韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2005. 5. 제 9권, 제 1호, 11-29

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2005, Vol. 9, No. 1, 11-29

이산수학적 관점에서의 초등수학교과서 분석 연구

최 근 배 (제주교육대학교)
강 문 보 (신촌초등학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

21세기는 국가의 경쟁력이 사회 전반의 정보화수준에 의해 결정되는 시대이다. 점점 복잡해지고 다양화되어 가는 정보화의 발달은 수학교육의 교수방법을 바꿀 뿐 아니라 수학적 지식의 상대적인 중요도나 접근방법을 바꾸도록 요구하고 있다. 이러한 정보화 사회에서의 교육의 변화 요구는 수학과 교육과정에도 반영되어, 제 7차 수학과 교육과정 개정의 기본 방향을 다음과 같이 제시하고 있다(교육부, 2001a).

> "21세기 지식 기반 정보화 사회에서 학교 교육의 중점은 단순 기능인의 양성보다는 자기주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다."(p. 2)

그러므로 21세기 정보화 사회에서는 정보의 이해와 판단능력, 정보교환을 통한 실생활에 적용, 다른 교과에 수학적 지식을 이용할 수 있는 문제의 해결력 등 많은 수학적 힘이 필요하다. 따라서 급속한 정보화 사회로의 전환과 그에 맞추어 이산수학에 대한 관심과 연구가 활발해지고 있으며, 제 7차 교육과정에서는 이산수학을 선택과목으로 개정할 만큼 그 중요성을 인정하게 되었다. 이는 이산수학이 수학에 대한 흥미를 쉽게 유발(실용성)하고 수학의 본질적 성질(문제해결 등)을 반영할 뿐 아니라 정보를 다루기에 적합한 수학분야이기 때문이다.

National Council of Teachers Mathematics, 이하 NCTM, (1989)에서는 이산수학의 교육적 가치를 대수, 기하, 미적분 등과 같은 수준으로 평가하고 있으며, 대학 진학을 희망하는 학생들뿐만 아니라 모든 학생들에게 이산수학을 가르칠 것을 권장하고 있다. 또한 NCTM(2000)의 「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 이산수학의 주요한 내용을 포함하고 있지만, 별도의 규준으로 다루지 않고 Pre-K에서 12단계까지에 걸쳐 흩어져 있는데, 이러한 이유는 현행 수학교육과정이 수학적 센스와 창의적 아이디어를 요구하는 문제해결력[1]을 강조하고 있고, 문제해결전략에 이산수학이 깊이 관련되어 있기 때문이라고 생각된다.

Hart(1991)는 이산수학을 권장해야 할 이유로, 수학에 대한 흥미와 활력, 문제해결에서의 알고리즘적 사고능력과 수학적 모델링, 사용영역의 다양성, 전통적인 교육과정의 보완 등을 들고 있다. 또한 Kenney(1991)는 이산수학이 가지는 중요성으로, 수학적 연관성들의 생성을 촉진하고, 실세계에 응용할 수 있는 문제를 해결하기 위한 구조를 제공하고, 공학적 환경에 적합하고, 논리적 사고와 추론 능력을 길러준다는 점을 강조하고 있다.

초등학교 수학교육은 무엇보다 먼저 수학을 접했을 때 즐거움을 느낄 수 있도록 아동 수준에 적합한 문제를 제공하고, 그 활동을 통하여 초보적인 지식과 기능을 습득하여 간단하고 명확하게 표현하고 처리하는 수학적 능력과 태도를 기르도록 하는 것이 중요하다. 이는 이산수학의 성격 및 목적(문제해결전략 등)과도 잘 부합된다고 여겨진다.

초등수학에서의 이산수학과 관련된 선행연구에는 이도영(1995), 한길준 외(2001), 전민경(2003), 최근배 외(2005) 등이 있다. 이도영(1995)은 초등고학년 이산수학 소개에 관한 기초연구에서, 10가지의 이산수학 주제[2]에 대하여 논의하고, 이 중에서 수세기, 한붓그리

* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D50

1) NCTM(2000)의 「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 총 10개의 규준 중 절차규준(process standards)의 하나로 '문제해결'을 포함하고 있다.

2) 수세기, 집합, 논리와 추론, 규칙성, 알고리즘, 확률, 한붓

기, 지도 색칠하기, 최소지름 수형도에 대한 학습문항 개발 및 이에 따른 성취도 평가를 하였다. 전민경(2003)은 New Jersey의 교육위원회에서 선정한 5가지의 이산수학 주제[3]를 중심으로 단계밴드 K-2, 3-4, 5-6학년에서 배우는 이산수학 내용을 분석하고, 또한 이 주제들을 기준으로 우리나라 제 6, 7차 교육과정의 초등수학에서 다루어지고 있는 이산수학적인 내용과 관련된 문제를 분석하였다. 한길준 외(2001)의 경우는 제 7차 교육과정 초등수학교과서에서 1학년부터 4학년까지의 이산수학적 내용을 분석하고, 추가로 도입될 수 있는 이산수학적 내용을 소개하였다. 이는 전민경(2003)의 경우와 유사한 연구관점이다. 최근배 외(2005)는 Polya의 문제해결학습을 바탕으로 초등영재교육에 적용할 수 있는 이산수학이론 자체를 중심으로 한 프로그램을 구성하였다. 선행 세 연구는 이산수학이론을 중심으로 한 연구라기보다는 이산수학의 성격에 따라 교과내용을 범주화한 분류관점의 연구이며, 최근배 외(2005)의 경우는 이산수학이론을 중심으로 한 연구이긴 하지만, 초등영재교육에 관심을 둔 연구이다. 따라서 이산수학이론을 중심으로 한 초등학교 현장에서 적용할 수 있는 자료개발에 대한 연구가 필요한 시점이다. 이러한 점은 또한 초·중등 수학교육의 연계성과 초등교사의 이산수학 개념에 대한 인식의 부족을 보완하려는 측면도 있다.

본 연구에서는 NCTM(1989, 2000)의 규준 및 Hart(1991), Kenney(1991) 등에서 말하고 있는 이산수학의 가치와 그 중요성을 감안하여

「몇몇 이산수학이론을 중심으로 초등학교 수학교과서를 분석하고, 이에 따른 이산수학 학습자료의 개발방안을 모색하고자 한다.」

이는 초등학교 교사의 이산수학 개념에 대한 인식을 재고하고 학생들에게 수학적인 탐구와 응용을 중점적으로 학습할 수 있도록 하여, 생활 속에서 예리한 통찰력을 기르고 수학적인 경험 및 센스를 주고자 함이다.

그리기, 최소지름 수형도, 지도 색칠하기.

3) (1) 체계적인 표 만들기, 수세기, 추론하기 (2) 그래프와 수형도 같은 이산수학적 모델들 (3) 반복적인 모형과 과정 (4) 배열, 조직, 분석, 변형과 정보전달 (5) 알고리즘이라고 불리는 교육의 추론과 연구

2. 연구방법

본 연구의 방법은 기존의 연구와는 달리 이산수학 이론 중에서 초등학교 현장에서 적용할 수 있는 것을 중심으로 연구하고자 한다. 구체적으로, 이중계수 원리, 분배와 분할(비둘기집의 원리, 포함-배제의 원리, 자연수의 분할, 모임의 분할), 경우의 수(순서쌍의 개수, 순열, 조합), 무게재기, 네트워크 문제를 중심으로 초등학교 수학교과서를 분석하고, 학습보완의 관점에서, 이에 따른 학생들의 활동을 중심으로 한 몇몇 심화학습 자료를 제시하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 이산수학

'이산'이란 용어의 사전적 의미는 서로 떨어지거나 연결되어 있지 않은 요소로 구성되었다는 것을 의미하기 때문에, 이산수학은 이산적 대상의 연구와 관련된 수학의 한 분야라고 할 수 있다(Rosen, 1988).[4] 그러므로 이산수학은 실수나 복소수의 집합을 정의역으로 하는 연속함수와 같은 연속수학과 대조를 이루는 것으로 양의 정수와 같이 이산적이거나 유한집합에서 정의된 함수의 상황을 분석하는 데 유용하다(Dossey, 1991).

한편, Maurer(1997)는 '유한수학', '이산수학을 다루는 수학', '극한을 다루지 않는 수학', '유한번의 단계로 처리되는 수학' 등의 네 가지 특성으로 이산수학을 정의하고 있다. 그러나 이산수학은 그 내용이 다양하여 모든 내용을 대표할 만한 성질을 찾는 것은 매우 어렵고 정의하기 또한 어렵다. 이에 따라, 이산수학에서 다루어야 할 주제들도 관점에 따라 다를 수 있다.

일반적으로, 이산수학이라고 명명된 책의 내용구성은 이산적 대상과 관련된 연구에서 나타날 수 있는 문제해결의 측면에서의 수학적 이론으로 구성되는데, 주로 조합론이 대표적이다. 조합론의 주된 관심사는 다음과 같다(황석근 외, 2001; Dossey, 1991; Brualdi, 1977).

4) 이산수학의 정의적 관점에서 볼 때, 초등수학 내용의 대부분은 이산수학적 내용으로 볼 수 있다.

