것이 훨씬 더 중요하다. 학생들은 '배운 범위'로 보면 아

3) 이 그림은 정영옥(1997, p.85)의 것을 개조한 것이다.

> 마 얼마 안 되겠지만, 적어도 배운 범위 안에서는 확실히 이해를 할 것이다. 그리고 과학 분야로 계속 나가서 전문가가 되는 소수 학생도 순전히 전문적이고 상징적인 용어로 진술되어 있는 많은 양의 정보를 들어 붓듯이 배우는 것보다는, 그런 식으로 배우는 것이 훨씬 훌륭한 준비가 된다고 말할 수 있을 것이다(Dewey, 1916, p.344).

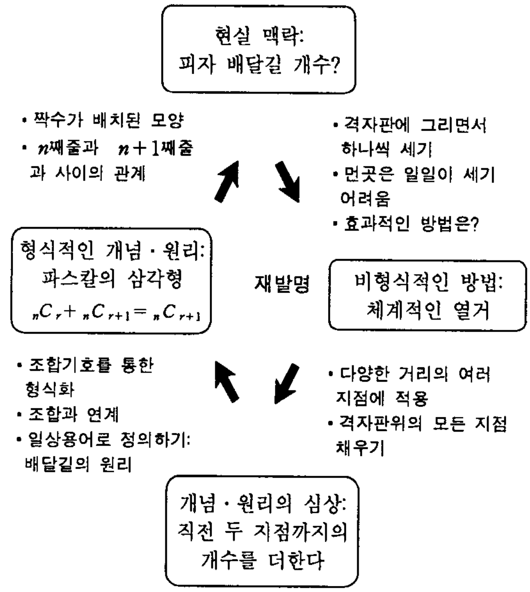
Dewey의 이 말은 일반 교육과 영재교육이 결코 다를 수 없다는 것을 뜻한다. 기성의 지식을 수동적으로 베끼는 것보다 재발명 방법을 통해서 지식을 다루는 방법을 익히는 것이 정당한 일반 교육이고 또한 동시에 바람직한 영재 교육이라는 뜻이다.

Ⅳ. Freudenthal의 수학교육론에 따른 초등 수학 영재 교육 예시

파스칼의 삼각형은 이른바 '파스칼의 삼각형의 원리' 즉, 공식 ${}_{n}C_{r}+{}_{n}C_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$에 의해서 삼각형 모양으로 수를 배열한 것으로서, 그 결과는 $(a+b)^{n}$의 전개식의 계수를 자연수 n의 값에 따라 차례로 삼각형 모양으로 배열한 것과 일치한다. 현재 고교 교육과정을 살펴보면 거기에서 파스칼의 삼각형을 지도하는 방식은 재발명 방법과는 정반대인 '구상화 방법'의 전형적인 사례임을 쉽게 알 수 있다. 우선 조합을 배운 다음 이를 기초로 식 ${}_{n}C_{r}+{}_{n}C_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$을 증명하고, 이것에 따라서 파스칼의 삼각형을 만든 다음, 각 줄이 이항계수와 일치함을 확인하는 방식을 취하거나 아니면, 조합과는 무관하게 파스칼의 삼각형의 규칙을 알려주고 그에 따라 기계적으로 수를 배열하게 한 다음, 그것이 이항계수와 일치함을 확인시키는 방식을 취하고 있다.

이 장에서는 '피자 배달길'이라는 현실 맥락을 통하여 파스칼의 삼각형과 그 원리를 학생 스스로 재발명하도록 지도하는 과정을 제시하고자 한다.[4] 먼저 지도 과정을 <그림 Ⅲ-1>의 도식에 근거하여 분석하면 다음과 같다.

4) 이 장의 내용은 Wijers et al.(1998)의 내용을 참고하여 개조한 것이다.



<그림 Ⅳ-1> 재발명 방법에 따른 파스칼의 삼각형 지도 과정

위의 <그림 Ⅳ-1>의 분석을 바탕으로 각 단계의 지도내용을 보다 상세하게 구현하면 다음과 같다.

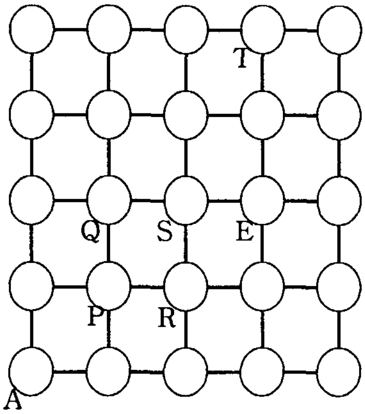
1. <그림 Ⅳ-2>은 어느 도시의 도로망의 지도이다.

