

두꺼운 링의 고유진동 해석

Natural Vibration Analysis of Thick Rings

김창부† · 박정우* · 김세희*

Chang-Boo Kim, Jung-Woo Park and Sehee Kim

(2005년 7월 5일 접수 : 2005년 9월 15일 심사완료)

Key Words : Thick Ring(두꺼운 링), Thin Ring(얇은 링), In-plane Motion(면내운동), Out-of-plane Motion(면외운동), Cyclic Symmetry(순환대칭)

ABSTRACT

In this paper, we have systematically formulated the equations concerned to the in-plane and out-of-plane motions and deformations of a thick circular beam by using the kinetic and strain energies in order to analyse natural frequencies of a thick ring. The effects of variation of radius of curvature across the cross-section and also the effects of bending shear, extension and twist are considered. The equations of motion for natural vibration analysis of a ring are obtained utilizing the cyclic symmetry of vibration modes of the ring. The frequencies calculated using thick ring model and thin ring model are compared and discussed with the ones obtained from finite element analysis using the method of cyclic symmetry with 20-node hexahedral solid elements for rings with the different ratio of radial thickness to mean radius.

1. 서 론

링의 고유진동 해석은 면내 굽힘과 인장, 면외 굽힘과 비틀림의 연성으로 인하여 복잡하게 된다. 링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화에 의한 효과와 굽힘전단 및 회전관성 효과를 무시하면 링의 반경방향 두께가 반경에 비하여 매우 작지 않은 경우 즉 두꺼운 링의 경우에는 고유진동해석은 부정확하게 되고, 링의 반경방향 두께가 반경에 비하여 매우 작은 경우 즉 얇은 링의 경우에도 고차모드의 고유진동수에서 오차가 크게 발생한다.

오래 전부터 링의 고유진동해석에 관한 연구가 많이 되어 왔다. 대부분의 연구는 링의 단면을 가로 지

르는 곡률반경의 변화에 의한 효과를 무시한 얇은 원형 보 모델을 사용하여 링의 고유진동을 해석하였다. 대표적인 연구는 참고문헌 (1~5)를 들 수 있다.

링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화에 의한 효과를 고려한 두꺼운 원형 보 모델을 사용하여 링의 고유진동을 해석한 대표적인 연구를 간략히 소개하면 다음과 같다.

Davis 등⁽⁶⁾은 링의 면내 고유진동을 두꺼운 원형 보 유한요소를 개발하여 해석하였고, Kirkhope⁽⁷⁾는 두꺼운 링의 면내 고유진동을 순환대칭 모드를 사용해서 동적 강성행렬을 유도하여 해석하였다. Bickford 등⁽⁸⁾은 두꺼운 링의 면외 고유진동을 순환대칭 모드를 사용해서 특성방정식을 유도하여 해석하였다.

이 논문에서는 두꺼운 링의 고유진동을 해석하기 위하여 상기한 논문들에서 제시된 운동방정식을 수정하고 보완하여 원형 보의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화 효과를 고려하면서 굽힘 전단, 인장과 비틀림을 고려할 수 있도록 두꺼운 원형 보의 면내 및 면외 운동과 변형에 관련된 식들을 운동 및 변형

† 책임저자 : 정희원, 인하대학교 기계공학과
E-mail : kimcb@inha.ac.kr
Tel : (032) 860-7383, Fax : (032) 868-1716
* 인하대학교 대학원 기계공학과

에너지를 사용하여 체계적으로 정립하고, 링의 진동 모드의 원주방향 순환대칭성을 이용하여 고유진동해석을 위한 운동방정식을 유도하였다. 링의 평균반경에 대한 반경방향 두께의 비가 다른 링에 대하여 두꺼운 링 모델과 얇은 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동해석 결과를 육면체 20절점 고체요소를 사용하면서 순환대칭성을 이용한 유한요소 고유진동해석 결과와 비교하고 검토한다. 또한 두꺼운 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수를 참고문헌 (7, 8)의 결과와 비교한다.

2. 두꺼운 링의 운동 및 변형

2.1 링의 기하학

링의 기준 좌표계는 $Oxyz$ 이다. 링의 원주방향에 수직인 단면의 면적은 일정하고 단면의 중심점을 지나는 중심선의 반경은 a 이다. x 축에서 원주방향으로 θ 만큼 떨어진 단면의 기준좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 는 단면의 중심점 C 점을 원점으로 하고 반경방향 ξ , 접선방향 η , 축방향 ζ 의 축을 갖는다. 단면은 $\xi-\eta$ 면 및 $\eta-\zeta$ 면에 대하여 이중대칭이다.

2.2 변위

링이 변형할 때 단면은 변형하지 않고 평면을 유지한다고 가정한다. C 점의 변위 및 단면의 회전은 θ 의 함수로서 다음과 같다.

$$\vec{u}_C = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + u_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (1)$$

$$\vec{\phi}_C = \phi_\xi \vec{e}_\xi + \phi_\eta \vec{e}_\eta + \phi_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (2)$$

여기서 $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ 는 각각 ξ, η, ζ 방향의 단위

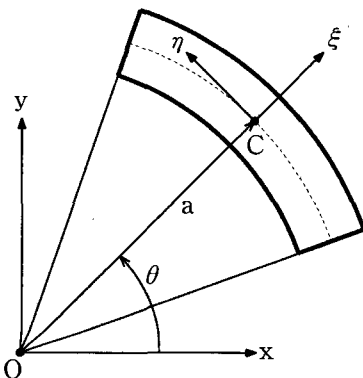


Fig. 1 Geometry of a ring segment

길이 벡터이다.