· 특정한 패턴의 배열이 존재하는가? (배열의 존재성)
· 존재한다면 몇 개나 있는가? (배열의 개수)
· 어떤 배열이 최적의 배열인가? (최적 배열 찾기)
· 배열의 구조는 어떠한가? (배열 구조분석)

이러한 문제들에 대하여 해를 찾는 알고리즘의 개발과 분석이 이산수학의 핵심이라고 할 수 있고, 이는 수학적 창의성을 요하는 문제해결전략과 깊은 관련성을 지닌다.

한편, 이산수학의 교육적 의미를 살펴보면 일상생활에서 접할 수 있는 문제를 제시하여 이산수학과 실세계의 관련성을 강조하고, 일상생활에 문제가 생겼을 때 의사결정을 할 수 있는 판단의 기준으로 사용할 수 있다는 점이다(이길주, 2001).

2. 이산수학의 도입 배경 및 성격

1) 이산수학의 도입 배경

제 7차 교육과정에서는 이산수학의 도입배경을 다음과 같이 언급하고 있다(교육부, 2001b).

> "정보화 사회를 유발한 컴퓨터 과학과 기술 공학의 발전 및 산업과 경영에서 파급되는 정보의 폭발적 증가와 더불어 수학의 적용과 응용이 광범위해지면서 이산적인 수학이 급격히 발전하고 있다. 제 7차 수학과 교육과정에서는 이러한 추세를 반영하여 과거의 교육과정에서 우위를 점하고 있던 연속적인 수학 체계에 덧붙여 이산적인 내용을 정선하여 필수적인 내용을 첨가함으로써 이산수학을 새로운 선택과목으로 도입하게 되었다." (p. 154)

NCTM(1989)에서도 이산수학의 초점을 통해, 이산수학의 중요성을 다음과 같이 언급하고 있다.

> "21세기로 가는 시점에 있어서 정보와 정보의 교환은 최소한, 물건의 생산만큼 중요한 것이 되었다. 물리적 또는 물질세계는 미적분과 대수, 기하, 삼각함수의 필수 아이디어인 연속수학에 의해 흔히 모델화되는 반면, 정보처리라는 비물질 세계는 이산(불연속)수학의 사용을 요구한다. 컴퓨터 공학 역시 수학이 사용되고 창조되는 방법에 점차 강하게 영향을 미치고 있다. 컴퓨터는 본질적으로 유한이고 이산적인 기계이다. 따라서 이산수학으로부터의 내용은 컴퓨터를 사용하는 문제 해결에 필수적이다. 이런 점에서 모든 학생들로 하여금 이산수학의 개념과 방법을 경험하게 하는 것은 중요하다." (구광조 외 공역, 1992, pp. 254-255, 재인용).

한길준 외(2001)은 이산수학은 구성주의 학습에서 말하는 학습자 중심의 수업, 수학적 토론, 인지적 재구조화를 촉진하는 여러 가지 문제를 많이 포함하고 있으며, 인지적 갈등을 해결하기 위한 구성 활동을 촉진하고, 학생들이 문제의식을 갖고 반영적 추상화를 시도할 수 있게 문제의 상황을 조정해줄 수 있다고 말하고 있다. 또한 정치봉(1991)은 현재의 정보화 사회에서 컴퓨터의 사용은 수식 계산을 하는 도구 정도의 단계를 지나 화상과 소리를 비롯한 다양한 매체와 데이터를 손쉽게 처리하고 활용할 수 있게 한다. 이러한 정보화 사회에 필요한 수학으로서, 이산수학은 변혁 속에 나타나는 새로운 대상을 소개하고, 보다 체계를 지닌 수학 개념으로 이해하도록 하는 교과로서 발전하고 있고, 특히 새로운 문제를 효과적으로 해결하기 위해서 이산수학이 필요하다고 말하고 있다.

2) 이산수학의 성격

Rosenstein(1997)과 Hart(1997)의 "왜 교육과정에 이산수학을 포함해야 하는가?"에 대한 문제를 바탕으로 이산수학의 성격을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 응용성이 있다. 응용성은 문제해결, 모델링, 흥미유발, 현실과의 관련 및 실용성과 연관된다.

둘째, 접근가능성이 용이하다. 접근가능성이란 이산수학의 응용분야를 이해하기 위해서는 기초적 계산과 대수로도 충분한 경우가 많다는 것을 의미한다.

셋째, 유인성을 지닌다. 유인성이란 이산수학 문제가 학생들의 도전감과 흥미를 이끌 수 있으며 그들을 탐구 및 발견의 세계로 이끌어 갈 수 있다는 것을 말한다.

넷째, 적절성을 지닌다. 적절성이란 이산수학은 수학을 잘하면서 과학 쪽에 관심이 있는 학생들 및 수학에서 새로운 출발점이 필요한 학생(수학은 못하기 때문에) 모두에게 적절하다는 것이다.

다섯째, 보완성을 가지고 있다. 이산수학은 전통적인 교육과정을 보완하고 풍부하게 한다. 다시 말해서, 전통적인 교육과정을 배제하려는 것도 아니고, 가르치

는 방식과 교재를 급진적으로 변화시키는 혁명도 아니다. 단지 수학 교육과정을 보다 넓히고 풍부하게 하는 것이다.

3. 제 7차 수학과 교육과정의 개정방향

제 7차 수학과 교육과정의 개정방향 중에서 이산수학의 도입의 배경과 관련된 몇 가지 항목들을 제시하고자한다(교육부, 2001).

첫째, 수학적 사고력, 문제해결력을 신장하는 수학교육이다. 수학교육의 중요한 목표인 수학적 사고력과 문제해결력의 강조는 수학교육에서 계속적으로 추구하여, 급변하고 다양화하는 미래 사회에 적응할 수 있는 힘을 길러 주어야 한다. 1980년대 이후 세계의 수학교육은 문제해결력의 신장에 역점을 두어 왔고, 우리나라도 제 4~6차 교육과정을 통하여 문제해결을 강조하여 지도하도록 하여 왔으나, 괄목할 만한 성과를 얻지 못하고 있는 실정이다. 이에 보다 적극적이고 구체적인 수준에서 문제해결력을 신장시키려는 시도가 있어야 할 것이다.

둘째, 학습자의 활동을 중시하는 수학교육이다. 전통적인 설명식 학습지도는 간단한 수학적 사실을 이해하고 활용하는 측면에 있어서는 효과적일 수도 있지만, 수학적 개념, 원리, 법칙을 학생 스스로 탐구, 발견하고 창조하는 능력을 기르는 데는 적절하지 않다. 수학적 지식을 구성해 가는 능력을 기르기 위해서는 학생들 스스로가 관찰, 조작, 분석, 종합하는 활동을 통하여 수학적 원리나 법칙을 예측하고 추론할 수 있어야 한다. 또한, 학생들 상호간의 토론과 협력 학습 활동은 수학적 개념을 바르게 이해하고, 문제를 다양한 방법으로 해결하는 능력을 기르게 한다.

셋째, 수학학습에 흥미와 자신감을 가지게 하는 수학교육이다. 수학학습에 대한 흥미와 자신감을 길러주기 위해서는 학생의 수준에 맞는 내용을 자기 주도적으로 학습하여 성취감을 가지게 하고, 학생 스스로 탐구 활동을 활발히 할 수 있도록 배려되어야 한다.

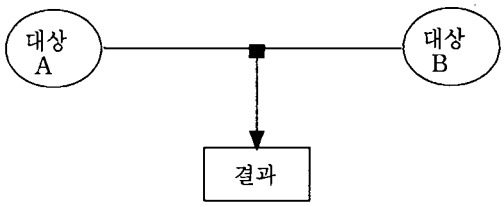
넷째, 수학의 실용성을 강조하는 수학교육이다. 수학을 학습하는 중요한 이유 중의 하나는 수학적 지식의 습득과 기능의 숙달을 통하여 실생활 문제를 해결하거나 다른 교과의 학습에 적극적으로 활용할 수 있게 하기 위해서이다. 따라서 수학내용은 가급적 실생활의 소재나 인접 교과와 관련되는 것에서부터 도입되어야 하고, 이런 측면에서 수학교육의 필요성이나 의의가 인식되어야 할 것이다.

III. 연구 내용

1. 이중계수의 원리

우리는 일상에서 서로 다른 두 대상의 행위에 의하여 하나의 결과가 나타나는 현상을 자주 접할 수 있다(<그림 1> 참조). 이를 테면, 운동경기, 컴퓨터 게임, 가위바위보, 인사하기, 악수하기 등이다.

이러한 서로 다른 두 대상끼리의 행위에 의하여 나타난 결과의 총 횟수(운동경기의 총 횟수, 악수의 총 횟수 등)를 구하는 문제를 해결하는데 사용되는 원리를 일반적으로 이중계수(double counting)의 원리라고 한다.[5]



<그림 1> 이중계수

이중계수의 원리는 우리가 흔히 「악수보조정리(Handshaking Lemma)」[6]라 부르는 응용에 의하여 잘 설명된다.

악수보조정리: 어떤 모임에서, 홀수 번 악수를 한 참석자의 수는 짝수이다.

