

‘변형률 보간 9절점 쉘 요소를 이용한 적층복합판과 쉘의 선형 정적 해석 및 자유진동 해석’에 대한 토론

이상진*의 의견

저자들은 natural domain에서 assumed strain method를 바탕으로 정식화된 9절점 쉘 요소를 사용하고 laminated plate/shell의 선형정적응력해석과 자유진동해석을 수행하고 그 결과를 논문(한성천 등, 2004)에 기술하고 있다고 하였습니다. 필자로서도 natural domain에 바탕을 둔 9절점 쉘 요소를 이용한 laminated plate와 shell의 자유진동해석 부분의 연구결과는 매우 고무적이며 독자들에게도 유익한 정보를 제공한다고 생각합니다. 그러나 필자는 논문(한성천 등, 2004)에 기술된 내용에 대해 아래와 같이 견해를 밝힙니다.

1) 논문(한성천 등, 2004)의 제2절, 제3절 그리고 제4절, 제5절, 제6절은 이미 출판된 참고문헌(Lee 등, 1998, 2001)의 내용과 많은 부분이 일치합니다. 특히 이 논문의 제4절에서 부각시킨 assumed natural strain은 참고문헌(Lee 등, 1998)에서 비선형 변형률의 형태로 9절점 laminated plate/shell element에 이미 적용된 바 있습니다. 논문(한성천 등, 2004)에는 참고문헌(Lee 등, 1998)의 존재는 인용되었으나 논문(한성천 등, 2004)의 기술방향은 이를 유추하기 힘들게 되어 있습니다. 이에 대한 저자들의 견해를 알고 싶습니다.

2) 논문(한성천 등, 2004)은 본문에 기술된 바와 같이 그 목적이 laminated plate/shell의 선형 정적 응력해석 및 자유진동해석에 대한 연구입니다. 그러나 이 논문(한성천 등, 2004)에서는 비선형 해석을 위한 정식화 과정인 element based Lagrangian formulation을 부각시키고 있습니다. 따라서 선형해석을 위한 정식화 과정인 Lagrangian formulation에서 파생되는 비선형변형률(Green strain tensor)을 선형화한 변형률을 사용하는 것으로 충분한데, 논문(한성천 등, 2004)에서 element based Lagrangian formulation에 따라서 강성행렬과 질량행렬을 구성하였다고 기술하였습니다. 선형으로 국한된 문제에 대해 비선형 정식화를 사용한 이유를 명시할 필요가 있는 것 같습니다.

3) 논문(한성천 등, 2004)의 요지에서도 기술된 바와 같이 저자들께서는 이 연구를 통하여 새롭게 굽힘 변형률과 변위사이의 관계항들을 추가하였다고 기술하고 있습니다. 이는 stress resultant formulation을 이용할 경우 나타나는 일반적인 굽힘 변형률과 다른 것인지 저자들의 견해를 알고 싶습니다. 논문(한성천 등, 2004)에 기술된 변형률이 element based Lagrangian formulation에서 유도된 infinitesimal strain을 기본적으로 사용하고 locking 현상을 제거하기 위하여 이 논문에 기술한 assumed strain을 도입한 것이라면 참고문헌(Lee 등, 1998)의 변형률항에서 비선형성분을 제외한 것과 다른 것인지 명시하여 주시기 바랍니다.

4) 논문(한성천 등, 2004)의 Page 285, 수치예제 “a. 등방성 비틀림보의 선형처짐해석”에서 인용한 “Lee & Kanok-Nuchlchai”로 표기된 참고해[논문(한성천 등, 2004)의 표 2]는 참고문헌(Lee 등, 1998)에 주어져 있지 않습니다. 특히 참고문헌(Lee 등, 1998)의 정식화방법은 비선형의 변형률성분을 포함하고 있는데, 왜 그 결과를 논문(한성천 등, 2004)에서 제시된 선형해석의 결과와 비교하셨는지 저자의 견해를 알고 싶습니다. 참고로 필자가 논문(한성천 등, 2004)에서 인용한 참고문헌(Lee 등, 1998)의 정식화를 통하여 도출한 해는 아래표와 같습니다. 수치해석 시 선형성분의 변형률만을 이용하였습니다.