C 점을 통과하는 중심선에 수직한 단면상의 P 점의 C 점에 대한 상대위치는 다음과 같다.

$$\vec{\rho} = \overrightarrow{CP} = \xi \vec{e}_\xi + \zeta \vec{e}_\zeta \quad (3)$$

단면 회전이 매우 작다고 가정하면 P 점의 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{u}_P &= \vec{u}_C + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} \\ &= (u_\xi + \zeta \phi_\eta) \vec{e}_\xi + (u_\eta + \xi \phi_\zeta - \zeta \phi_\xi) \vec{e}_\eta \\ &\quad + (u_\zeta - \xi \phi_\eta) \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (4)$$

2.3 변형률 및 응력

P 점에서의 변형률을 단면 기준좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 의 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\eta\eta} &= \frac{a}{(a+\xi)} (\epsilon_\eta + \xi x_\zeta - \zeta x_\xi) \\ \gamma_{\eta\xi} &= \frac{a}{(a+\xi)} (\gamma_\xi + \zeta \tau_\eta) \\ \gamma_{\eta\xi} &= \frac{a}{(a+\xi)} (\gamma_\zeta - \xi \tau_\eta) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 ϵ_η 는 인장변형률, γ_ξ 와 γ_ζ 는 각각 ξ 와 ζ 방향 전단변형률, τ_η 는 η 방향 비틀림, x_ξ 와 x_ζ 는 각각 ξ 와 ζ 방향 곡률로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_\eta &= \frac{1}{a} (u_\xi + u_{\eta,\theta}) \\ \gamma_\xi &= \phi_\zeta + \frac{1}{a} (-u_\eta + u_{\xi,\theta}) \\ \gamma_\zeta &= -\phi_\xi + \frac{1}{a} u_{\zeta,\theta} \\ \tau_\eta &= \frac{1}{a} (\phi_{\eta,\theta} + \phi_\zeta) \\ x_\xi &= \frac{1}{a} \phi_{\zeta,\theta} \\ x_\zeta &= \frac{1}{a} (\phi_{\xi,\theta} - \phi_\eta) \end{aligned} \quad (6)$$

P 점에서의 응력을 단면 기준좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 의 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= E \epsilon_{\eta\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} &= G \gamma_{\eta\xi} \\ \sigma_{\eta\zeta} &= G \gamma_{\eta\zeta} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 E 는 Young계수, G 는 전단계수로서 E 와

Poisson비 ν 로 표현하면 다음과 같다.

$$G = E/2(1 + \nu) \quad (8)$$

2.4 변형에너지

링의 변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_A (\sigma_{\eta\eta} \epsilon_{\eta\eta} + \sigma_{\eta\xi} \gamma_{\eta\xi} + \sigma_{\eta\zeta} \gamma_{\eta\zeta}) \right. \\ &\quad \left. (a + \xi) dA \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [N_{\eta} \epsilon_{\eta} + N_{\xi} \gamma_{\xi} + N_{\zeta} \gamma_{\zeta} \\ &\quad + M_{\eta} \tau_{\eta} + M_{\xi} \chi_{\xi} + M_{\zeta} \chi_{\zeta}] a d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 N_{η} 는 인장력, N_{ξ} 와 N_{ζ} 는 각각 ξ 와 ζ 방향 전단력, M_{η} 는 비틀림 모멘트, M_{ξ} 와 M_{ζ} 는 각각 ξ 와 ζ 방향 굽힘 모멘트로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_{\eta} &= EA(1 + Z^*) \epsilon_{\eta} - EAZ^* a \chi_{\xi} \\ N_{\xi} &= GA(1 + Z^*) \gamma_{\xi} \\ N_{\zeta} &= GA(1 + Z^*) \gamma_{\zeta} + GAZ^* a \tau_{\eta} \\ M_{\eta} &= GI_{\eta}^* \tau_{\eta} + GAZ^* a \gamma_{\zeta} \\ M_{\xi} &= EI_{\xi}^* \chi_{\xi} - EAZ^* a \epsilon_{\eta} \\ M_{\zeta} &= EI_{\zeta}^* \chi_{\zeta} \end{aligned} \quad (10)$$

상기 식에서

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA \\ I_{\xi}^* &= \int_A \frac{a}{(a + \xi)} \xi^2 dA \\ I_{\zeta}^* &= \int_A \frac{a}{(a + \xi)} \xi^2 dA \\ I_{\eta}^* &= \int_A \frac{a}{(a + \xi)} (\xi^2 + \zeta^2) dA \\ Z^* &= -\frac{1}{A} \int_A \frac{\xi}{(a + \xi)} dA = \frac{I_{\xi}^*}{Aa^2} \end{aligned} \quad (11)$$

중심선에 수직인 단면에 분포된 전단응력이 단면경계에서 응력경계조건을 만족하도록 단면의 뒤틀림(warping)을 고려하여 전단력과 비틀림 모멘트를 수정해서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_{\xi} &= K_{\xi} GA(1 + Z^*) \gamma_{\xi} \\ N_{\zeta} &= K_{\zeta} GA(1 + Z^*) \gamma_{\zeta} + K_{\zeta} GAZ^* a \tau_{\eta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_{\eta} = GI_{\eta}^* \tau_{\eta} + K_{\zeta} GAZ^* a \gamma_{\zeta}$$

여기서 $J_{\eta}^* = K_{\eta} I_{\eta}^*$ 이며, K_{ξ} , K_{ζ} 는 단면의 전단계수⁽⁹⁾, K_{η} 는 단면의 비틀림 계수⁽¹⁰⁾이다.

2.5 운동에너지

P점의 속도는 θ 의 함수로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{u}_P &= \vec{u}_C + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} \\ &= (\dot{u}_{\xi} + \zeta \dot{\phi}_{\eta}) \vec{e}_{\xi} + (\dot{u}_{\eta} + \xi \dot{\phi}_{\zeta} - \zeta \dot{\phi}_{\xi}) \vec{e}_{\eta} \\ &\quad + (\dot{u}_{\zeta} - \xi \dot{\phi}_{\eta}) \vec{e}_{\zeta} \end{aligned} \quad (13)$$

따라서 링의 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_A \rho \vec{u}_P \cdot \vec{u}_P (a + \xi) dA \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\rho A (\dot{u}_{\xi}^2 + \dot{u}_{\eta}^2 + \dot{u}_{\zeta}^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\rho AZa (\dot{u}_{\eta} \dot{\phi}_{\zeta} - \dot{u}_{\zeta} \dot{\phi}_{\eta}) \right. \\ &\quad \left. + \rho I_{\xi} \dot{\phi}_{\xi}^2 + \rho I_{\zeta} \dot{\phi}_{\zeta}^2 + \rho I_{\eta} \dot{\phi}_{\eta}^2 \right] a d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \int_A \xi^2 dA \\ I_{\zeta} &= \int_A \xi^2 dA \\ I_{\eta} &= \int_A (\xi^2 + \zeta^2) dA \\ Z &= \frac{1}{Aa^2} \int_A (a + \xi) \xi dA = \frac{I_{\xi}^*}{Aa^2} \end{aligned} \quad (15)$$

