

탄성 및 비탄성 좌굴 고유치해석을 이용한 강뼈대구조의 유효좌굴길이

Determination of Effective Buckling Length of Plane Frames using Elastic and Inelastic System Buckling Analysis

김 문 영† 송 주 영* 경 용 수**
Kim, Moon-Young Song, Ju-Young Kyung, Yong-Soo
(논문접수일 : 2004년 11월 22일 ; 심사종료일 : 2005년 4월 11일)

요 지

탄성 및 비탄성좌굴 고유치해석법을 이용하여 강절프레임의 보-기둥부재의 유효좌굴길이를 산정하는 개선된 방법을 제시한다. 이를 위하여 먼저 설계기준에 제시된 압축재의 내하력 곡선식으로부터 접선계수이론(tangent modulus theory)에 근거하여 세장비-접선계수(tangent modulus), 응력-변형률 곡선식을 유도한다. 이때 안정함수를 이용하여 보-기둥요소의 접선강성행렬을 얻고, 비탄성 좌굴 고유치해석법을 제시하며 이를 이용하여 유효좌굴길이를 산정하는 방법을 제시한다. 해석예제를 통하여 강절프레임에 탄성 및 비탄성좌굴해석법에 의한 유효좌굴길이 비교결과를 제시하고, 매개변수 연구 결과를 제시한다.

핵심용어 : 강절프레임, 비탄성 좌굴해석, 유효좌굴길이, 보-기둥요소

Abstract

An improved method for evaluating effective buckling lengths of beam-column members in plane frames is newly proposed based on system inelastic buckling analysis. To this end, the tangent stiffness matrix of beam-column elements is first calculated using stability functions and then the inelastic buckling analysis method is presented. The scheme for determining effective length of individual members is also addressed. Design examples and numerical results are presented to show the validity of the proposed method.

keywords : plane frame, inelastic buckling analysis, effective buckling length, beam-column element

1. 서 론

뼈대 구조물을 설계하기 위해서는 원칙적으로 재료적 및 기하학적 비선형해석법을 적용하여 시스템 전체의 극한내하력을 산정할 필요가 있다. 그러나 이 방법은 복잡한 비선형 해석기법을 적용하여야 하고 모든 해석프로그램이 같은 문제에 대하여 해석결과가 차이가 날 수 있을 뿐만 아니라, 하중조합에 따라 매번 비선형해석을 수행해야하는 어려움이 따른다. 이러한 비선형해석법의 대안으로 도로교설계기준,

AISC-LRFD 기준을 포함한 여러 설계기준에서는 시스템 안정성 검토를 생략하는 대신에 개별부재의 유효좌굴길이를 산정하여 압축부재의 내하력을 결정하고, $P-\delta$ 및 $P-\Delta$ 효과를 고려하는 부재안정성 식을 검토하는 설계법을 제안하고 있다.(American Institute of Steel Construction, 2002; 한국도로교통협회, 2000)

유효좌굴길이는 구조시스템 전체가 소성 및 좌굴거동에 의한 붕괴 시 개별부재 내에 또는 부재 축을 가상으로 연장하여 휨모멘트가 영이 되는 유효한 부재 길이를 의미하며,

† 책임저자 · 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수
전화 : 031-290-7514 ; Fax : 031-290-7548
E-mail: kmye@skku.ac.kr

* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

** 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

구조시스템이 개별 부재에 미치는 영향을 정량적으로 나타낸 것이다. AISC-LRFD commentary(AISC, 1993)에서는 가로흔들이(side sway)를 허용하거나 이를 허용치 않는 프레임을 설계할 때, 강재 보-기둥부재의 유효좌굴계수를 산정하기 위하여 소위 alignment chart를 추천하고 있다. 평면 프레임의 유효좌굴길이를 산정하기 위한 연구(Chu 등, 1969; Yura, 1971; LeMessurier, 1977; Cheong-Siat-Moy, 1986; Bridge 등, 1987; Galambos, 1988; Duan 등, 1989, 1993; Aristizabal-Ochoa, 1994; Salmon 등, 1996)는 많은 연구자에 의해 수행되어 왔다. 그러나 평면프레임의 유효좌굴길이 산정을 위한 차트는 모든 부재의 단면이 일정하며, 기둥강성이 모든 기둥에 대해서 같고, 모든 기둥이 동시에 좌굴된다는 등의 기본가정을 가지고 있어, 이 가정에 어긋난 구조물의 경우에는 유효좌굴길이의 보정이 요구된다. 최근에 alignment chart법의 대안으로 탄성좌굴 고유치해석 결과를 이용하여 개별 부재의 유효좌굴길이를 산정하는 방법이 제시되었다(진만식 등, 2004; Chen 등, 1987; Chajes, 1974). 탄성좌굴 고유치해석법을 이용한 유효좌굴길이 산정법은 유효좌굴길이 산정 시 소성거동의 영향이 고려되지 않는다는 단점이 있어, 실제 기둥부재들이 중간주 또는 단주에 해당함에도 구조전체가 선형탄성 거동한다고 가정하고 있어서 전체 구조물의 붕괴 시 변형형상은 좌굴모드와 차이가 나기 마련이며, 이는 탄소성거동이 유효좌굴길이 산정에 영향을 준다는 것을 의미한다. 이와 같이 탄성좌굴모드와 비탄성 좌굴모드는 차이가 나기 때문에 접선계수이론에 근거하여 탄성계수대신 접선계수를 사용하여 비탄성 좌굴고유치해석을 수행할 필요가 있다(Fukumoto, 1997).