	$h = 0.32$	$h = 0.0032$
In-plane	0.9968	1.005
Out of plane	0.9991	1.002

필자는 저자들이 본문에 기술되어 있는 수치해석방법을 정식화부분을 사용하여 reproduce를 할 경우 수치해석결과를 정식화부분, implementation 그리고 이에 연관한 수치해석부분에서 많은 오류를 가지므로 참고문헌에서 제시하지 않는 참고해를 임의로 사용하지 않는 것이 좋다는 의견을 제시합니다. 따라서 필자는 저자들께서 Lee와 Kanok-Nuchulchai의 정식화 방법과 논문(한성천 등, 2004)의 결과를 비교하기 위해서는 참고문헌(Lee 등, 1998)에 주어져 있는 Hemispherical shell의 선형 정적 응력해석값을 이용하고 그 결과를 제시하는 것이 타당하다고 생각합니다.

5) assumed natural strain을 이용한 9절점 쉘 요소를

† 한국전산구조공학회논문집, 17(3), 2004.9, pp.279~294

* 경상대학교 건축공학과 조교수

이용한 등방성판의 자유진동해석 결과는 이미 발표된 바 있습니다 그러나 논문(한성천 등, 2004)에 제시된 결과는 기 발표된 결과와 비교되어 있지 않습니다. 특히, 자유진동해석에서 Lanczos method를 사용한 것 이외의 formulation이 사실상 등방성물질의 판과 셸의 경우 참고 문헌(Lee 등,1998)의 정식화와 거의 동일하게 나타나게 됩니다. 인지하고 계시겠지만, 등방성물질의 경우 stress formulation을 주로 이용하게 되고, 이방성물질의 경우 stress resultant formulation을 사용하지만 등방성물질에서 두 정식화는 일반적으로 동일한 수치해석결과를 나타냅니다. 이에 대한 충분한 결과비교가 필요할 것 같습니다.

또한, 수치예제 "c. 등방성판의 자유진동해석"에서 두께가 $h=1.0$ 인 경우에는 fundamental frequency를 제외한 고유진동수 값이 다른 연구자들에 의해 도출된 값에 비해 큰 이유가 설명되어야 할 것 같습니다. 특히 표 4에서 나타난 바와 같이 논문(한성천 등, 2004)의 연구결과(진동수값)이 3차탄성이론에 의한 진동수보다 큰 이유가 기술되어야 할 것 같습니다. 이 문제는 적층재료를 이용한 예제에도 같은 영향을 미칠 것으로 사료 됩니다. 저자의 견해를 알고 싶습니다.

마지막으로 필자는 논문(한성천 등, 2004)이 natural domain에서 assumed strain method를 이용한 laminated plate/shell의 자유진동해석에 대한 연구결과를 심층적으로 기술하였으면 하는 견해를 밝힙니다.

참 고 문 헌

한성천, 최삼열(2004) 변형률 보간 9절점 셸 유한요소를 이용한 적층복합판 셸의 선형정적 해석 및 자유진동해석, *한국전산구조공학회논문집*, 17(3), pp.279~294
 Lee, S.J., Kanok-Nuchulchai, W.(1998) A nine-node assumed strain finite element for large deformation analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,43, pp.777~798
 Lee, S.J., Han, S.E.(2001) Free vibration analysis of shells with a nine-node assumed natural strain finite element, *Journal of Sounds and Vibrations*, 241, pp.605~633

부족한 논문에 많은 관심을 가져 주셔서 저자들은 대단히 감사한 마음을 느낍니다. 토의 내용에 최대한 성실한 답변을 드리려고 노력하였습니다. 지면의 제한으로 인하여 보다 상세한 내용을 작성하지는 못하였습니다. 양해 부탁드립니다.

답변 1) 논문(한성천 등,2004)은 저자들이 Asian Institute of Technology를 방문하여 Prof. Wosak Kanok-Nukulchai와 Dr. K.D.Kim등과 같이 참고문헌(Lee 등, 1998; Ma 등,1989, 1990)을 참고로 하고, 특히 비선형 정식화 부분과 개선된 전단변형이론은 참고문헌(Kim 등, 2003)을 참고로 하여 공동으로 연구한 논문(Han 등)에 근거하여 자유진동해석으로 확장한 논문입니다. 참고문헌(Lee 등, 1998, 2001)의 저자로서 보시기에 본문의 인용부분에서 미흡한 부분이 있었다면 사과드립니다. 자유진동해석 수행시 참고문헌(Lee 등, 2001)을 참고하였고, 그 과정에서 논문(Lee 등, 2001)의 식 (30)을 유도한 결과에 대한 설명에서 명확하지 않은 부분(ρ_{13}^{ab} 에 대한 내용은 제시되어 있으나 ρ_{23}^{ab} 과 ρ_{12}^{ab} 에 대한 설명은 제시되어 있지 않습니다.)이 있어 새롭게 유도하였습니다. 유도한 내용은 아래와 같습니다.