2.6 얇은 링 모델

상기한 바와 같이 링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화 효과를 고려하는 경우를 두꺼운 링 모델(thick ring model)이라고 한다. 반면에 링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화 효과를 무시하는 경우를 얇은 링 모델(thin ring model)이라고 한다. 이와 같은 경우에 반경방향 위치에 따라서 변하는 링의 길이 변화량을 무시하면 즉, $\xi \ll a$ 라고 하면 단면의 기하학적 특성치를 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{\xi}^* &\approx I_{\xi}, \quad I_{\zeta}^* \approx I_{\zeta}, \quad I_{\eta}^* \approx I_{\xi} + I_{\zeta} = I_{\eta} \\ Z^* &\approx 0, \quad Z \approx 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3. 두꺼운 링의 고유진동

링의 변형은 x-y면에 대하여 면내(in-plane) 및 면외(out-of-plane) 변형으로 구분될 수 있다. 면내변위는 u_ξ, u_η, ϕ_ξ 이고, 면외변위는 u_z, ϕ_z, ϕ_η 이다.

3.1 면내 고유진동

링의 면내 변형에너지 및 면내 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [N_\xi \gamma_\xi + N_\eta \epsilon_\eta + M_\xi \chi_\xi] a d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [K_\xi GA(1+Z^*) \gamma_\xi^2 + EA(1+Z^*) \epsilon_\eta^2 \\ &\quad - 2EAZ^* a \chi_\xi \epsilon_\eta + EI_\xi^* \chi_\xi^2] a d\theta \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} T_I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\rho A \dot{u}_\xi^2 + \rho A \dot{u}_\eta^2 + 2\rho AZ a \dot{u}_\eta \dot{\phi}_\xi \\ &\quad + \rho I_\xi \dot{\phi}_\xi^2] a d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

진동수 ω , 절직경수 n 의 순환대칭모드로 진동하는 링의 면내변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_\xi &= (u_{\xi C} \cos n\theta + u_{\xi S} \sin n\theta) \cos \omega t \\ u_\eta &= (u_{\eta C} \cos n\theta + u_{\eta S} \sin n\theta) \cos \omega t \\ \phi_\xi &= (\phi_{\xi C} \cos n\theta + \phi_{\xi S} \sin n\theta) \cos \omega t \end{aligned} \quad (19)$$

상기 식을 면내 변형에너지 및 운동에너지 식에 대입하여 적분하고, 라그랑주 방정식을 이용하면 다음과 같은 면내 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$[K_{IC} - \omega^2 M_{IC}] \{u_{IC}\} = \{0\} \text{ for } n=0 \quad (20)$$

$$[K_{IA} - \omega^2 M_{IA}] \{u_{IA}\} = \{0\} \text{ for } n \geq 1 \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} u_{IA} &= \begin{Bmatrix} u_{IC} \\ u_{IS} \end{Bmatrix} \\ u_{IC} &= (u_{\xi C}, u_{\eta C}, \phi_{\xi C})^T \\ u_{IS} &= (u_{\xi S}, u_{\eta S}, \phi_{\xi S})^T \\ M_{IA} &= \begin{bmatrix} M_{IC} & 0 \\ 0 & M_{IC} \end{bmatrix}, \quad K_{IA} = \begin{bmatrix} K_{IC} & -K_{IS} \\ K_{IS} & K_{IC} \end{bmatrix} \\ M_{IC} &= \pi \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Za \\ 0 & Za & \mu_\xi a^2 \end{bmatrix} \\ K_{IC} &= \pi EI_\xi^* \frac{1}{a^3} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} e_\eta + s_\xi n^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_\eta n^2 + s_\xi & -s_\xi a - \delta_z a n^2 \\ 0 & -s_\xi a - \delta_z a n^2 & a^2 n^2 + s_\xi a^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{IS} = \pi EI_\xi^* \frac{1}{a^3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -e_\eta n - s_\xi n & s_\xi a n + \delta_z a n \\ e_\eta n + s_\xi n & 0 & 0 \\ -s_\xi a n - \delta_z a n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

상기 식에서

$$\begin{aligned} s_\xi &= \frac{K_\xi GA(1+Z^*)a^2}{EI_\xi^*} \\ e_\eta &= \frac{EA(1+Z^*)a^2}{EI_\xi^*} \\ \delta_z &= \frac{Z^* A a^2}{I_\xi^*}, \quad \mu_\xi = \frac{I_\xi}{A a^2} \end{aligned} \quad (23)$$

3.2 면외 고유진동

링의 면외 변형에너지 및 면외 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_O &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [M_\xi \chi_\xi + M_\eta \tau_\eta + N_\xi \gamma_\xi] a d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [EI_\xi^* \chi_\xi^2 + GJ_\eta^* \tau_\eta^2 + 2K_\xi GAZ^* a \tau_\eta \gamma_\xi \\ &\quad + K_\xi GA(1+Z^*) \gamma_\xi^2] a d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} T_O &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\rho I_\xi \dot{\phi}_\xi^2 + \rho I_\eta \dot{\phi}_\eta^2 - 2\rho AZ a \dot{u}_\xi \dot{\phi}_\eta \\ &\quad + \rho A \dot{u}_z^2] a d\theta \end{aligned} \quad (25)$$

진동수 ω , 절직경수 n 의 순환대칭모드로 진동하는 링의 면외변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi_\xi &= (\phi_{\xi C} \cos n\theta + \phi_{\xi S} \sin n\theta) \cos \omega t \\ \phi_\eta &= (\phi_{\eta C} \cos n\theta + \phi_{\eta S} \sin n\theta) \cos \omega t \\ u_z &= (u_{zC} \cos n\theta + u_{zS} \sin n\theta) \cos \omega t \end{aligned} \quad (26)$$