본 논문에서는 각 설계규정에 제시된 기둥부재의 극한내하력 곡선으로부터 역으로 비선형 응력-변형도곡선을 얻을

수 있다는 점에 착안하여 개별부재의 접선계수이론(tangent modulus theory)에 의한 비탄성좌굴하중 산정법을 강절프레임 시스템으로 확장시켜서 적용하는 비탄성좌굴 고유치해석법을 새로이 제시한다. 해석예제를 통하여 탄성 및 비탄성좌굴 고유치해석에 의한 유효좌굴길이를 산정하고, 결과값의 비교, 검토한다.

2. 단순지지된 단일 기둥부재의 비탄성 좌굴해석 및 극한내하력

본 장에서는 먼저 단순지지된 기둥부재의 비탄성 좌굴해석이론을 간단히 언급하고, 이에 근거하여 도로교설계기준에 제시된 극한내하력으로부터 기둥부재의 응력-변형률곡선을 유도한다.

2.1 접선계수이론을 이용한 단일 기둥의 비탄성좌굴 해석

단순지지된 기둥부재의 경우 탄성영역에서 좌굴응력 f_{cr} 과 좌굴모드 y 는 각각 다음과 같다.

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad y = \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

여기서, λ =세장비; E =선형탄성계수이다.

여기서, F_y =항복응력; F_p =비례한도; E_t =접선계수; $(l_e/r)_0 = \lambda_0$ =한계세장비를 나타내고 있다.

한편, 비탄성 영역에서 발생하는 좌굴내하력 저하를 고려하기 위한 탄소성좌굴 이론은 Engesser의 접선계수이론(tangent modulus theory), 이중계수이론(double modulus theory), Shanley의 기둥이론 등으로 발전하였다

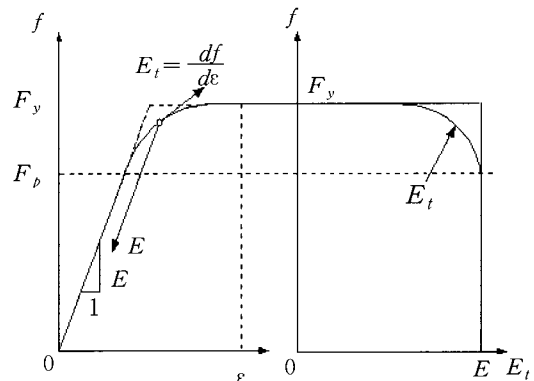
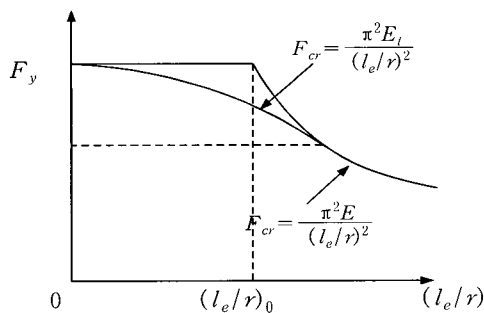


그림 1 접선계수곡선

(Chen 등, 1987; Chajes, 1974). 이중에서 접선계수이론은 탄성좌굴이론을 자연스럽게 비탄성영역으로 확장시킨 이론으로서, 단면적, 단면 2차모멘트 등을 산정하면 적용이 간단하면서 비교적 실험결과에 매우 가까운 값을 주기 때문에 널리 채택되고 있다. 접선계수이론에 따르면 축력을 받는 기둥의 평형방정식과 단순지지된 기둥의 비탄성 좌굴응력 및 좌굴모드는 각각 다음과 같다.

$$E_t I_y y'''' + P y = 0 \tag{2}$$

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}, \quad y = \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

여기서, 접선계수이론에 의한 좌굴모드도 탄성좌굴모드와 동일하게 사인함수로 구해지는 것에 유의해야 한다.