---

5) 이중계수(二重計數; double counting)라는 용어는 Cameron (1994)에서 가져왔다.

6) 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)의 1736년의 그래프 이론의 원조로 널리 알려진 논문인 *Solutio problematis ad geometriam situs perinentis* 에 처음으로 소개되었다. 이것은 그래프에서 홀수점의 개수가 항상 짝수라는 사실과 같은 맥락이다.

실제로, 이 원리는 「어떤 모임에서 악수한 손의 총수는 그 모임에서 일어난 악수의 총 횟수의 두 배와 같다」는 사실로부터 자연스럽게 유도된다. 편의를 위해서, 모임의 참석자를 x_1, x_2, $\cdots$, x_n라고 두고, 모임의 두 참석자 x_i와 x_j사이에 악수가 일어나면 1의 값으로 아니면 0의 값으로 생각하면서 <표 1>의 구성성분을 작성하자.

초등수학 교과서에 이중계수와 관련하여 도입된 문제들의 유형을 살펴보면 다음과 같다.

- 경기의 총 횟수
- 주어진 점들을 연결하는 선분의 총 개수
- 다각형에서의 대각선의 총 개수
- 악수의 총 횟수

<표 1> 악수보조정리

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합	
x_1		△	☆		○	→	$d(x_1)$
x_2	△					→	$d(x_2)$
x_3	☆						$d(x_3)$
$\vdots$				$\ddots$			
x_n	○					→	$d(x_n)$
							$d(x_1)+d(x_2)+\cdots+d(x_n)=2\times e$

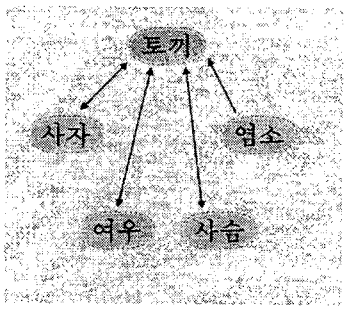
여기서, △, ☆, $\cdots$, ○는 0 또는 1이다.

<표 1>에서 i번째 행을 구성하고 있는 원소들의 합(대각선 원소는 0) $d(x_i)$는 모임의 참석자 x_i가 모임에 참석한 다른 사람들과 악수한 총 횟수를 의미하고, 문자 e는 모임에서의 일어난 악수의 총 횟수를 나타낸다. 또한 <표 1>은 대각선을 기준으로 표의 구성성분이 대칭임을 알 수 있다.

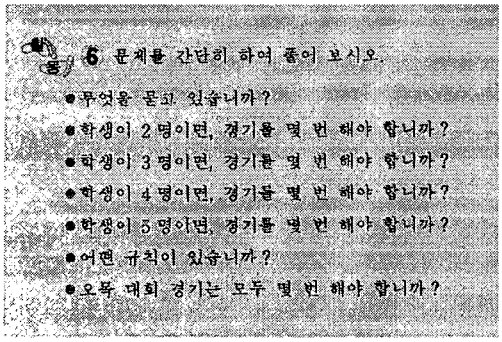
따라서 어떤 모임에서 일어난 악수의 총 횟수를 구할 때, 그 모임에 참석한 각 개인에게 악수한 횟수를 물어 그 횟수의 총합을 구한 후에, 그 총합을 2로 나누면 된다.

이중계수 원리는 제 7차 교육과정 초등수학 교과서에서 주로 문제해결영역에 도입되어 상당히 많이 다루고 있는데, 이중계수의 원리라는 용어는 사용하고 있지 않고 있으며 또한 모든 대상이 단 한번의 행위에 참여하고 그 행위에 참여하지 않는 경우는 없다. 즉, <표 1>의 대각선(구성성분의 값은 0)을 제외한 모든 구성성분의 값이 1이다.

이러한 유형의 문제들을 해결하는 문제해결전략으로, 교과서에서는 그림 그리기(<그림 2> 참조), 규칙 찾기(<그림 3> 참조), 식 만들기(<그림 4> 참조)를 이용하고 있다. 그러나 <표 1>과 같은 표 만들기 전략은 유용하지만 사용하고 있지 않다.

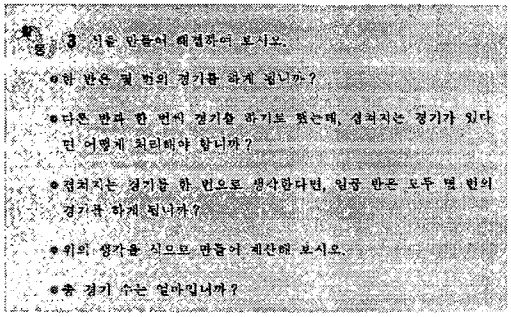


<그림 2> 그림 그리기 전략의 예
(익힘책 <4-나> 8단원 125쪽)


6 문제를 간단히 하여 풀어 보시오.

- 무엇을 묻고 있습니까?
- 학생이 2명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
- 학생이 3명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
- 학생이 4명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
- 학생이 5명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
- 어떤 규칙이 있습니까?
- 오목 대회 경기는 모두 몇 번 해야 합니까?

<그림 3> 규칙 찾기 전략의 예
(교과서 <5-가> 8단원 135쪽)


3 식을 만들어 해결하여 보시오.

- 한 반은 몇 번의 경기를 하게 됩니까?
- 다른 반과 한 번씩 경기를 하기로 했는데, 결석자는 경기가 있다면 어떻게 처리해야 합니까?
- 결석자는 경기를 한 번으로 생각한다면, 입공 반은 모두 몇 번의 경기를 하게 됩니까?
- 위의 생각을 식으로 만들어 계산해 보시오.
- 총 경기 수는 얼마입니까?

<그림 4> 식 만들기 전략의 예
(교과서 <6-나> 8단원 135쪽)

제 7차 교육과정 초등학교 수학교과서에서 제시된 이중계수 문제의 세 가지 전략(그림 그리기, 규칙 찾기, 식 만들기) 사이의 관계를 예를 들어 살펴보면 <그림 5>와 같다.

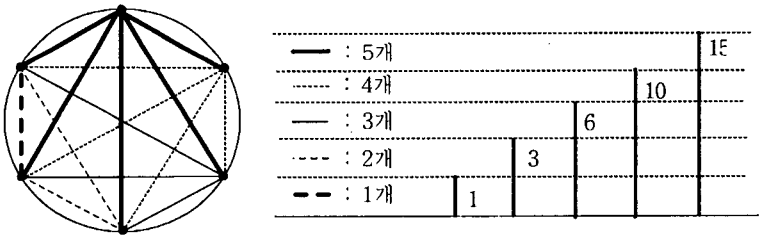
이중계수와 관련된 문제의 문제해결전략으로 앞에서 언급한 그림 그리기, 규칙 찾기, 식 만들기의 세 전략 외에 표 만들기를 이용한 전략(<표 2 참조>)도 또한 유용하며, 이 표 만들기 전략과 세 가지 전략사이의 관계를 짓는 활동도 고려해 봄직하다. 예를 들어, <표 2>의 상삼각(upper triangle)에서 규칙을 찾아본다.

<표 2> 표 만들기 전략의 예

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	1	1
B	1	0	1	1	1	1
C	1	1	0	1	1	1
D	1	1	1	0	1	1
E	1	1	1	1	0	1
F	1	1	1	1	1	0

$$\frac{6\times6-6}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = \frac{6\times5}{2}$$

실제로, 우리교과서에서 다루고 있는 이중계수의 문제들은 모두 하나의 개념에 불과하다. 즉, 모든 문제는 두 대상끼리의 행위에 의하여 나타난 결과의 총 횟수를 구하는 것이다. 따라서 이중계수의 원리를 문제해결의 관점에서 좀더 다양한 형태로 도입해서 다루는 것도 유용하다. 다시 말해서, 앞에서 언급한 악수보조정리와 관련된 학습문제를 활동의 형태로 제시하는 것인데, 예를 들어,



이중계수 : $\frac{5\times6}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

<그림 5> 세 가지 전략들의 관계

◇ 오늘 아침 등교하면서 학급 친구들에게 인사를 한 어린이는 손들어 보세요.
- 짝수 명입니까? 홀수 명입니까?
- 만일 같은 학생에게 여러 번 인사를 한 학생이 있거나 또는 인사를 하지 않은 학생이 있다면, 인사한 학생수는 어떻게 될까요? 홀짝성이 변하나요? 우리학급에서 일어난 인사의 횟수는? 표 만들기 활동을 해보세요.

	1번	2번	3번	…	29번	30번
1번	0	1	2		3	0
2번	1	0	0		0	1
3번	2	0	0		1	0
⋮						
29번	3	0	1		0	1
30번	0	1	0		1	0

◇ 5개 팀이 출전하는 농구시합에서 모든 팀이 홀수 번 시합을 할 수 있게 하는 대진표를 짤 수 있을까요?

◇ □ (2명이상)명의 학생이 교실에 있다고 가정하자.
(1) □가 짝수라면 악수의 횟수는 짝수일까요?, 홀수일까요?
(2) □가 홀수라면 악수의 횟수는 짝수일까요?, 홀수일까요?