상기 식을 면외 변형에너지 및 운동에너지 식에 대입하여 적분하고, 라그랑주 방정식을 이용하면 다음과 같은 면외 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$[K_{OC} - \omega^2 M_{OC}] \{u_{OC}\} = \{0\} \text{ for } n=0 \quad (27)$$

$$[K_{OA} - \omega^2 M_{OA}] \{u_{OA}\} = \{0\} \text{ for } n \geq 1 \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{OA} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{OC} \\ \mathbf{u}_{OS} \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{u}_{OC} &= (\phi_{\theta C}, \phi_{\gamma C}, u_{\gamma C})^T \\
 \mathbf{u}_{OS} &= (\phi_{\theta S}, \phi_{\gamma S}, u_{\gamma S})^T \\
 \mathbf{M}_{OA} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{OC} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{OS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{OA} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OC} & -\mathbf{K}_{OS} \\ \mathbf{K}_{OS} & \mathbf{K}_{OC} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_{OC} &= \pi \rho A a \begin{bmatrix} \mu_{\xi} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\eta} a^2 & -Z a \\ 0 & -Z a & 1 \end{bmatrix} \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{OC} &= \pi E I_{\xi}^* \frac{1}{a^3} \\
 &\begin{bmatrix} a^2 n^2 + t_{\eta} a^2 + s_{\xi} a^2 - 2\beta_z a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + t_{\eta} a^2 n^2 & \beta_z a n^2 \\ 0 & \beta_z a n^2 & s_{\xi} n^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{OS} &= \pi E I_{\xi}^* \frac{1}{a^3} \\
 &\begin{bmatrix} 0 & -a^2 n(1+t_{\eta}-\beta_z) & a n(s_{\xi}-\beta_z) \\ a^2 n(1+t_{\eta}-\beta_z) & 0 & 0 \\ -a n(s_{\xi}-\beta_z) & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

상기 식에서

$$\begin{aligned}
 s_{\xi} &= \frac{K_{\xi} G A (1+Z^*) a^2}{E I_{\xi}^*} \\
 t_{\eta} &= \frac{G J_{\eta}^*}{E I_{\xi}^*}, \quad \beta_z = \frac{K_{\xi} G A Z^* a^2}{E I_{\xi}^*} \quad (30) \\
 \mu_{\xi} &= \frac{I_{\xi}}{A a^2}, \quad \mu_{\eta} = \frac{I_{\eta}}{A a^2}
 \end{aligned}$$

4. 수치해석

수치해석에서 사용된 반경방향 두께가 b, 축방향 두께가 h인 직사각형 단면을 갖는 링의 물성치는 다음과 같다.

$$E = 207 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.29, \quad \rho = 7833 \text{ kg/m}^3$$

4.1 FEM 해석

제시된 링 모델의 정확성을 검증하기 위해서 유한요소법을 사용하여 a=0.120 m, b=h=0.040 m인 직사각형 단면을 갖는 링의 고유진동수를 계산하였다. 원호 각이 12°인 링의 단편을 축방향, 반경방향, 원주방향으로 균일하게 1×1, 2×2, 4×4, 4×4, 8×8개의 육면체 20절점 고체요소로 분할하고, 순환대칭성을 이용한 유한요소법⁽¹¹⁾을 사용하여 고유진동

을 해석하였다.

강체모드를 제외한 질적경수 n=10인 경우의 1차 모드까지의 최저차 면내 및 면외 고유진동수는 Table 1 및 Table 2에서와 같다. 오차는 8×8개의 요소로

Table 1 Natural frequencies of in-plane vibration of a ring with b=h=0.040 m by FEM

| n | 8×8×4 | | 4×4×4 | | 4×4×2 | | 2×2×2 | | 1×1×1 | |
|----|------------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|--|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | |
| 2 | 1678.2 | 1678.3 | 0.01 | 1678.4 | 0.01 | 1679.6 | 0.09 | 1695.2 | 1.01 | |
| 3 | 4428.0 | 4428.4 | 0.01 | 4428.8 | 0.02 | 4434.6 | 0.15 | 4500.3 | 1.63 | |
| 0* | 6883.2 | 6883.2 | 0.00 | 6883.2 | 0.00 | 6883.3 | 0.00 | 6883.7 | 0.01 | |
| 4 | 7821.6 | 7822.8 | 0.02 | 7823.9 | 0.03 | 7839.4 | 0.23 | 7999.9 | 2.28 | |
| 1* | 9469.4 | 9469.4 | 0.00 | 9469.4 | 0.00 | 9469.6 | 0.00 | 9471.7 | 0.02 | |
| 5 | 11603. | 11606. | 0.02 | 11608. | 0.04 | 11640. | 0.32 | 11942. | 2.92 | |
| 2* | 14752. | 14752. | 0.00 | 14752. | 0.00 | 14752. | 0.00 | 14762. | 0.07 | |
| 6 | 15613. | 15618. | 0.03 | 15623. | 0.06 | 15678. | 0.42 | 16168. | 3.55 | |
| 7 | 19753. | 19760. | 0.04 | 19771. | 0.09 | 19857. | 0.53 | 20585. | 4.22 | |
| 3* | 20675. | 20675. | 0.00 | 20675. | 0.00 | 20677. | 0.01 | 20708. | 0.16 | |
| 8 | 23958. | 23969. | 0.05 | 23988. | 0.13 | 24114. | 0.65 | 25139. | 4.93 | |
| 4* | 26692. | 26692. | 0.00 | 26693. | 0.01 | 26698. | 0.02 | 26778. | 0.32 | |
| 9 | 28186. | 28202. | 0.06 | 28233. | 0.17 | 28409. | 0.79 | 29802. | 5.74 | |
| 10 | 32407. | 32429. | 0.07 | 32479. | 0.22 | 32714. | 0.95 | 34567. | 6.67 | |