일반적으로 접선계수이론은 알루미늄기둥과 같이 재료자체가 비례한도를 초과하는 압축응력 범위에서 비선형 응력-변형도 관계를 나타낼 때 뿐만 아니라, 강재와 같이 잔류응력 등의 영향으로 인하여 겉보기 응력-변형도관계가 비선형성을 나타내는 경우에도 적용할 수 있다. 즉, 압축응력과 축방향 변형률에 대한 비선형 관계곡선이 주어지면 비례한도 이상의 압축응력이 작용하여도 이에 대응하는 접선계수 E_t 를 사용하여 탄소성좌굴하중(극한 내하력)을 산정할 수 있다. 아래는 특정한 응력-변형률 곡선이 주어진 경우에 세장비의 변화에 따른 단순지지된 기둥의 극한내하력곡선을 산정하는 과정을 나타낸 것이다.

- 가. 먼저 비탄성 좌굴응력 f_{cr} 을 가정한다.
- 나. 응력-변형률 곡선에서 f_{cr} 값에 대응하는 E_t 값을 구한다.
- 다. $\lambda = \pi \sqrt{E_t / f_{cr}}$ 로부터 λ 를 구한다.
- 라. f_{cr} 값을 변화시켜서 다시 가-다 과정을 반복한다.

결과적으로 이를 정리하면 그림 1에서 보이는 λ 의 변화에 따른 내하력곡선을 작성할 수 있다.

2.2 기둥부재의 극한내하력 설계규정

일반적으로 강철프레임 시스템에서는 보 부재에 휨 항복이 발생하기 전에 기둥부재의 좌굴이 전체 시스템의 붕괴를 좌우하게 된다. 이러한 기둥의 설계기준은 비탄성좌굴영역에서 이론적인 좌굴해석결과와 실제기둥의 제작 및 시공오차에 의한 초기결함, 용접잔류응력, 단면형상 등을 고려하여 실험에 바탕을 둔 다양한 실험결과를 고려하여 극한내하력

을 규정하고 있다. 본 절에서는 국내 설계기준에 규정된 기둥의 내하력식을 무차원화된 변수를 이용하여 표시한다.

우리나라 도로교설계기준(2000)에서는 압축부재에 대한 허용축방향 압축응력을 규정하고 있다. 이는 기둥의 내하력에 관한 실험결과를 통계적으로 정리하고, 또한 잔류응력과 초기처짐을 고려한 수치해석 결과를 조합하여 정한 4가지 기둥그룹에 대한 내하력 곡선을 기본으로 4개 곡선의 하한 값에 상당하는 곡선으로 다음과 같이 무차원화된 내하력 \bar{f} 를 무차원화된 세장비 $\bar{\lambda}$ 의 함수식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{f_{u,i}}{f_y} = 1.0 & \bar{\lambda} &\leq 0.2 \\ &= 1.109 - 0.545\bar{\lambda} & 0.2 < \bar{\lambda} &\leq 1.0 \\ &= 1.0 / (0.773 + \bar{\lambda}^2) & \bar{\lambda} &> 1.0 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서,

$$\bar{f} = \frac{f_{cr}}{f_y}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \left(\frac{L_{e,i}}{r} \right) \tag{5}$$

f_y = 항복응력; λ_0 = 항복응력과 좌굴응력이 같아질 때의 한계세장비; $L_{e,i}$ = 유효좌굴길이; r = 회전반경을 각각 나타낸다. 식 (4)는 $\bar{\lambda} \leq 0.2$ 인 단주의 경우는 좌굴이 발생하지 않으므로 이때의 기준내하력은 재료의 파괴수준과 동일한 $f_{cr} = f_y$ 가 된다. 또한 $\bar{\lambda} > 0.2$ 인 기둥에서는 좌굴이 발생하여 f_{cr} 은 감소하게 되며, 이때의 기준내하력은 각각 식 (4)의 두 번째, 세 번째식으로 표현된다.