- 사람 수에 따른 악수의 횟수

사람 수	2	3	4	5	6	7	…
악수의 횟수	홀수	홀수	짝수	짝수	홀수	홀수	

- 이 활동을 통해 알게 된 점은 무엇인가요?

2. 배열과 분배

1) 비둘기집의 원리

3마리의 비둘기를 2개의 비둘기집에 넣으면 2마리 이상 들어간 집이 당연히 생긴다. 좀더 일반적으로 해석하면,

「$(n+1)$마리의 비둘기를 n개의 비둘기집에 넣으면, 2마리 이상 들어간 집이 반드시 있다」

이와 같은 주장은 너무도 당연한 것이지만 문제해결의 과정에서 흔히 나타나는 배열의 존재성을 이야기할 때 주요한 원리로 사용된다.[7] 이러한 원리를 비둘기집의 원리라고 한다(황석근 외, 2001; Brualdi, 1977; Cameron, 1994 참조). 예를 들어, 13명의 사람들 중에는 생일이 같은 달인 사람이 적어도 2명이 있다는 존재성은 보장해 준다는 것이다.

이러한 원리를 좀더 일반화하면 다음과 같다:

「m마리의 비둘기를 n개의 비둘기집에 넣으면, $\lceil m/n \rceil$ 마리 이상 들어간 집이 반드시 있다」[8]

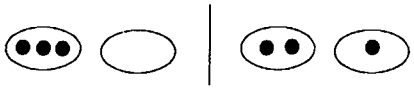
비둘기집의 원리는 문제해결 과정 중에 자주 나타나는 원리로, 중요한 점은 무엇을 비둘기로, 또한 무엇을 비둘기집으로 간주 할 것인가를 주의 깊게 살펴봐야 한다는 것이다. 첨언하면, 주어진 문제에서 비둘기와 비둘기집을 무엇으로 둘 것인가의 선택은 결국 그 문제를 해석하는 학생의 능력(해결전략)의 문제이다. 따라서 비둘기집의 원리 자체는 누구나 쉽게 인식할 수 있는 단순한 원리지만, 주어진 문제의 문제해결전략을 구상하는 창의적 활동을 요구하는 원리이다(전략분석 학습자료 참조).

물론, 비둘기집의 원리는 구성주의와 비교하여 수학적 존재성의 특수성을 보여주는 원리로 초등학생에게는 「존재한다」라는 개념을 인식시키는 것이 어려울지도 모른다. 그러나 구성적 측면에서 공통점을 이끌어내는 학습활동을 통해서 그 원리를 인식시킬 수 있다. 예를 들어, 3마리의 비둘기를 2개의 비둘기집에 넣는 모든 경우를 생각해보고 공통점을 찾아본다(<그림 6> 참조).

---

7) 이 원리는 두 마리 이상의 비둘기를 가진 비둘기집을 찾는데 도움을 주지는 못한다. 단지, 그러한 비둘기집이 있다는 사실을 주장하고 있다는 것이다.

8) $\lceil x \rceil$은 x의 천장(ceiling)이라고 부르며, x보다 크거나 같은 정수 중에서 가장 작은 정수를 의미한다. 예를 들어, $\lceil 4.3 \rceil = 5$이다.



<그림 6> 비둘기집의 원리

비둘기집의 원리를 좀더 쉽게 해석하면 결국 이 원리는 「주어진 몇 개의 자연수 중에는 적어도 하나는 그 수들의 평균 이상 또는 이하이다」라는 뜻이다. 따라서 초등학교 교과서에서 평균과 관련된 내용을 설명하기 위한 수단으로 이 원리를 사용하는 것도 바람직하다고 생각된다. 예를 들어, <그림 7>에서 보면, 반을 비둘기집으로 학생들을 비둘기로 간주하면, 평균 35이상 수가 반드시 있음을 알 수 있다.

5학년 반별 학생 수

반	1	2	3	4	5
학생 수(명)	34	36	33	37	35

<그림 7> 평균 구하기
(교과서 <5-나> 7단원 115쪽)

이제, 비둘기 집의 원리를 이용한 몇 가지의 학습자료를 소개하고자 한다.

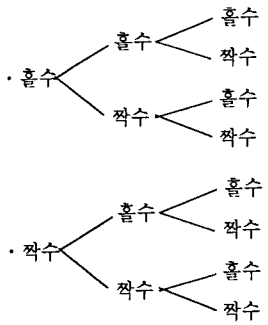
◇ **(비둘기집의 원리 거꾸로 생각하기)**
<그림 7>에서 보면, 학급수와 학생수를 고정시켜 평균을 구하는 활동을 하고 있다. 역으로, 학급수가 다섯 반인 학년에서 학생수가 35명이상인 학급이 생기려면 그 학년의 최소한의 학생수를 구하는 문제를 생각해 볼 수 있다. 이도영(1995)은 초등학교 고학년을 대상으로 한 이러한 종류의 문제에서 상당한 학습효과가 있음을 보였다.

◇ **(게임활동-짝활동)**[9]
(1) 종이 위에 어느 세 점도 동일선상의 위치에 있지 않도록 6개의 큰 점을 찍고,
(2) 각각 차례로 색깔이 다른 색연필을 준비하여 연결되어 있지 않은 두 점을 선택하여 선분으로 연결한다.
(3) 먼저 자신의 색으로 칠해진 삼각형을 만든 학생은 이 게임에서 진다.

이 활동은 여러 차례의 게임을 통해서 각 게임을 분석(선분의 개수와 두 가지의 색과의 관계)함으로써, 이중계수의 원리와 비둘기집의 원리를 인식할 수 있는 활동이다.

◇ **(전략분석)** 3개의 자연수가 있다. 그 중에서 합이 짝수가 되는 두 수가 반드시 있다.
이 문제는 두 가지의 문제해결전략을 생각할 수 있다. 하나는 수형도를 그려 해결하는 방법이고, 다른 하나는 비둘기집의 원리를 이용하는 방법이 있다.

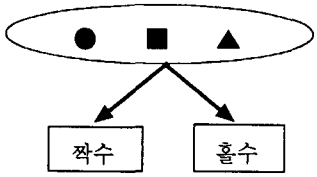
· 수형도를 그려 해결하는 방법:



<그림 8> 수형도 전략

· 비둘기집의 원리를 이용하는 방법: 여기서는 무엇을 비둘기로, 무엇을 비둘기집으로 생각하느냐가 중요하다. 세 개의 자연수를 비둘기로 보고, 홀수, 짝수를 비둘기집으로 보면, 다음과 같다.

9) 일반적으로 이 게임을 램지게임(Ramgey Game)이라고 부른다(Cameron, 1994).



<그림 9> 비둘기집의 원리를 이용한 전략

여기서 보면, 비둘기는 3마리이고, 비둘기집은 2개이기 때문에 적어도 2마리이상 들어간 집이 반드시 있게 된다. 그러므로 홀수집에는 홀수가, 짝수집에는 짝수가 들어가야 하기 때문에, 그 2마리이상인 집이 짝수집이라면 당연히 두 수의 합은 짝수가 되고, 홀수집이라도 그 합은 짝수이기 때문에 3개의 자연수에서 그 합이 반드시 짝수가 됨을 알 수 있다.

이 두 가지의 해결전략을 통해 같은 문제지만 해결전략에 따라 문제해결을 얼마나 효율적으로 할 수 있는지 생각해 볼 수 있다.

2) 포함-배제의 원리

포함-배제의 원리는 어떤 조건을 만족하는 대상들을 직접적으로 헤아리기 보다는 간접적(indirect)으로 헤아리기가 더 간단한 세기문제에서 자주 나타난다. 이를 테면, 1에서 100까지의 자연수 중에서 4로 나누어 떨어지지 않는 자연수의 개수를 구하는 문제 또는 어떤 대상들의 순서있는 나열에서 특수한 대상의 위치를 고정시키는 경우의 수를 구하는 문제는 직접적인 방법보다 간접적인 방법이 더 유리할 수가 있다. 이러한 원리를 상기해 보자.

먼저, 주어진 유한집합 S에서, 어떤 성질 P를 만족하는 S의 부분집합을 A로 두자. 이때, 성질 P를 만족하지 않는 S의 원소들로 구성된 집합의 크기는

$$|A^c| = |S| - |A|$$

이다. 좀더 확장해서 생각해보자. 주어진 유한집합 S에서, 두 부분집합 A_1과 A_2를 각각 어떤 성질 P_1과 P_2를 만족하는 집합으로 두자. 이때, 성질 P_1도 성질 P_2도 만족하지 않는 S의 원소들로 구성된 집합의 크기는

$$|A_1^c \cap A_2^c| = |S| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

이다. 이러한 개념은 n개의 집합의 경우로 일반화 될 수 있고, 또한 벤다이아그램에 의해서 잘 설명될 수 있다.