Table 2 Natural frequencies of out-of-plane vibration of a ring with b=h=0.040 m by FEM

| m | 8×8×4 | | 4×4×4 | | 4×4×2 | | 2×2×2 | | 1×1×1 | |
|----|------------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|--|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | |
| 2 | 1537.1 | 1537.4 | 0.02 | 1537.4 | 0.02 | 1541.1 | 0.26 | 1581.8 | 2.91 | |
| 3 | 4114.2 | 4114.9 | 0.02 | 4115.1 | 0.02 | 4123.7 | 0.23 | 4222.4 | 2.63 | |
| 0* | 4859.0 | 4859.0 | 0.00 | 4859.0 | 0.00 | 4859.5 | 0.01 | 4863.4 | 0.09 | |
| 1* | 6283.1 | 6284.7 | 0.03 | 6284.7 | 0.03 | 6303.5 | 0.32 | 6525.0 | 3.85 | |
| 4 | 7313.3 | 7314.6 | 0.02 | 7315.2 | 0.03 | 7332.2 | 0.26 | 7527.5 | 2.93 | |
| 2* | 9449.5 | 9453.8 | 0.04 | 9453.8 | 0.05 | 9504.1 | 0.58 | 10072. | 6.59 | |
| 5 | 10882. | 10884. | 0.02 | 10886. | 0.04 | 10916. | 0.32 | 11254. | 3.42 | |
| 3* | 13165. | 13172. | 0.05 | 13172. | 0.06 | 13256. | 0.70 | 14158. | 7.55 | |
| 6 | 14661. | 14665. | 0.03 | 14668. | 0.05 | 14718. | 0.39 | 15249. | 4.01 | |
| 4* | 17069. | 17080. | 0.06 | 17081. | 0.07 | 17203. | 0.79 | 18427. | 7.96 | |
| 7 | 18552. | 18558. | 0.03 | 18565. | 0.07 | 18643. | 0.49 | 19417. | 4.66 | |
| 5* | 21059. | 21074. | 0.07 | 21076. | 0.08 | 21244. | 0.88 | 22785. | 8.20 | |
| 8 | 22493. | 22502. | 0.04 | 22515. | 0.10 | 22629. | 0.61 | 23706. | 5.40 | |
| 6* | 25097. | 25117. | 0.08 | 25122. | 0.10 | 25342. | 0.98 | 27203. | 8.39 | |
| 9 | 26445. | 26458. | 0.05 | 26482. | 0.14 | 26643. | 0.75 | 28090. | 6.22 | |
| 7* | 29164. | 29190. | 0.09 | 29199. | 0.12 | 29484. | 1.10 | 31672. | 8.60 | |
| 10 | 30386. | 30404. | 0.06 | 30442. | 0.19 | 30665. | 0.92 | 32559. | 7.15 | |

분할한 경우에 대한 상대오차이다. $n \geq 1$ 인 경우의 고유진동수는 이중이며, *로 표시된 모드는 해당 절직 경수를 갖는 2차 모드이다.

고유진동수는 링을 더 많은 요소로 분할함에 따라서 $8 \times 8 \times 4$ 개의 요소로 분할한 경우의 결과에 급속히 수렴하고 있다. 따라서 $8 \times 8 \times 4$ 개의 요소를 사용하여 얻어진 결과는 거의 정확한 해라고 볼 수 있다.

4.2 모델 해석

3장에서 유도된 운동 방정식을 사용하여 $a = 0.120$ m인 링의 고유진동을 해석하였다. Table 3~4, 5~6, 7~8에는 각각 $b = h = 0.040$ m, $b = h = 0.010$ m, $b = h = 0.080$ m인 링에 관하여 단면의 뒤틀림을 고려 또는 무시하여 계산된 결과와 굽힘전단, 인장 및 회전관성효과를 무시하여 유도된 고전적 이론식^(4,7,12)을 사용하여 계산된 결과를 $8 \times 8 \times 4$ 개의 요소를 사용하여 얻어진 결과와 비교하여 강체모드를 제외한 몇 개의 최저차 면내 및 면외 고유진동수 및 오차를 제시하였다. 단면의 뒤틀림을 고려한 경우의 단면 특성계수로는 직선 보의 단면 특성계수를 사용하였다.

Table 3 Comparison of natural frequencies of in-plane vibration of a ring with $b = h = 0.040$ m

| n | FEM $8 \times 8 \times 4$ | | | Thick ring model a) | | Thick ring model b) | | Thin ring model a) | | Classical theory | |
|----|---------------------------|------------|-----------|---------------------|-----------|---------------------|-----------|--------------------|-----------|------------------|-----------|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) |
| 2 | 1678.2 | 1677.2 | -0.06 | 1690.0 | 0.70 | 1640.7 | -2.23 | 1775.3 | 5.79 | | |
| 3 | 4428.0 | 4416.5 | -0.26 | 4481.1 | 1.20 | 4315.9 | -2.53 | 5021.4 | 13.40 | | |
| 0* | 6883.2 | 6850.1 | -0.48 | 6850.1 | -0.48 | 6818.0 | -0.95 | | | | |
| 4 | 7821.6 | 7788.3 | -0.43 | 7957.6 | 1.74 | 7619.1 | -2.59 | 9628.0 | 23.10 | | |
| 1* | 9469.4 | 9458.4 | -0.12 | 9460.0 | -0.10 | 9597.0 | 1.35 | | | | |
| 5 | 11603. | 11538. | -0.56 | 11864. | 2.25 | 11306. | -2.56 | 15571. | 34.19 | | |
| 2* | 14752. | 14802. | 0.34 | 14808. | 0.38 | 15201. | 3.04 | | | | |
| 6 | 15613. | 15510. | -0.66 | 16039. | 2.73 | 15223. | -2.50 | 22842. | 46.30 | | |
| 7 | 19753. | 19610. | -0.72 | 20380. | 3.18 | 19276. | -2.41 | 31439. | 59.16 | | |
| 3* | 20675. | 20858. | 0.89 | 20873. | 0.96 | 21525. | 4.11 | | | | |
| 8 | 23958. | 23781. | -0.74 | 24823. | 3.61 | 23408. | -2.30 | 41360. | 72.64 | | |
| 4* | 26692. | 27126. | 1.63 | 27155. | 1.74 | 28083. | 5.21 | | | | |
| 9 | 28186. | 27988. | -0.70 | 29325. | 4.04 | 27582. | -2.14 | 52606. | 86.64 | | |
| 10 | 32407. | 32210. | -0.61 | 33861. | 4.49 | 31776. | -1.95 | 65175. | 101.12 | | |