그림 2는 각 기준내하력식을 내하력과 세장비를 무차원화한 \bar{f} 와 $\bar{\lambda}$ 에 대해 도시한 것이다.

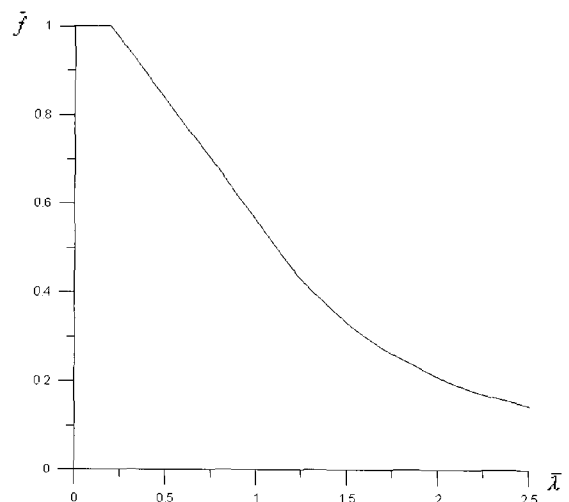


그림 2 도로교 설계기준에 따른 내하력곡선

2.3 기준내하력 곡선식으로부터 응력-변형을 관계 유도

2.1절과 2.2절에서는 각각 접선계수이론에 근거한 단순 지지 기둥의 내하력 곡선식 산정법과 설계기준에서 규정된 내하력 기준식을 살펴보았다. 본 절에서는 전 절의 3가지 설계기준식에 대응하는 결보기 응력-변형도 관계곡선을 도출한다. 이를 위하여 먼저 무차원화된 변수를 다음과 같이 도입한다.

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_y}, \quad \bar{E}_t = \frac{E_t}{E} = \frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}} \quad (8)$$

여기서 ϵ_y 는 f_y/E 로 산정한 값이다. 식 (8)을 이용하면 식 (3)은 식 (9)의 비탄성 좌굴응력식으로 무차원화시킬 수 있다.

$$\bar{f} = \frac{\bar{E}_t}{\lambda^2} \quad (9)$$

도로교설계기준에 제시된 극한내하력을 이용하여 이에 대응하는 응력-변형을 관계식을 유도한다. $\lambda > 1.0$ 인 경우에 식 (4)의 세 번째 식과 식(9)를 결합시키면 다음 식을 얻는다.

$$\bar{f} = \frac{\bar{E}_t}{\lambda^2}, \quad \bar{E}_t = \frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\lambda^2}{0.773 + \lambda^2} \quad (10)$$

이때 $\lambda^2 = \xi$ 를 도입하면, 식 (10)으로부터 다음의 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}} = 1 - 0.773\bar{f} \quad (11)$$

여기서, 식(11)의 일반해를 구하고 초기조건 즉, $\bar{\epsilon} = 0$ 일 때 $\bar{f} = 0$ 이므로 이를 적용하면 다음의 식을 얻는다.

$$\bar{f} = \frac{1 - e^{-0.773\bar{\epsilon}}}{0.773} \quad (12)$$

$0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0$ 인 경우에도 유사한 과정을 거쳐서 다음의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\lambda}^2 \bar{f} = \left(\frac{\bar{f} - 1.109}{-0.545} \right) \bar{f} \quad (13)$$

식 (13)을 적분하고 $\bar{\lambda} = 1.0$ 일때, $\bar{f} = 0.564$ 이고, 이때의 $\bar{\epsilon} = 0.7408$ 이므로 이를 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$0.297025 \left\{ -\frac{0.901713}{-1.109 + \bar{f}} - 0.813087 \ln(1.109 - \bar{f}) + 0.813087 \ln \bar{f} \right\} = \bar{\epsilon} + 0.241107337$$

마지막으로 $\bar{\lambda} \leq 0.2$ 인 경우는 $\bar{E}_t = \frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\lambda}^2$ 을 얻는다.

아래는 설계 기준식에 의한 응력-변형도 관계식을 정리한 것이다. 또한 그림 3은 도로교 설계기준에 대한 응력-변형률 곡선, 세장비-접선계수 관계를 그래프로 나타낸 것이다.