(1) A 지점에서 출발하여 Q 지점까지 피자를 배달하려고 합니다. 배달길은 몇 가지입니까? A 지점에서 출발하여 P 지점까지의 배달길은 몇 가지입니까? 가까운 곳부터 배달길의 개수를 세어 보세요.

(2) T 지점까지의 배달길의 개수는 직접 세기에는 너무 복잡합니다. 어떻게 구할 수 있을까요?

(3) 배달길의 개수에는 어떤 규칙이 있습니까? Q 지점까지의 배달길의 개수와 R 지점의 배달길의 개수 사이에는 어떤 관계가 있습니까? S 지점까지의 배달길의 개수와는 어떤 관계입니까?

(4) 이 원리를 배달길의 원리라고 부르기로 합시다.



<그림 Ⅳ-2> 도로망

2. 철수는 <그림 Ⅳ-2>와 같은 도로망으로 이루어진 도시에서 피자를 배달하는 아르바이트를 합니다. 가로로 한 칸 가는 것을 기호 0으로, 세로로 한 칸 가는 것을 기호 1로 나타내기로 합니다.

(1) A에서 P까지 배달길은 두 가지가 있습니다. 그 두 가지를 기호로 나타내면 <01>과 <10> 입니다. A에서 Q까지의 배달길을 기호로 나타내세요. 모두 몇 가지입니까? A에서 R까지의 배달길을 기호로 나타내세요. 모두 몇 가지입니까?

(2) 갑, 을, 병 세 사람 중에서 한 사람을 뽑는 가지수는 몇 가지입니까? 모두 구해서 쓰세요.

갑, 을, 병 세 사람 중에서 두 사람을 뽑는 가지수는 몇 가지입니까? 모두 구해서 쓰세요.

(3) 갑만 뽑는 것을 <100>으로, 갑과 을만 뽑는 것을 <110>으로, 갑과 을과 병 모두를 뽑는 것을 <111>로 나타낸다고 합시다. 위의 (2)번의 답을 이와 같은 기호로 바꾸세요. n명의 사람 중에서 r명 사람을 뽑는 모든 가지수를 '조합'이라고 하고 기호로는 nCr로 나타냅니다. 위의 (2)번의 답을 조합의 기호로 쓰세요.

(4) A에서 S까지의 배달길 중에서 마음에 드는 두 개를 그리세요. 그것은 (1)에서처럼 기호 0과 1을 사용하여 나타내세요. A에서 S까지의 배달길은 모두 몇 개였나요? 그것을 조합 기호로 쓰세요. A에서 T까지의 배달길의 개수를 조합으로 쓰세요. A에서부터 모든 지점까지의 배달길의 개수를 ○안에 조합 기호로 쓰세요.

(5) 조합기호를 써서 배달길의 원리를 나타낼 수 있나요?

3. 바로 전에 공부한 배달길 그림은 A 지점이 맨 위로 오도록 돌리면 <그림 Ⅳ-3>과 같은 커다란 삼각형 모양이 됩니다. 이것을 '파스칼의 삼각형'이라고 합니다. 바로 전에 배웠는데, 이 삼각형이 만들어지는 원리를 무엇이라고 했었나요?

(1) 그 원리를 따라서 삼각형의 빈칸을 채우세요.

(2) 각 줄에 있는 모든 수를 더해서 오른쪽 끝에 쓰세요. 각 줄의 수의 합 사이에는 어떤 규칙이 있습니까? n째 줄의 수의 합은 무엇일까요? 왜 그런 규칙이 될까요?

(3) 넷째 줄의 모든 수를 조합 기호로 바꾸세요. 그들의 합은 얼마인가요? n째 줄의 모든 수를 조합 기호로 바꾸세요. 그들의 합은 얼마인가요?

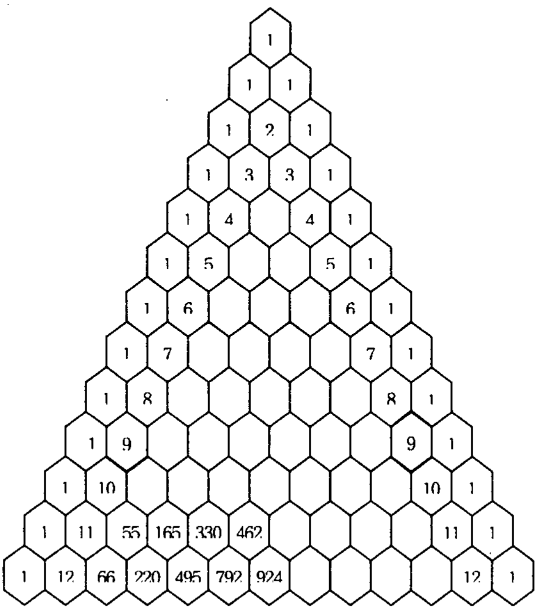
4. 보통 파스칼의 삼각형에서는 줄을 셀 때는 둘째 줄부터 세는 것이 편리합니다.