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\bar{u}^a + \frac{\xi_3 h^a}{2} (\mathbf{T}_{\mathbf{R}0}^a - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \hat{\mathbf{D}}^a \right] \quad (1)$$

$$\text{where } \mathbf{T}_{\mathbf{R}0}^a = \begin{bmatrix} 1 - \theta_3^a & \theta_2^a \\ \theta_3^a & 1 - \theta_1^a \end{bmatrix} \quad (2)$$

Substituting Eq. (2) into Eq. (1), we obtain

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{\mathbf{R}0}^a - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \hat{\mathbf{D}}^a &= \begin{bmatrix} 1 - \theta_3^a & \theta_2^a \\ -\theta_3^a & 1 - \theta_1^a \\ -\theta_2^a & \theta_1^a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D}_1^a \\ \hat{D}_2^a \\ \hat{D}_3^a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3^a & \theta_2^a \\ -\theta_3^a & 0 & -\theta_1^a \\ -\theta_2^a & \theta_1^a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D}_1^a \\ \hat{D}_2^a \\ \hat{D}_3^a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3^a \hat{D}_2^a & \theta_2^a \hat{D}_3^a \\ \theta_3^a \hat{D}_1^a & 0 & -\theta_1^a \hat{D}_3^a \\ -\theta_2^a \hat{D}_1^a & \theta_1^a \hat{D}_2^a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{D}_3^a & -\hat{D}_2^a \\ -\hat{D}_3^a & 0 & \hat{D}_1^a \\ \hat{D}_2^a & -\hat{D}_1^a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^a \\ \theta_2^a \\ \theta_3^a \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

Therefore Eq. (1) is obtained following form

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\xi_3 h^a}{2} \mathcal{P}^a \right] u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a u \quad (4)$$

* 대원과학대학 토목과 부교수
 ** (주)이오엔지니어즈 구조부 차장

where

$$\Phi^a = \begin{bmatrix} 0 & \hat{D}_3^a & -\hat{D}_2^a \\ -\hat{D}_3^a & 0 & \hat{D}_1^a \\ \hat{D}_2^a & -\hat{D}_1^a & 0 \end{bmatrix}, u = \{\hat{u}_1^a, \hat{u}_2^a, \hat{u}_3^a, \hat{u}_1^a, \hat{\theta}_1^a, \hat{\theta}_2^a, \hat{\theta}_3^a\}^T$$

$$N_a^T = N_a \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 010 & 0 & 0 & 0 \\ 001 & 0 & 0 & 0 \\ 000 & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_3^a & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_2^a \\ 000 & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_3^a & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_1^a \\ 000 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_2^a & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_1^a & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$M = \int \rho N_a^T M_0 dV \quad (6)$$

$$N_a^T N_b = \begin{bmatrix} (N_a^T N_b)_{3 \times 3}^{11} & 0 \\ 0 & (N_a^T N_b)_{3 \times 3}^{22} \end{bmatrix} \quad 6 \times 6 \quad (7)$$

where

$$(N_a^T N_b)_{3 \times 3}^{22} = N_a \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_3^a & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_2^a \\ \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_3^a & 0 & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_1^a \\ -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_2^a & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_1^a & 0 \end{bmatrix} N_b$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\xi_3 h^b}{2} \hat{D}_3^b & -\frac{\xi_3 h^b}{2} \hat{D}_2^b \\ -\frac{\xi_3 h^b}{2} \hat{D}_3^b & 0 & \frac{\xi_3 h^b}{2} \hat{D}_1^b \\ \frac{\xi_3 h^b}{2} \hat{D}_2^b & -\frac{\xi_3 h^b}{2} \hat{D}_1^b & 0 \end{bmatrix}$$

$$(N_a^T N_b)_{3 \times 3}^{11} = \begin{bmatrix} N_a N_b & 0 & 0 \\ 0 & N_a N_b & 0 \\ 0 & 0 & N_a N_b \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= N_a N_b \begin{bmatrix} \xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} (\hat{D}_3^a \hat{D}_3^b + \hat{D}_2^a \hat{D}_2^b) & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_2^a \hat{D}_1^b & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_3^a \hat{D}_1^b \\ -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_1^a \hat{D}_2^b & \xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} (\hat{D}_3^a \hat{D}_3^b + \hat{D}_1^a \hat{D}_1^b) & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_3^a \hat{D}_2^b \\ -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_1^a \hat{D}_3^b & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_2^a \hat{D}_3^b & \xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} (\hat{D}_2^a \hat{D}_2^b + \hat{D}_1^a \hat{D}_1^b) \end{bmatrix}$$

답변 2) 답변 1)에서 밝힌 바와 같이 논문(한성천 등, 2004)은 논문(Han 등)로부터 파생된 연구입니다. 새롭게 유도된 비선형 해석과정 중에서 선형 강성행렬은 쉽게 유도 할 수 있고, 또한 향후 지속적인 연구와 연계성을 보이

기 위해 비선형 해석을 위한 정식화 과정을 사용하였습니다. 참고로 본 토의내용은 저자들이 논문(한성천 등, 2004)의 심사과정 중 심사위원의 동일한 지적 사항에 대해서 양해를 구한 내용입니다.