1) $\bar{\lambda} > 1.0$

$$\bar{f} = \frac{1 - e^{-0.773\bar{\epsilon}}}{0.773}$$

2) $0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0$

$$0.297025 \left\{ -\frac{0.901713}{-1.109 + \bar{f}} - 0.813087 \ln(1.109 - \bar{f}) + 0.813087 \ln \bar{f} \right\} = \bar{\epsilon} + 0.241107337$$

3) $\bar{\lambda} \leq 0.2$

$$\bar{E}_t = \frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\lambda}^2$$

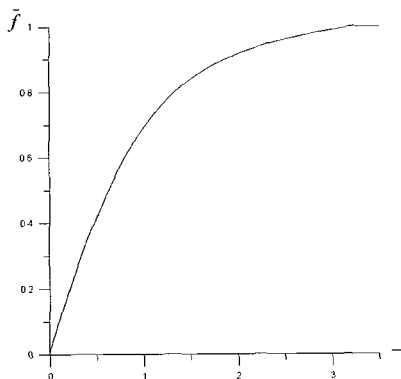


그림 3(a) 기준 내하력식에 의한 응력-변형률 곡선

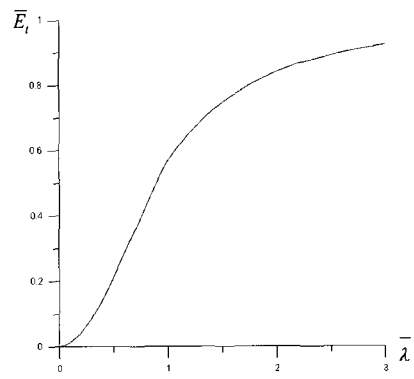


그림 3(b) 기준 내하력식에 의한 접선계수-세장비 곡선

3. 탄성 및 비탄성 시스템 좌굴해석에 기초한 강절프레임 입구조의 유효좌굴길이 산정

본 장에서는 2장에서 얻은 기둥부재의 접선계수이론과 극한내하력 기준식 및 이에 대응하는 응력-변형률관계식을 이용하여 탄성 및 비탄성 시스템좌굴해석법을 제시하고 강절프레임의 유효좌굴길이 산정법을 제시한다.

3.1 보-기둥요소의 접선강성행렬(김문영 등, 1998)

시스템 좌굴 고유치해석을 수행하기 위해서는 보-기둥요소의 접선강성행렬이 필요하다. 그림 4는 국부좌표계에서 보-기둥요소의 변위벡터 u 및 부재력벡터 f 를 나타낸 것이며, 이들의 구체적인 정의식은 다음과 같다.

$$u^T = \langle u^p, v^p, \omega^p, u^q, v^q, \omega^q \rangle \quad (14a)$$

$$f^T = \langle f_1^p, f_2^p, m^p, f_1^q, f_2^q, m^q \rangle \quad (14b)$$

이 두 벡터사이의 힘-변위관계식은 다음과 같다.

$$f = k_i u \quad (15a)$$

여기서,

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ & & 4\phi_3 & 0 & \frac{6}{L}\phi_2 & 2\phi_4 \\ & & & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ sym. & & & & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ & & & & & 4\phi_3 \end{bmatrix} \quad (15b)$$



그림 4(a) 보-기둥요소의 변위벡터



그림 4(b) 보-기둥요소의 부재력벡터

여기서 $\phi_j, j = 1, 2, 3, 4$ 는 기둥부재에 발생하는 축력 P_i 의 함수로, 통상 안정함수(stability function)라 부른다. 축력의 크기 및 부호에 따른 자세한 결과식은 문헌(Chajes, 1974)을 참조할 수 있다. 또한 직접강도법에 의하여 전체 시스템에 대한 접선강성행렬 K 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K = \sum_i k_i(P_i) \quad (16)$$

3.2 탄성 및 비탄성 좌굴 고유치해석기법을 이용한 유효좌굴길이 산정(Bathe, 1996)

본 절에서는 임의의 경계조건을 갖는 기둥부재의 유효좌굴길이의 개념을 고찰하고, 이를 확대시켜 강절프레임을 구성하는 개별 기둥부재의 탄성좌굴 고유치해석에 기초한 유효좌굴길이 산정법을 언급한다. 먼저 압축력 P 를 받고 부재 길이는 L 이며, 양단이 탄성 이동 및 회전스프링으로 지지되는 단일 기둥부재를 생각한다. 이때 좌굴모드는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} v_o(x) &= A \sin kx + B \cos kx + Cx + D \\ &= \hat{A} \sin(kx + \hat{B}) + Cx + D \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, v_o =기둥의 횡변위; $k^2 = P_i/EI$ 이다. 식 (17)에서 세 번째와 네 번째 항은 부재의 강제회전 및 이동변위에 대응하므로 이를 제외하면 첫 번째 및 두 번째 항은 사인함수로 합성하는 것이 가능하다. 따라서 이 부재의 유효좌굴 길이는 단순지지인 경우에 좌굴길이가 반주기 사인함수인 점에 착안하여 그림 4에 표시된 바와 같이 부재길이 L 구간을 사인함수로 확장시켜 반주기에 대응하는 길이를 유효좌굴길이 L_e 로 설정할 수 있다.