(a) Considering warping : $K_{\xi} = 0.84924$

(b) Neglecting warping : $K_{\xi} = 1.0$

Table 4 Comparison of natural frequencies of out-of-plane vibration of a ring with $b = h = 0.040$ m

| m | FEM $8 \times 8 \times 4$ | | | Thick ring model c) | | Thick ring model d) | | Thin ring model c) | | Classical theory | |
|----|---------------------------|------------|-----------|---------------------|-----------|---------------------|-----------|--------------------|-----------|------------------|-----------|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) |
| 2 | 1537.1 | 1538.3 | 0.08 | 1582.9 | 2.98 | 1566.0 | 1.88 | 1682.8 | 9.48 | | |
| 3 | 4114.2 | 4114.5 | 0.01 | 4224.4 | 2.68 | 4210.1 | 2.33 | 4876.5 | 18.53 | | |
| 0* | 4859.0 | 4855.0 | -0.08 | 4855.0 | -0.08 | 4821.1 | -0.78 | | | | |
| 1* | 6283.1 | 6269.8 | -0.21 | 6508.8 | 3.59 | 6115.4 | -2.67 | | | | |
| 4 | 7313.3 | 7309.1 | -0.06 | 7528.7 | 2.95 | 7499.8 | 2.55 | 9447.6 | 29.18 | | |
| 2* | 9449.5 | 9421.6 | -0.30 | 10043. | 6.28 | 9068.6 | -4.03 | | | | |
| 5 | 10882. | 10872. | -0.09 | 11251. | 3.40 | 11180. | 2.74 | 15358. | 41.14 | | |
| 3* | 13165. | 13123. | -0.32 | 14115. | 7.22 | 12570. | -4.52 | | | | |
| 6 | 14661. | 14651. | -0.07 | 15234. | 3.91 | 15094. | 2.95 | 22597. | 54.13 | | |
| 4* | 17069. | 17015. | -0.31 | 18367. | 7.61 | 16258. | -4.75 | | | | |
| 7 | 18552. | 18550. | -0.01 | 19375. | 4.44 | 19146. | 3.20 | 31158. | 67.95 | | |
| 5* | 21059. | 20996. | -0.30 | 22703. | 7.80 | 20029. | -4.89 | | | | |
| 8 | 22493. | 22513. | 0.09 | 23610. | 4.97 | 23278. | 3.49 | 41041. | 82.46 | | |
| 6* | 25097. | 25027. | -0.28 | 27086. | 7.92 | 23841. | -5.00 | | | | |
| 9 | 26445. | 26503. | 0.22 | 27898. | 5.49 | 27453. | 3.81 | 52243. | 97.55 | | |
| 7* | 29164. | 29093. | -0.24 | 31501. | 8.01 | 27678. | -5.09 | | | | |
| 10 | 30386. | 30501. | 0.38 | 32212. | 6.01 | 31648. | 4.15 | 64764. | 113.14 | | |

(c) Considering warping : $K_{\xi} = 0.84924$, $K_{\eta} = 0.84346$

(d) Neglecting warping : $K_{\xi} = 1.0$, $K_{\eta} = 1.0$

Table 5 Comparison of natural frequencies of in-plane vibration of a ring with $b = h = 0.010$ m

| n | FEM $8 \times 8 \times 4$ | | | Thick ring model a) | | Thick ring model b) | | Thin ring model a) | | Classical theory | |
|----|---------------------------|------------|-----------|---------------------|-----------|---------------------|-----------|--------------------|-----------|------------------|-----------|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) |
| 2 | 438.70 | 438.67 | -0.01 | 438.90 | 0.05 | 438.02 | -0.16 | 440.33 | 0.37 | | |
| 3 | 1234.1 | 1233.8 | -0.02 | 1235.3 | 0.09 | 1231.7 | -0.19 | 1245.4 | 0.92 | | |
| 4 | 2348.3 | 2347.3 | -0.04 | 2352.1 | 0.16 | 2343.1 | -0.22 | 2388.0 | 1.69 | | |
| 5 | 3761.2 | 3758.8 | -0.06 | 3770.5 | 0.25 | 3752.0 | -0.24 | 3862.0 | 2.68 | | |
| 6 | 5454.6 | 5449.7 | -0.09 | 5473.5 | 0.35 | 5439.9 | -0.27 | 5665.4 | 3.86 | | |
| 0* | 6822.1 | 6820.0 | -0.03 | 6820.0 | -0.03 | 6818.0 | -0.06 | | | | |
| 7 | 7409.7 | 7400.8 | -0.12 | 7443.5 | 0.46 | 7387.5 | -0.30 | 7797.7 | 5.24 | | |
| 8 | 9606.9 | 9592.2 | -0.15 | 9662.1 | 0.57 | 9575.3 | -0.33 | 10259. | 6.78 | | |
| 1* | 9631.9 | 9631.0 | -0.01 | 9631.0 | -0.01 | 9639.4 | 0.08 | | | | |
| 9 | 12027. | 12004. | -0.19 | 12111. | 0.70 | 11983. | -0.36 | 13048. | 8.49 | | |
| 10 | 14649. | 14616. | -0.23 | 14770. | 0.83 | 14591. | -0.40 | 16165. | 10.35 | | |

Table 3~4에서 보이는 바와 같이 약간 두꺼운 링의 경우에는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델이 얇은 링 모델 또는 뒤틀림을 무시한 두꺼운 링 모델보다 정확한 결과를 줌을 알 수 있다.

Table 5~6에서 보이는 바와 같이 얇은 링의 경우에는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델, 얇은 링 모델 또는 뒤틀림을 무시한 두꺼운 링 모델이 거

의 비슷한 결과를 줌을 알 수 있다.