답변 3) 저자들의 굽힘 변형률-변위 사이의 관계식은 논문(한성천 등, 2004)에 명확하게 나타내었습니다. 그러나 토의자께서 지적하여 주신 사항입니다만 수치해석 결과는 정식화 부분, implementation 그리고 이에 연관한 수치해석부분에서 많은 차이를 가질 수 있다고 생각합니다. 또한, 적분방법과 구조물 기하형상의 최적화에 따른 추가적인 기능에 의한 수치해석 부분의 차이도 가능하다고 생각합니다. 논문(한성천 등, 2004)의 해석결과 비교를 위하여 새로운 예제들을 답변 4)와 답변 5)에 첨부하였습니다. 참고가 되실 것으로 생각합니다.

답변 4) 논문(한성천 등, 2004)은 연구결과의 범위를 선형해석으로 제한한 연구입니다. 따라서 비선형해석을 수행한 논문이라고 할지라도 선형해석의 결과가 정확히 일치해야 한다는 생각에서 논문(Lee 등, 1998)의 결과와 비교하게 되었습니다. 토의자의 지적대로 참고문헌에서 제시하지 않은 참고 해를 비교하는 것은 좋지 않다는 생각에 동의합니다. 향후 연구에서는 참고문헌 제시된 참고해만을 비교하여 연구하겠습니다. 정확한 비교를 위하여 추천하여 주신 Hemispherical shell의 선형 정적 응력 해석 값과의 비교를 표로 나타내었습니다. 대칭 조건을 이용하여, 그림 1과 같이 Hemispherical shell의 1/4을 모델링하였고, 한 변당 절점의 수로 수렴도를 비교하여 나타내었습니다. 논문(Lee 등, 1998)의 결과는 그래프로 되어 있어서 함께 비교하지 못하였습니다.

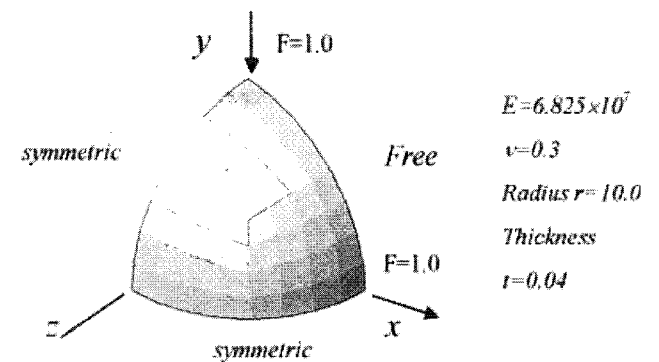


Fig 1 Pinched full hemispherical shell Displacement at the Load point

Nodes/Side	Exact	한성천 등. 2004	9-NODE γ^*
5	0.0924	0.985 [*]	1.100 [*]

*Ratio=Present/Exact **Belytschko 등. 1989

Nodes/Side	한성천 등. 2004	9-NOSDE $\gamma - \psi^{***}$	4-NODE SRI [*]
9	0.991 [*]	0.828 [*]	0.869 [*]
17	0.995 [*]	1.001 [*]	0.984 [*]

답변 5) 논문(한성천 등, 2004)은 기존의 연구결과들이 등방성 판의 진동수에 제한되었던 것을 laminated plate/shell의 진동수에 관한 연구로 확장한 것이며, 결과의 정확도를 위하여 해석적 정확해와 우선적으로 비교한 것입니다. 비등방성의 경우는 물론 등방성의 경우에도 stress resultant formulation을 사용하였고, 등방성의 경우에는 각 방향으로 동일한 재료 물성치를 입력하였다. 지적하여 주신 수치예제 c에서 해석결과의 차이는 논문(한성천 등, 2004) 식 (39)의 아래 부분에 기술한 바와 같이 논문(한성천 등, 2004)에서 사용한 lumped mass에 기인하는 것입니다. Lumped mass의 경우에는 회전간성이 무시되기 때문에 처짐 계산 시 전단변형 효과가 고려되지 않은 경우와 유사한 오차가 발생하게 됩니다. 그러므로 두께가 얇은 경우에 비해 두께가 두꺼운 경우에 상대적으로 많은 오차가 발생하게 됩니다. 논문(한성천 등, 2004)에서는 진동수의 간편 계산을 위하여 lumped mass를 사용하였으나, 논문(한성천 등, 2004)의 질량행렬을 consistent mass로 계산하여 개선된 결과는 아래 표와 같습니다.