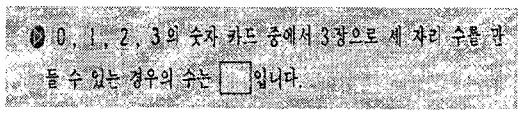
◇ **(포함-배제의 원리 이용하기)**

「0, 1, 2, 3 의 숫자 카드 4장을 한 장씩 늘어놓아 네 자리 수를 만들 수 있는 경우의 수는?」 이러한 종류의 문제에 사용할 수 있는 문제해결전략으로 수형도와 포함-배제의 원리, 두 가지를 생각할 수 있다. 수형도를 이용하는 경우는 많이 다루고 있기 때문에, 여기서는 포함-배제의 원리를 사용해 보자.

우리가 구하려는 경우의 수(첫 번째 자리에 0이 오지 않는 경우의 수)는

4장의 숫자카드를 순서 있게 나열하는 수 −
첫 번째 자리에 0이 오는 경우의 수

위의 식에서 각각의 경우의 수를 구하는 문제는 초등학교 수학교과서에 많이 나타난다(<그림 19> 참조). 위의 예와 교과서에 제시된 예(<그림 10>)를 비교해 보면 그 답이 같음을 알 수 있다.

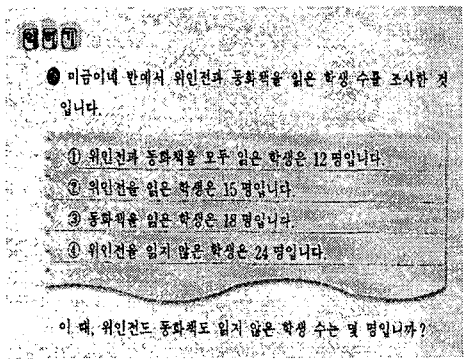


<그림 10> 순서가 있는 부분나열 수
(교과서 <6-나> 6단원 99쪽)

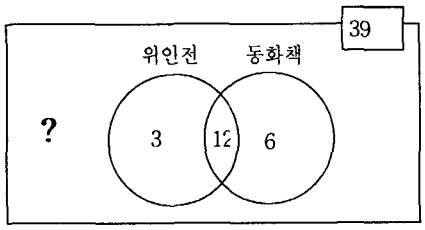
여기서 한 가지 살펴볼 점은 이 차시에 나타난 교과서의 구성이다. 교과서에서는 세 장의 카드를 가지고 세 자리 수를 만드는 즉, 순서가 있는 전체나열 문제와 네 장의 카드를 가지고 세 자리 수를 만드는 즉, 순서가 있는 부분나열 문제로 구성되어 있다. 여기서 두 활동 중간에 위의 예(포함-배제의 원리 이용하기 참조)를 넣고 이 세 활동을 통해 자기 나름대로의 문

제해결전략을 생각하게 해 보는 것도 앞에서 설명한 이산수학의 성격 및 효과와도 부합되는 활동이라 생각된다.

◇ **(벤다이아그램 이용하기)** <그림 11>은 교과서에 나와 있는 전형적인 포함-배제의 원리가 숨어 있는 예이다. 조건들을 정리하면 다음과 같다(<그림 12> 참조).



<그림 11> 포함과 배제
(교과서 <6-가> 8단원 129쪽)



<그림 12> 그림 그리기

3) 자연수의 분할

「서로 같은 구슬 n개를 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수」를 알아보자. 이와 같은 종류인 모임의 분할 수를 수학적 기호 $p(n,k)$로 나타낸다. 예를 들어, 서로 같은 구슬(●) 4개를 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 살펴보자:

- $k=1$: {{● ● ● ●}}: 1가지
- $k=2$: {{●}, {● ● ●}}, {{● ●}, {● ●}}: 2가지
- $k=3$: {{●}, {●}, {● ●}}: 1가지
- $k=4$: {{●}, {●}, {●}, {●}}: 1가지
- $k\geq 5$: 0가지

가 됨을 알 수 있다. 즉,

$$p(4,1)=1,\ p(4,2)=2,\ p(4,3)=1,\ p(4,4)=1$$

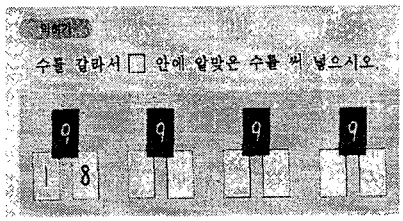
을 얻는다.

위의 예와 같이 $p(n,k)$는 「자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수」와 같음을 알 수 있다. 예를 들어, $p(4,2)=2$; 자연수 4를 2개의 자연수의 합으로 나타내면

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2$$

{{●}, {● ● ●}}, {{● ●}, {● ●}}

<그림 13> 자연수의 분할



<그림 14> 수 가르기 (교과서 <1-가> 4단원 55쪽)

제 7차 교육과정 초등수학교과서에 나와 있는 자연수의 분할 문제는 대부분 저학년에서 가르기와 모으기의 활동으로 이루어지고 있다(<그림 14> 참조). 이를 좀 더 발전시켜 저학년에서 다룬 활동을 가지고 고학년에서는 자연수의 분할과 관련된 경우의 수를 따져보는 학습활동도 첨가하면 좋을 것 같다. 이는 학생들로 하여금 수 감각 및 자연수 집합에서 덧셈과 관련된 연산법칙을 익히는 데도 유용하다.

◇ **(두 개의 그룹으로 나누어서 생각하기)** 두 수의 합이 7이 되는 경우의 수는 몇 가지일까요?

◇ **(여러 개의 그룹으로 나누어서 생각하기)** 여러 가지 그룹으로 나누어서, 7이 되는 경우의 수는 몇 가지일까요?

4) 모임의 분할

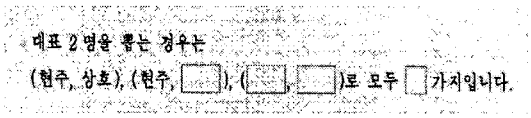
「주어진 n개의 서로 다른 구슬을 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수」를 모임의 분할 수 또는 제 2종 스털링수(Stirling number of the second kind)라고 부르고, 수학적 기호 $S(n, k)$로 나타낸다. 여기서 k개의 그룹을 구별하지 않는다고 가정한다. 예를 들어, 빨간색, 파란색, 검은색인 구슬 3개를 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 살펴보자.

- $k=1$: {{빨, 파, 검}}: 1가지
- $k=2$: 3가지

  {{빨}, {파, 검}}, {{파}, {빨, 검}}, {{검}, {빨, 파}} …… (1)
- $k=3$: {{빨}, {파}, {검}}: 1가지
- $k \geq 4$: 0가지

즉, $S(3,1)=1$, $S(3,2)=3$, $S(3,3)=1$이고 다른 경우는 방법의 수가 0이 됨을 알 수 있다.

<그림 15>는 세 명의 학생들 중에서 두 명의 대표를 뽑는 조합적 문제로, 이는 초등수학에서 순서가 없는 경우의 수를 찾는 문제이다.



<그림 15> 모임의 분할
(익힘책 <6-나> 6단원 101쪽)

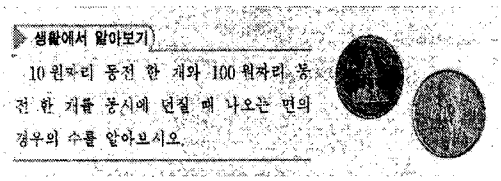
위와 같은 문제는 모임의 분할 관점에서도 해결할 수 있다. 3명을 2개의 그룹으로 나누면, 비둘기집의 원리에 의하여 한 그룹은 두 명(대표그룹)이 있다. 따라서 구하고자하는 경우의 수는 $S(3,2)=3$이다(위의 (1) 참조). 만일, 교사가 이러한 개념을 가지고 있다면 어린이들에게 보다 다양한 문제해결전략을 키우는데 도움을 줄 수 있다.

3. 경우의 수

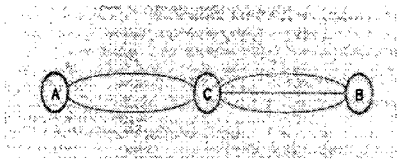
앞에서 언급한 모든 경우도 이 범주에 속하지만 여기서는 주로 순서쌍의 개수, 순열과 조합을 중심으로 논의해 보기로 한다.

1) 순서쌍의 개수

제 7차 교육과정 초등수학교과서에서 도입해서 다루고 있는 「순서에 따른 짝짓기 방법으로 경우의 수를 알아봅시다」라는 차시와 관련된 문제들은 결국, 주어진 두 유한집합 A와 B의 곱집합 $A \times B$의 원소의 개수를 찾는 문제와 동일하다. 몇 가지의 전형적인 예를 보면

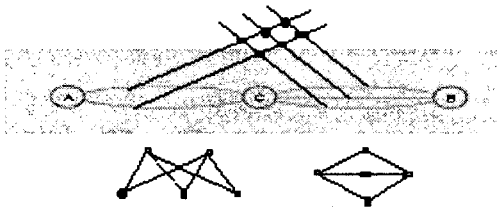


<그림 16> 순서쌍의 개수
(교과서 <6-나> 6단원 96쪽)



<그림 17> 길의 경우의 수
(익힘책 <6-나> 6단원 103쪽)

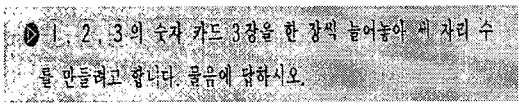
이러한 문제들의 문제해결전략으로 표 만들기, 수형도 등을 사용한다. 그러나 이러한 전략들은 순서쌍의 개수를 찾는 모델 만들기에 불과하다. 이 모든 것이 동일한 개념이라는 사실을 학생들에게 인식시키는 활동이 필요하고, 다양한 모델을 만들어 보는 것도 요구된다. 예를 들어, <그림 18>은 몇 개의 모델을 표현하고 있다.