Table 7~8에서 보이는 바와 같이 어느 정도 두꺼

Table 6 Comparison of natural frequencies of out-of-plane vibration of a ring with $b = h = 0.010$ m

| m | FEM 8×8×4 | | Thick ring model c) | | Thick ring model d) | | Thin ring model c) | | Classical theory | |
|----|------------|------------|---------------------|------------|---------------------|------------|--------------------|------------|------------------|--|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | |
| 2 | 416.10 | 416.11 | 0.00 | 425.62 | 2.29 | 416.63 | 0.13 | 418.64 | 0.61 | |
| 3 | 1198.6 | 1198.5 | -0.01 | 1213.8 | 1.27 | 1200.4 | 0.16 | 1213.5 | 1.24 | |
| 4 | 2303.7 | 2303.2 | -0.02 | 2324.1 | 0.89 | 2307.3 | 0.16 | 2351.2 | 2.06 | |
| 5 | 3708.5 | 3706.9 | -0.04 | 3736.0 | 0.74 | 3713.8 | 0.14 | 3822.4 | 3.07 | |
| 0* | 4823.5 | 4823.2 | -0.01 | 4823.2 | -0.01 | 4821.1 | -0.05 | | | |
| 6 | 5393.6 | 5389.9 | -0.07 | 5432.0 | 0.71 | 5400.4 | 0.13 | 5624.1 | 4.27 | |
| 1* | 6205.4 | 6204.4 | -0.02 | 6428.8 | 3.60 | 6194.6 | -0.17 | | | |
| 7 | 7339.8 | 7332.7 | -0.10 | 7394.3 | 0.74 | 7347.2 | 0.10 | 7755.0 | 5.66 | |
| 2* | 9185.6 | 9183.4 | -0.02 | 9781.0 | 6.48 | 9160.3 | -0.27 | | | |
| 8 | 9527.5 | 9515.3 | -0.13 | 9604.5 | 0.81 | 9534.4 | 0.07 | 10215. | 7.21 | |
| 9 | 11937. | 11917. | -0.16 | 12044. | 0.90 | 11942. | 0.04 | 13003. | 8.93 | |
| 3* | 12684. | 12681. | -0.03 | 13649. | 7.60 | 12644. | -0.32 | | | |
| 10 | 14549. | 14520. | -0.20 | 14694. | 1.00 | 14550. | 0.01 | 16120. | 10.80 | |

Table 7 Comparison of natural frequencies of in-plane vibration of a ring with $b = h = 0.080$ m

| n | FEM 8×8×4 | | Thick ring model a) | | Thick ring model b) | | Thin ring model a) | | Classical theory | |
|----|------------|------------|---------------------|------------|---------------------|------------|--------------------|------------|------------------|--|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | |
| 2 | 3014.3 | 2999.9 | -0.48 | 3071.3 | 1.89 | 2790.5 | -7.42 | 3646.2 | 20.96 | |
| 0* | 7072.4 | 6952.1 | -1.70 | 6952.1 | -1.70 | 6818.0 | -3.60 | | | |
| 3 | 7148.8 | 7082.3 | -0.93 | 7343.7 | 2.73 | 6621.0 | -7.38 | 10313. | 44.26 | |
| 1* | 8888.8 | 8881.3 | -0.08 | 8900.0 | 0.13 | 9456.3 | 6.38 | | | |
| 4 | 11521. | 11435. | -0.75 | 11968. | 3.88 | 10777. | -6.46 | 19774. | 71.64 | |
| 2* | 13231. | 13508. | 2.10 | 13551. | 2.42 | 15069. | 13.90 | | | |
| 5 | 15806. | 15830. | 0.15 | 16684. | 5.56 | 15027. | -4.93 | 31979. | 102.32 | |
| 3* | 18077. | 18888. | 4.49 | 18962. | 4.90 | 21424. | 18.52 | | | |
| 6 | 19829. | 20201. | 1.88 | 21403. | 7.93 | 19289. | -2.73 | 46912. | 136.58 | |

Table 8 Comparison of natural frequencies of out-of-plane vibration of a ring with $b = h = 0.080$ m

| m | FEM 8×8×4 | | Thick ring model c) | | Thick ring model d) | | Thin ring model c) | | Classical theory | |
|----|------------|------------|---------------------|------------|---------------------|------------|--------------------|------------|------------------|--|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | |
| 2 | 2537.8 | 2547.2 | 0.37 | 2650.8 | 4.45 | 2686.5 | 5.86 | 3421.2 | 34.81 | |
| 0* | 4966.9 | 4962.1 | -0.10 | 4962.1 | -0.10 | 4821.1 | -2.94 | | | |
| 3 | 6022.0 | 6059.4 | 0.62 | 6340.8 | 5.29 | 6481.7 | 7.63 | 9906.8 | 64.51 | |
| 1* | 6523.9 | 6479.5 | -0.68 | 6764.6 | 3.69 | 5887.3 | -9.76 | | | |
| 4 | 9721.0 | 9844.7 | 1.27 | 10372. | 6.69 | 10624. | 9.29 | 19187. | 97.37 | |
| 2* | 10163. | 10096. | -0.66 | 10798. | 6.24 | 8845. | -12.97 | | | |
| 5 | 13395. | 13687. | 2.18 | 14503. | 8.27 | 14869. | 11.00 | 31185. | 132.81 | |
| 3* | 14315. | 14299. | -0.11 | 15395. | 7.54 | 12400. | -13.38 | | | |
| 6 | 16975. | 17513. | 3.17 | 18645. | 9.84 | 19129. | 12.69 | 45878. | 170.28 | |

Table 9 Natural frequencies of in-plane vibration of a ring used in reference⁽⁷⁾

| n | Experimental | Kirkhope 1 | | Kirkhope 2 | | Thick ring model | |
|---|--------------|------------|-----------|------------|-----------|------------------|-----------|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) |
| 2 | 7635 | 7600 | -0.5 | 7619 | -0.2 | 7607 | -0.4 |
| 3 | 19060 | 18985 | -0.4 | 19038 | -0.1 | 19028 | -0.2 |
| 4 | 32150 | 31954 | -0.6 | 32020 | -0.4 | 32063 | -0.3 |
| 5 | 46050 | 45577 | -1.0 | 45640 | -0.9 | 45774 | -0.6 |
| 6 | 60400 | 59440 | -1.6 | 59495 | -1.5 | 59742 | -1.1 |
| 7 | 74200 | 73357 | -1.1 | 73402 | -1.1 | 73773 | -0.6 |
| 8 | 88000 | 87241 | -0.9 | 87278 | -0.8 | 87779 | -0.3 |