Nondimensional natural frequencies of isotropic plate (a/h=10)

m	n	3D Elasticity	Mindlin Theory	한성천 등. 2004	lee 등. 2001	Consistent Mass
1	1	0.932	0.930	0.9368	0.9303	0.9303
2	1	2.226	2.219	2.2250	2.2195	2.2198
2	2	3.421	3.406	3.4656	3.4054	3.4065
3	1	4.171	4.149	4.2282	4.1510	4.1542

Nondimensionalized fundamental natural frequency of laminated composite plate with simply supported boundaries(a/b=1, a/h=10)

Solution	Symmetric Cross-ply ^b		Antisymmetric Angle-ply ^c	
	n=4, 재료1[1]	n=8, 재료1[1]	n=2, 재료1[1]	n=8, 재료1[1]
FSDT ^a	12.227	12.665	10.895	15.388
한성천 등. 2004	12.267	12.700	10.939	15.397
Consistent Mass	12.227	12.666	10.895	15.388

^a Reissner-Mindlin thick-plate theory solution, First order Shear Deformation Theory

^b 0/90/90/0, 0/90/0/0/90/90/0/90/0;

^c -45/45, (-45/45)₄

Nondimensionalized fundamental natural frequency of laminated composite with simply supported boundaries (a/b=1, a/h=10)

Solution	Antisymmetric Cross-ply ^d		Antisymmetric Angle-ply ^e			
	n=2, 재료2[1]	n=10, 재료2[1]	n=2, 재료2[1]	n=4, 재료2[1]	n=6, 재료2[1]	n=10, 재료2[1]
FSDT ^a	10.473	15.779	13.044	14.742 ^f	14.634 ^f	19.380
한성천 등. 2004	10.534	15.823	13.100	-	-	19.391
Consistent Mass	10.477	15.779	13.044	14.742	17.634	19.381

^a Reissner-Mindlin thick-plate theory solution, First order Shear Deformation Theory

^d 0/90, (0/90)₅ ; ^e 45/-45(45/-45)₅ ; ^f (5/-5)₂, (30/-30)₂

참 고 문 헌

- 한성천, 최삼열(2004) 변형률 보간 9절점 쉘 요소를 이용한 적층복합판과 쉘의 선형 정적 해석 및 자유진동 해석, *한국전산구조공학회 논문집*, 17(3), pp.279~293
- Lee, S.J., Kanok-Nukulchai, W.(1998) A Nine-Node Assumed Strain Finite Element for Large Deformation Analysis of Laminated Shells, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 42, pp.777~798
- Lee, S.J., Han, S.E.(2001) Free-Vibration Analysis of Plates and Shells with a Nine-Node Assumed Natural Degenerated Shell Element, *Journal of Sound and Vibration*, 241(4) pp.605~633

- Ma, H., Kanok-Nukulchai, W.**(1989) On the application of assumed strained methods, *Structural Engineering and Construction, Achievements, Trends and Challenges*, Kanok-Nukulchai *et al.*(eds.), *Asian Institute of Technology*, Bangkok, Thailand
- Ma, H.**(1990) Development of a Geometrically Nonlinear Shell Element by Assumed Strain Methods, Ph. D. Dissertation, *Asian Institute of Technology*, Bangkok, Thailand
- Kim, K.D. Lomboy, G.R., Han, S.C.**(2003) A Co-rotational 8-node Assumed Strain Shell Element for Postbuckling Analysis of Laminated Composite plates and Shells. *Comput. Mech.*, 30(4), pp.330~342
- Han, S.C., Kim, K.D., Kanok-Nukulchai, W.**, An Element-Based 0-node Resultant Shell Element for Large Deformation Analysis of Laminated Composite Plates and Shells., Accepted for Publication in the *Structural Engineering and Mechanics*.
- Belytschko, T., Wong, B.L., Stolarski, H.**(1989) Assumed Strain Stabilization Procedure for th 9-node Lagrange Shell Element, *int. J. Num. Meth. Eng.*, 28, pp.385~414