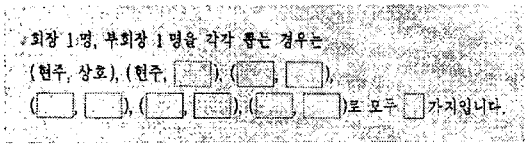
<그림 18> 길의 경우의 수와 관련된 다양한 모델

2) 순열

서로 다른 몇 개의 대상을 순서가 있게 나열하는 것을 의미한다. 교과서에서 다루고 있는 전형적인 예는, 대상전체를 선택해서 순서 있게 나열(<그림 19> 참조)하거나 또는 전체대상에서 부분을 선택해서 그 선택된 대상을 순서 있게 나열(<그림 20> 참조)하는 것들이다. 그리고 문제해결 전략은 주로 수형도를 이용한다.



<그림 19> 순서 있는 전체나열
(교과서 <6-나> 6단원 99쪽)



<그림 20> 순서 있는 부분나열
(익힘책 <6-나> 6단원 101쪽)

3) 조합

서로 다른 몇 개의 대상을 순서가 없게 나열하는 것을 의미한다. 교과서에서는 제시되어 있지 않고 수학익힘책에서만 다루고 있다 (<그림 15> 참조).

4. 무게재기

무게재기와 관련해서 제 7차 교육과정 초등수학교과서에서는 <그림 21>과 같은 문제를 제시하고 있다.

<그림 21> 무게재기 (교과서 <5-나> 8단원 134쪽)

이 문제는 양팔 저울의 한쪽에만 추를 올려놓는 경우와 양쪽에 추를 올려놓을 수 있는 경우의 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있는데, 현행 초등학교 수학교과서에서는 한쪽에만 추를 올려놓는 경우로 제한하고 있다. 제한의 이유는 너무나 많은 경우가 발생한다는 것이다. 하지만 추의 수를 줄인다면 위의 두 가지 경우 모두를 다룰 수 있으며, 이는 문제를 보는 다양한 관점을 유발할 수 있다. 그러므로 다음의 예처럼 양팔저울의 양쪽 모두에 추를 올려놓는 것을 생각해 본다면 좀더 창의적인 학습활동을 할 수 있다.

◇ **(다양하게 생각하기)** 1g, 3g, 9g의 추로 잴 수 있는 물건 □의 무게는 몇 가지인가? 각 경우에 대하여 생각해 봅시다(Steven, 2002).

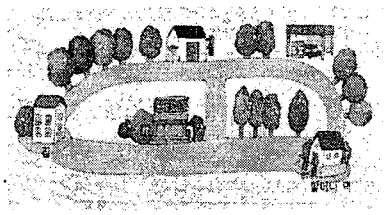
(1) 양팔 저울의 한쪽에만 추를 올려놓는 경우

(2) 양팔 저울의 양쪽에 올려놓을 수 있는 경우

물건의 무게(g)	양팔저울의 왼쪽	양팔저울의 오른쪽
1	1	□
2	3	1+□
⋮	⋮	⋮

5. 네트워크 문제

네트워크 문제는 수학뿐만 아니라 다른 여러 분야에 사용될 수 있다. 이는 운하 연결, 도로망 연결과 관련된 비용문제, 거리문제 등과 관련된 최적화 문제로 볼 수 있기 때문이다. 간단하지만 초등학교 교과서에 실린 예를 살펴보면 <그림 22>과 같다.



<그림 22> 최단경로 (교과서 <6-나> 5단원 92쪽)

초등에서 네트워크문제와 관련된 기존의 학습자료들은 많지만 대부분의 경우 문제를 제시하고 찾아보는 활동정도로 도입하고 있다. 이러한 경우에, "어떻게

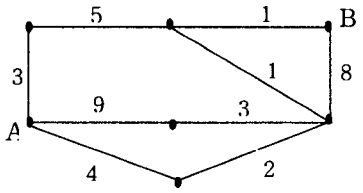
경로를 찾았는가?" 라는 물음에 그냥 시행하다가 우연히 찾았다(퍼즐처럼)라는 학생들의 대답이 대부분이다. 즉, 학습효과가 없다는 것이다. 따라서 여기서는 네트워크 문제를 일반적으로 해결할 수 있는 기존의 알고리즘을 초등학교 수준으로 쉽게 분석하고, 알고리즘 속에 내포된 핵심적인 개념을 얻고자 한다. 또한 이러한 핵심적인 개념을 초등에 적용 가능한 것인지에 대하여 약간의 시사점을 얻고자 한다.

1) 최단경로 문제

모든 변의 무게(거리, 비용 등)가 0이상인 네트워크에서 최단경로를 구하는 딕스트라(Dijkstra) 알고리즘을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

(1) 먼저 출발점을 0으로 본다.
(2) 출발점에서 다음 경로로 갈 수 있는 모든 곳들의 무게를 보고, 그 중에서 최단경로인 곳을 표시한다.
(3) 전 단계에서 선택한 경로에서 한 단계로 이어진 경로 중 최단경로인 곳을 표시한다.
(4) 이와 같은 활동을 반복하면 도착점까지 가는 최단경로를 찾을 수 있다.

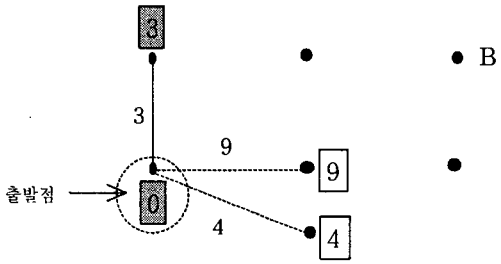
◇ **(알고리즘 분석)** 다음의 예(황석근 외, 2001)에 위 알고리즘을 이용해서, 출발점 A에서 도착점 B까지 가는 최단경로와 최단거리를 구하는 문제의 문제해결전략을 초등에 맞도록 각색하여 분석해보자.



단계 1: 먼저 출발점을 0으로 보고, 출발점에서 갈 수 있는 다음 경로 중에서 최단 경로를 생각하자.

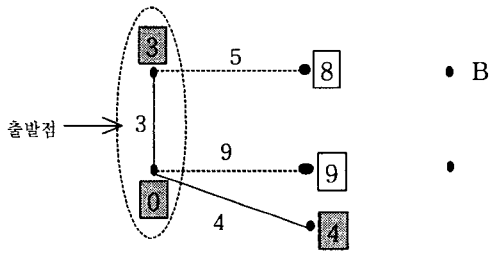
(1) 출발점에 $\boxed{0}$을 표시하고 이를 점선으로 둘러싼다.

(2) 출발점에서 다음경로를 점선으로 잇고, 그 거리를 생각하여 $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, $\boxed{4}$로 표시한다. 그 중에서 가장 짧은 거리를 실선으로 만들고, $\boxed{3}$으로 표시한다.



단계 2: (1) 단계 1에서 알게 된 것들, $\boxed{0}$, $\boxed{3}$ 및 실선을 점선으로 둘러싼다. 실제로, $\boxed{0}$, $\boxed{3}$을 출발점으로 생각하면 인식하기 편하다.

(2) 꼭지점 $\boxed{0}$, $\boxed{3}$에서의 다음경로들을 점선으로 잇고, 그 거리를 생각하여, $\boxed{9}$, $\boxed{4}$, $\boxed{8}$로 표시한다. 그 중에서 가장 짧은 거리를 실선으로 만들고, $\boxed{4}$로 표시한다.



이하 단계는 <부록>을 참조하세요.

2) 최소연결 문제

주어진 몇 개의 장소를 연결하는 관개운하체계가 필요하다고 하자. 어떤 두 장소는 지리적인 원인이나 정치적인 이유 때문에 운하로 연결할 수 없다는 점을 제외하고는 각 운하를 파고 유지하는 비용을 알고 있

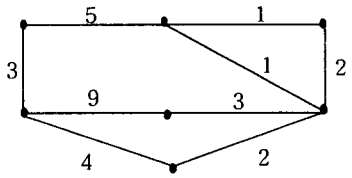
다고 하자. 가능한 최소 전체비용으로 모든 장소를 연결할 수 있는 운하체계를 어떻게 디자인하면 될까?

이와 같은 최소연결 문제는 각 장소를 꼭지점으로, 각 운하를 변으로 두면 무게(비용)그래프로 나타낼 수 있다. 그러면, 이 문제는 무게그래프의 각 꼭지점을 지나면서 최소무게의 부분그래프를 찾는 문제로 귀착 된다. 만일 이 부분그래프가 순환길을 가지고 있다면 순환길의 변들 중 하나를 제거함으로써 더 작은 전체 비용을 만들 수 있기 때문에, 이 부분그래프는 항상 생성나무(spanning tree)가 되어야만 한다. 즉, 모든 꼭지점은 포함하는 주어진 그래프의 부분그래프를 의미한다.