Table 10 Natural frequencies of out-of-plane vibration of a ring used in reference⁽⁸⁾

| m | Experimental | B & K | | Kirkhope | | Thick ring model | |
|---|--------------|------------|-----------|------------|-----------|------------------|-----------|
| | Freq. (Hz) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) | Freq. (Hz) | Error (%) |
| 2 | 6620 | 6491 | -1.95 | 6788 | 2.54 | 6543 | -1.16 |
| 3 | 16790 | 16520 | -1.61 | 17430 | 3.81 | 16658 | -0.79 |
| 4 | 28700 | 28138 | -1.96 | 29857 | 4.03 | 28393 | -1.07 |
| 5 | 41200 | 40448 | -1.83 | 43121 | 4.66 | 40848 | -0.85 |
| 6 | 53950 | 53023 | -1.72 | 56767 | 5.22 | 53592 | -0.66 |
| 7 | 66100 | 65660 | -0.67 | 70567 | 6.76 | 66416 | 0.48 |
| 8 | 79200 | 78262 | -1.18 | 84403 | 6.57 | 79219 | 0.02 |

은 링의 경우에는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델이 얇은 링 모델 또는 뒤틀림을 무시한 두꺼운 링 모델보다 정확한 결과를 줌을 알 수 있다.

Table 9에는 참고논문 (7)에서 사용된 $a=0.036305\text{ m}$, $h=0.004\text{ m}$, $b/a=0.479$ 인 직사각형 단면을 갖는 링에 관하여 단면의 뒤틀림 ($K_{\xi}=5/6$)을 고려하여 계산된 면내 고유진동수와 참고논문에서 제시된 값을 비교하여 제시하였다. 이 논문에서의 두꺼운 링 모델에 의한 결과는 실험치에 거의 일치함을 보이고 있다.

Table 10에는 참고논문 (8)에서 사용된 $a=0.036560\text{ m}$, $b/a=0.4618$ 인 정사각형 단면을 갖는 링에 관하여 단면의 뒤틀림 ($K_{\xi}=5/6$, $K_{\eta}=0.84346$)을 고려하여 계산된 면외 고유진동수와 참고논문에서 제시된 값을 비교하여 제시하였다. 이 논문에서의 두꺼운 링 모델에 의한 결과는 실험치에 거의 일치함을 보이고 있다. Table 9~10에서의 오차는 실험치⁽¹³⁾에 대한 상대오차이다.

5. 결 론

이 논문에서는 두꺼운 링의 고유진동을 해석하기 위하여 참고문헌 (1~8)에서 제시된 운동방정식을 수정하고 보완하여 원형 보의 단면을 가로 지르는 곡률 반경의 변화 효과를 고려하면서 굽힘 전단, 인장과 비틀림을 고려할 수 있도록 두꺼운 원형 보의 면내 및 면외 운동과 변형에 관련된 식들을 운동 및 변형 에너지를 사용하여 체계적으로 정립하고, 링의 진동 모드의 원주방향 순환대칭성을 이용하여 고유진동 해석을 위한 운동방정식을 유도하였다.

링의 두께가 얇은 경우에는 얇은 링 모델이나 두꺼운 링 모델을 사용하여 계산된 면내 및 면외 고유진동수는 거의 일치한다. 그러나 링의 두께가 두꺼운 경우에는 두꺼운 링 모델을 사용하여 계산된 면내 및 면외 고유진동수가 유한요소해석 결과에 매우 일치하고 있고, 얇은 링 모델을 사용하여 계산된 결과보다 더 정확한 결과를 줌을 알 수 있다. 또한 단면의 뒤틀림을 고려한 경우가 무시한 경우보다 더 정확한 결과를 줌을 알 수 있다. 따라서 두께가 어느 정도 두꺼운 링의 정확한 면내 및 면외 고유진동수를 정확히 해석하기 위해서는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델을 사용해야 한다.

후 기

이 연구는 2004년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었음(INHA-31632-01).

참 고 문 헌

- (1) Rao, S. S. and Sundararajan, V., 1969, "In-plane Flexural Vibrations of Circular Rings," Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 91, pp. 620~625.
- (2) Rao, S. S., 1971, "Effects of Transverse Shear and Rotary Inertia on the Coupled Twisting Vibrations of Circular Rings," Journal of Sound and Vibration, Vol. 16, No. 4, pp. 551~566.
- (3) Davis, R., Henshell, R. D. and Warburton, G. B., 1972 "Curved Beam Finite Elements for Coupled Bending and Torsional Vibration," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 165~175.
- (4) Kirkhope, J., 1976, "Out-of-plane Vibration of Thick Circular Ring," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, No. EM2, pp. 239~247.
- (5) Lebeck, A. O. and Knowlton, J. S., 1985, "A Finite Element for the Three-dimensional Deformation of a Circular Ring," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, pp. 421~435.
- (6) Davis, R., Henshell, R. D., and Warburton, G. B., 1972 "Constant Curvature Beam Finite Elements for In-plane Vibration," Journal of Sound and Vibration, Vol. 25, No. 4, pp. 561~576.
- (7) Kirkhope, J., 1977, "In-plane Vibration of a Thick Circular Ring," Journal of Sound and Vibration, Vol. 50, No. 2, pp. 219~227.
- (8) Bickford, W. B. and Maganty, S. P., 1986, "On the Out-of-plane Vibrations of Thick Rings," Journal of Sound and Vibration, Vol. 108, No. 3, pp. 503~507.
- (9) Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficient

in Timoshenko's Beam Theory," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 335~340.

(10) Sokolnikoff, I. S., 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.

(11) 김창부, 안영철, 2000, "송풍기 임펠러의 순환대칭성을 이용한 고유치해석," *한국소음진동공학회논문집*, 제 10 권, 제 3 호, pp. 523~530.

(12) 김창부, 최상현, 2002, "마이크로 3축 링 자이로스코프의 동역학," *한국소음진동공학회논문집*, 제 12 권, 제 12 호, pp. 1001~1009.

(13) Kuhl, W., 1942, "Messungen zu den Theorien der Eigenschwingungen von Kreisringen Beliebiger Wandstarke," *Akustische Zeitschrift*, Vol. 7, pp. 125~152.