(1) 짝수를 모두 찾아서 빗금을 칠하세요. 어떤 규칙이 있습니까?

(2) 8째 줄에는 7개의 짝수가 있고 9째 줄에는 6개의 짝수가 있습니다. 왜 한개 줄었습니까?

(3) 왜 짝수는 역삼각형 모양으로 모여 있습니까?

(4) 다음의 커다란 역삼각형은 몇째 줄에서 시작되겠습니까? 왜 그렇습니까? 그 역삼각형의 한 변의 길이는 얼마입니까?



<그림 IV-3> 파스칼의 삼각형

V. 결 론

사고의 기본 단위는 개념 · 원리이고 사고의 과정은 개념 · 원리를 발생적으로 재구성하는 것이다. 창의성은 마음속에 질적인 새로운 증가를 이룩하는 것, 즉 새로운 개념 · 원리를 획득하는 힘을 말하는 것이다. 따라서 '모든' 사고는 창의적이며 '창의적' 사고라는 말은 불필요한 동의어 반복일 뿐이다.

현대 교육학에서는 사실의 암기나 기능의 숙달보다는 사고와 창의를 보통 교육에서 추구해야할 바람직한 목표로 설정한다. 수학 영재 교육의 목표 또한 창의성이다. 이 둘의 창의성은 구별되는 것이 당연하겠지만 공통부분 또한 엄연히 존재한다. 영재들에게는 창의성을, 보통 학생들에게는 기계적인 훈련을 함양해야한다는 것은 현대 교육의 흐름에 맞지 않는다. 영재 교육뿐만 아니라 보통 교육도 창의적이어야만 한다. 창의성이야말로 인간의 마음을 한없이 자유롭게 하고, 깊은 희열을 주며, 무한한 응용을 가능케 함으로써 삶의 지속적인 성장을 가능케 하기 때문이다. 창의성이라는 고귀한 특성은 영재들만의 전유물이 아니며 모든 사람이 그럴 능력이 있고 자격이 있다는 것이 현대 교육학의 대전제이고 그것을 입증하는 것이 교육자의 과제이다.

이 논문에서는 Dewey와 Freudenthal에 의지하여 이러한 창의성에 대해서 그 성격을 규명하고 그것을 성취하기 위한 방법으로서의 재발명 방법과 초등 수학에서의 그 예시에 대해서 고찰하였다.

참 고 문 헌

강홍규 (2005). Dewey의 경험주의 수학교육론 연구. 서울: 경문사.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌 (1996). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(I)-기초 연구편. 한국교육개발원.

우정호 (1984). 수학교육학 개론. 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

Bruner, J. (1960). *The Process of Education.* Cambridge: Harvard University Press, Bruner 교육의 과정. 이홍우(역)(1995). 서울: 배영사.

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education.* New York: Macmillan. 민주주의와 교육. 이홍우(역, 주석)(1987). 서울: 교육과학사.

_______ (1933). *How we think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process.* Boston: D. C. Heath. 사고하는 방법. 임한영(역)(1986). 서울: 법문사.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D, Reidel Publishing Company.

_______ (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Wijers, M.; Lange, J.; Gravemeijer, K.; Querella, N.; Shew, B.; Brinker, L.; Pligge, M. A. & Simon, A. N.(1998). Reflection on number. In National center for research in mathematics education & Freudenthal institute(Eds.). *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

The reinvention method for the gifted students in mathematics education according to Freudenthal's theory

Kang, HeungKyu
Department of Mathematics Education, Gongju National University of Education,
Bongwang-dong, gongju 376, Korea
E-mail: unitolpes@hanmail.net

In modern theory, creativity is an aim of mathematics education not only for the gifted but also for the general students. The assertion that we must cultivate the creativity for the gifted students and drill the mechanical activity for the general students are unreasonable. Freudenthal has advocated the reinvention method, a pedagogical principle in mathematics education, which would promote the creativity. In this method, the pupils start with a meaningful context, not ready-made concepts, and invent informative method through which he could arrive at the formative concepts progressively. In many face the reinvention method is contrary to the traditional method. In traditional method, which was named as 'concretization method' by Freudenthal, the pupils start with ready-made concepts, and applicate this concepts to various instances through which he could arrive at the understanding progressively. Freudenthal believed that the mathematical creativity could not be cultivated through the concretization method in which the teacher transmit a ready-made concept to the pupils. In the article, we close examined the reinvention method, and presented a context of delivery route which is a illustration of reinvention method. Through that context, the principle of pascal's triangle is reinvented progressively.

* ZDM classification: D43
* MSC2000 classification: 97D40