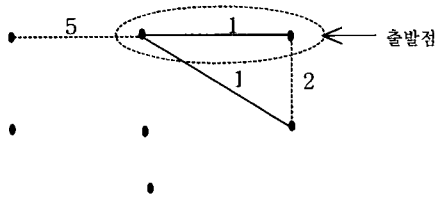
최소연결 문제의 문제해결 전략인 Kruskal의 알고리즘(생성나무 찾기)을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

(1) 먼저, 최소무게의 변을 선택한다.
(2) 선택된 변의 각 꼭지점에서 연결할 수 있는 변들의 무게를 보고, 그 중에서 최소무게인 변을 선택한다.
(3) 전 단계에서 선택된 변들의 각 꼭지점에서 연결할 수 있는 변들의 무게를 보고, 그 중에서 최소무게인 변을 찾는다. 주의할 점은 전 단계에서 선택된 변들과 새로 선택된 변에는 순환길이 없어야 한다.
(4) 이와 같은 활동을 반복하여, 모든 꼭지점을 연결한다.

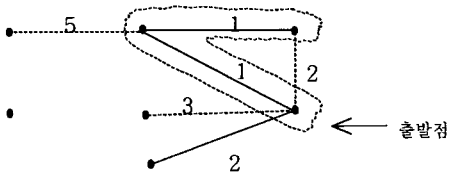
◇ (**알고리즘 분석**) 아래에 주어진 그래프를 위 알고리즘을 이용해서, 최소연결 문제를 분석하여 보자.



단계 1: (1) 먼저, 최소무게의 변을 선택한 후, 실선으로 그리고, 점선으로 둘러싼다.
(2) 선택된 변의 각 꼭지점에서, 둘러싸인 점선 외부로의 한 단계로 연결된 변을 찾고, 그 중에서 최소무게의 변을 실선으로 그린다. 즉, 무게 1, 2, 5인 변 중에서 무게 1인 변을 선택한다.



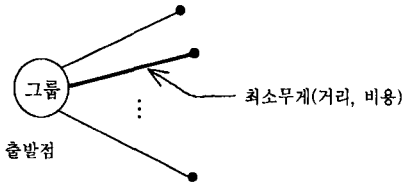
단계 2: (1) 단계 1에서 선택된 변들을 점선으로 둘러싼다.
(2) 점선으로 둘러싸인 선택된 변의 각 꼭지점에서, 둘러싸인 점선 외부로의 한 단계로 연결된 변을 찾고, 그 중에서 순환길이 생기지 않는 최소무게의 변을 실선으로 그린다(무게 2인 변의 선택에 주의하자: 순환길이 생기지 않도록). 즉, 무게 2, 3, 5인 변에서 순환길이 생기지 않는 최소무게 2인 변을 선택한다. 실제로, 점선으로 둘러싸인 변들의 모임을 항상 출발점으로 생각하면 인식하기 편하다.



이후의 단계는 부록을 참조하세요.

위의 두 알고리즘에 사용된 핵심적인 개념은 <그림 23>과 같다. 즉, 각 단계의 출발점은 이전단계에서 얻은 점들과 경로들로 구성된 하나의 그룹이고, 이 그룹의 외부에 있는 점들과 한 단계 연결경로 중에서 무게(길이, 비용)가 최소인 경로를 찾는 일이 계속 반복된다. 어떤 것을 그룹화 하여 하나로 보는 활동은 초등에서 흔히 나타난다. 예를 들어, 수의 자리 값과 곱셈 등과 같은 개념의 도입 시 자주 사용하는 활동이다.

따라서 묶어서 하나(그룹)인 개념을 잘 이해하는 학생들에게는 이러한 알고리즘과 관련된 활동도 충분히 인식할 수 있다고 생각된다.



<그림 23> 최단경로와 최소연결 찾기의 기본개념

IV. 결론 및 제언

본 연구에서는 제 7차 교육과정 초등수학교과서를 잘 알려진 몇몇 이산수학이론을 중심으로 분석하고, 이를 통해서 학생들을 위한 심화 학습자료의 예시들을 제시하였다. 좀더 구체적으로 말하면, 이산수학과 관련된 기존 연구의 분류의 관점(이도영, 1995; 한길준 외, 2001; 전민경, 2003)과는 달리 이중계수 원리, 분배와 분할(비둘기집의 원리, 포함배제의 원리, 자연수의 분할, 모임의 분할), 경우의 수(순서쌍의 개수, 순열, 조합), 무게재기, 네트워크 문제를 중심으로 분석하였다. 이러한 연구는 교사들의 이산수학이론에 대한 경험 및 학습부족(전통적으로 연속수학을 중시)으로 인한 이산수학에 대한 개념의 부족, 이에 따라 학습자료 개발능력의 부족을 초래할 수 있다는 점에서 그 중요성이 있다고 할 수 있다. 또한 교사들이 낯설고 어렵게만 여겨졌던 이산수학을 좀더 쉽고 친근하고 여기도록 하는 데도 연구의 주안점을 두었다.

앞에서 언급한 주제들을 중심으로 분석한 결과와 시사점은 다음과 같다.

먼저, 이중계수 문제는 일상에서 많이 접할 수 있는 것으로 우리의 현행 초등학교 수학교과서에서도 많이 도입하여 다루고 있다. 하지만 도입된 문제들의 본질적인 측면을 살펴보면, 모두 한 가지의 개념으로 제시하고 있음을 알 수 있다. 따라서 보다 다양한 개념을 습득할 수 있는 학습자료의 개발이 필요하다.

둘째, 배열과 분배의 문제를 살펴보면 교과서에서 제시된 제한된 문제해결 전략을 다양한 각도로 생각하는 데 분석의 목적을 두었다. 그 결과 초등에서도 충분히 적용가능하며 학생들의 창의성 개발을 위한 심화 학습 자료로도 충분히 그 가치가 있다고 사료된다.

셋째, 경우의 수 문제는 우리 교과서에서도 상당히 많이 다루고 있다. 하지만 문제해결의 전략적 측면에서 보면 표 만들기와 수형도가 대부분이다. 실제로 이 두 전략은 같은 수학적 개념이다. 단지 모델적 측면에서만 구분된다. 이러한 점에서 다양한 형태의 모델을 만들어 보는 것도 수학적 센스를 기르는데 도움을 줄 수 있다.

넷째, 양팔저울 문제는 이산수학 이론으로 보는 것보다는 이산수학과 관련된 내용으로 보고, 문제를 보는 다양한 관점을 유발할 수 있다는 점에서 제시하였다. 이를테면, 양팔저울 양쪽 모두에 추를 놓으면 물건의 무게를 재는 방법의 수는 어떻게 될까? 라는 문제를 줌으로써 어린이들이 수학적 배경 없이도 다양하게 생각해 보는 경험을 심어 줄 수 있는 것이다.

끝으로, 네트워크 문제는 이산수학의 알고리즘적 사고를 학생들에게 인식시킨다는 점에서 수학 학습활동으로서 다루어 봄 직하다. 최단경로 및 최소연결문제는 실생활과 연관성이 많은 문제로, 수학을 배우는 목적(수학을 배워서 어디에 사용하지?)과도 잘 부합된다. 또한, 이러한 문제를 해결하는 알고리즘 속에 숨어있는 핵심적인 개념(<그림 23>)의 인식은 초등에서도 가능하다.

이제, 이산수학이론을 중심으로 한 학습활동에 있어서 몇 가지의 중요한 제언을 하고자 한다.

첫째, 이산수학이론을 중심으로 한 학습자료 개발은, 먼저 수학적 이론을 소개하고 이에 따른 활동을 하는 학습이 아니라, 실제적인 활동을 통해서 학습이 일어나도록 해야 한다. 이러한 점은 교사가 지니고 있는 수학이론에 많은 영향을 받을 수 있다.

둘째, 학습자료는 속진이 아닌 초등학교 교육과정과 연계가 되어야 한다.

셋째, 학습자료는 이산수학의 본질적 속성인 수학적 창의성 개발이 목적이어야 한다.

본 연구에서는 초등에 적용 가능한 몇몇 이산수학 이론을 중심으로 분석을 하였지만, 앞으로 좀 더 다양한 이산수학 주제를 분석하고 이에 따른 학습자료 개발이 필요하다고 생각된다.

참 고 문 헌

교육부 (2001a). 교육부 고시 제 1977-15에 따른 중학교 교육과정 해설(Ⅲ)-수학. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육부 (2001b). 교육부 고시 제 1977-15에 따른 고등학교 교육과정 해설(5)-수학. 서울: 대한교과서 주식회사.

이길주 (2001). 이산수학교육과정에 대한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문, 서울대학교.

이도영 (1995). 국민학교 고학년에서 이산수학의 소개에 관한 기초 연구. 한국교원대학교 대학원.

전민경 (2003). 제 7차 교육과정에서 초등학교 이산수학에 관한 연구. 단국대학교 교육대학원.

정치봉 (1999). 이산수학. 서울: 경문사.

최근배 · 안선영 (2005). 초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램 개발 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(1)** pp. 167-189.

한길준 · 정승진 (2001). 초등학교에서 이산수학의 활용 방안 탐색. 단국대학교 교과교육연구소 교과교육 연구 제5호.

황석근 · 이재돈 · 김익표 (2001). 이산수학. 서울: 블랙박스.

Brualdi, R. A. (1977). *Introductory Combinatorics.* New York, Oxford, Amsterdam: North-Holland.

Cameron, P. J. (1994). *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms.* London: Cambrige University Press.

Dossey, J. A. (1991). Discrete Mathematics: The Math for Our Time, Margaret, Kenny, M. J. & Hirsch, C. R. (Ed.), *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Hart E. W. (1991). Discrete Mathematics: An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum, Kenny, M. J. & Hirsch. C. R. (Ed.), *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

_____ (1997). Discrete Mathematics Modeling in the Secondary Curriculum: Rational and Examples from the Core-plus Mathematics Projec.(Eds.), *Discrete Mathematics in the School.* USA: American Mathematics Society.

Kenny. M. J. (1991). Discrete Mathematics: An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum, Hart. E. W. & Hirsch. C. R. (Ed.), *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Maurer, S. B. (1997). What is Discrete Mathematics? The Many Answers. In Joseph G. Rosenstein, Deborah S. Franzblau & Fred S. Roberts (Ed.), *Discrete Mathematics in the School.* USA: American Mathematics Society.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 구광조 · 오병승 · 류희찬 공역 (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Rosenstein, J. G. (1997). A comprehensive view of *Discrete Mathematics: Chapter 14 of the New Jersey Mathematics Curriculum Framework. In J. G.* Rosenstein, D. S. Franzblau & F. S. Roberts (Ed.), *Discrete Mathematics in the School.* USA: American Mathematics Society.

Rosen, K. H. (1988). *Discrete Mathematics and Its Applications* (3rd Ed). McGraw-Hill.

Steven G. K. (좌준수 · 임중삼 역) (2002). 문제해결의 수학적 전략. 서울: 경문사.

An Analytic Study on the Elementary School Mathematics Textbooks via Discrete Mathematics

Keunbae Choi
Department of Mathematics Education, Jeju National University of Education, Jeju 690-781, Korea
E-mail: kbchoe@jejue.ac.kr

Kang, Mun-Bo
Sinchon Elementary school, Sinchon-ri, Jocheon-eup, Bukjeju-gun, Jeju-do, Korea
E-mail: muelbona@hanmail.net

Discrete mathematics is as important as it was reformed as an optional subject in the middle school and high school in the 7th national curriculum. There are a lot of studies about discrete mathematics in the middle course but studies about it in elementary course has little performed.

Therefore, the purpose of this paper is to analyze the concept of discrete mathematics, which is hidden in the mathematics textbook of elementary school and to develop the learning materials of discrete mathematics. Through this, it would make the students to have the sharp insight in their daily life and mathematical experience by learning the mathematical inquiry and adaptation.

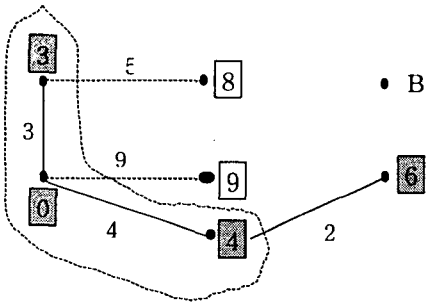
* ZDM classification: D53
* MSC2000 classification: 97D50

<부 록>

1. 최단경로 찾기

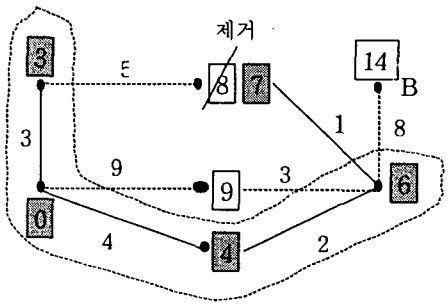
단계 3: (1) 단계 2에서 알게 된 것들 0, 3, 4 및 실선을 점선으로 둘러싼다.

(2) 0, 3, 4에서 둘러싼 점선외부로의 다음경로를 점선으로 잇는다. 즉, 아래의 그림에서 0에서 출발하는 경로는 3개가 있는데, 그 중 둘러싼 점선외부의 것 9만 고려하면 된다. 그 거리를 생각하여, 9, 8, 6으로 표시한다. 그 중에서 가장 짧은 거리를 실선으로 만들고, 6으로 표시한다.



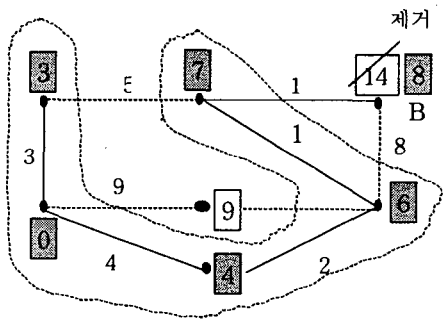
단계 4: (1) 단계 3에서 알게 된 것들 0, 3, 4, 6 및 실선을 점선으로 둘러싼다.

(2) 0, 3, 4, 6에서 둘러싼 점선외부로의 다음경로를 점선으로 잇고, 그 거리를 생각하여 9, 8, 9, 7, 14로 표시한다. 이 때, 주의할 점은 도착점의 값이 두 개 이상일 경우는 가장 작은 값을 택한다. 그 중에서 가장 짧은 거리를 실선으로 만들고, 7로 표시한다.

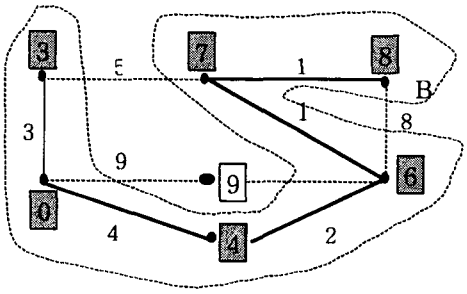


단계 5: (1) 단계 4에서 알게 된 것들 0, 3, 4, 6, 7 및 실선을 점선으로 둘러싼다.

(2) 0, 3, 4, 6, 7에서 둘러싼 점선외부로의 다음경로를 점선으로 잇고, 그 거리를 생각하여 9, 9, 14, 8로 표시한다. 이 때, 주의할 점은 도착점의 값이 두 개 이상일 경우는 가장 작은 값을 택한다. 그 중에서 가장 짧은 거리를 실선으로 만들고, 8로 표시한다.



단계 6: 이제 최단경로를 찾을 준비가 다 되었다. 그 최단경로는 역 추적하면 된다.

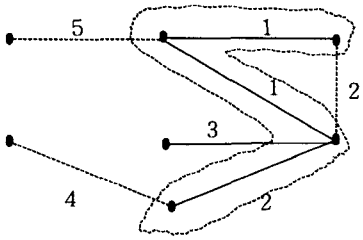


따라서, A에서 출발하여 B까지 가는 최단경로는 마지막 그림의 경로이고 그 거리는 8이 되는 것이다.

2. 최소연결 찾기

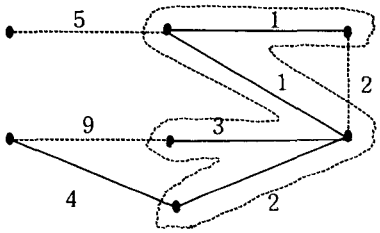
단계 3: (1) 단계 2에서 선택된 변들을 점선으로 둘러싼다.

(2) 점선으로 둘러싸인 선택된 변의 각 꼭지점에서, 둘러싸인 점선 외부로의 한 단계로 연결된 변을 찾고, 그 중에서 순환길이 생기지 않는 최소무게의 변을 실선으로 그린다. 즉, 무게 2, 3, 4, 5인 변에서 2의 경우는 순환길이 생기므로, 그 나머지 무게 3, 4, 5인 변에서 최소무게 3인 변을 선택한다.



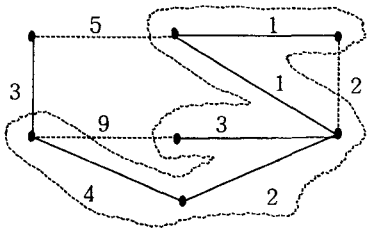
단계 4: (1) 단계 3에서 선택된 변들을 점선으로 둘러싼다.

(2) 점선으로 둘러싸인 선택된 변의 각 꼭지점에서, 둘러싸인 점선 외부로의 한 단계로 연결된 변을 찾고, 그 중에서 순환길이 생기지 않는 최소무게의 변을 실선으로 그린다. 무게 2의 경우는 순환길이 생긴다.



단계 5: (1) 단계 4에서 선택된 변들을 점선으로 둘러싼다.

(2) 점선으로 둘러싸인 선택된 변의 각 꼭지점에서, 둘러싸인 점선 외부로의 한 단계로 연결된 변을 찾고, 그 중에서 순환길이 생기지 않는 최소무게의 변을 실선으로 그린다. 2의 경우는 순환길이 생긴다.



단계 6: 이제, 이 단계에서 최소무게 생성나무는 아래와 같이 찾을 수 있다.