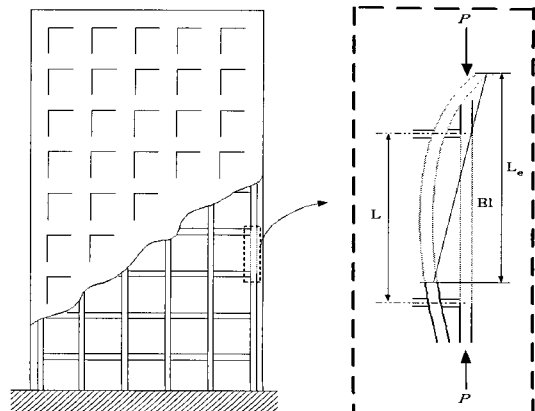


그림 5(a) 강절프레임시스템

그림 5(b) 확대 예

$$L_c = KL = \pi \sqrt{\frac{EI}{P_{cr}}} \quad (18)$$

그림 5(a)와 5(b)는 각각 강절프레임 시스템이 전체적으로 탄성좌굴을 일으키는 형상과 임의 보-기둥부재를 분리, 확대시켜 나타낸 것이다. 명백히 전체 시스템이 주목하는 보-기둥부재에 미치는 영향은 탄성 스프링으로 치환할 수 있고, 좌굴하중은 탄성좌굴 고유치해석으로 얻은 좌굴파라미터에 초기 축방향력을 곱하여 얻을 수 있다. 여기서 탄성 스프링 상수 값을 구할 필요가 없다는 점에 유의해야 한다.

이제 전체 시스템에 대한 선형탄성해석을 통하여 하중조합에 대한 부재의 축방향력을 산정한다. 이때 탄성강성 행렬 K_e 및 기하강성 행렬 K_g 을 이용하여 식 (5)의 고유치 해석을 수행한다. 고유치 해석을 통해 얻은 고유치 ξ_{cr} 를 부재에 작용하는 축력에 곱하여 식 (19)와 같이 i 번째 부재의 좌굴하중 $P_{cr,i}$ 을 얻는다.

$$P_{cr,i} = \xi_{cr} P_i \quad (19)$$

여기서, P_i 는 고정하중에 대응하는 i 번째 부재의 축방향력이다. 최종적으로 부재의 유효좌굴길이 $L_{e,i}$ 는 임의 경계조건을 갖는 기둥의 유효좌굴길이 산정법을 동일하게 적용하여 다음 식으로 구할 수 있다.

$$L_{e,i} = K_i L_i = \pi \sqrt{\frac{E_i I_i}{P_{cr,i}}} \quad (20)$$

여기서, K_i 는 i 번째 부재의 유효좌굴계수이다.

한편, 비탄성 좌굴거동을 고려한 시스템좌굴의 경우는 탄성좌굴 모드와 비탄성 좌굴 모드는 차이가 나기 때문에 접선계수이론에 근거하여 탄성계수 E 대신 접선계수 E_t 를 사용하여 좌굴고유치해석을 수행할 필요가 있다. 즉, 비탄성 시스템좌굴해석의 경우에는 주어진 좌굴파라미터 ξ 값 및 이에 대응하는 압축력에 대하여 각 부재의 시스템의 접선강성행렬 K_t 를 산정할 때 그림 2와 그림 3의 결과식을 이용하여 각 부재의 접선계수 E_t 와 부재 접선강성행렬 $k_t^i(\xi P_i, E_t)$ 을 구해야 한다. 이렇게 ξ 값을 증가시키면서, $\det \|K_t(\xi_{cr})\|$ 이 영이 되는 고유치 ξ_{cr} 을 구한다. 시스템 탄성 및 비탄성 좌굴 고유치해석을 통한 유효좌굴길이 산정과정에 대한 구체적인 계산절차는 다음과 같다.

가. 1차 탄성해석: 주어진 하중조합에 대하여 식 (21)과 같이 선형해석을 행하고 각 부재의 축방향력 P_i 를 산정한다.

$$K_e U = F \quad (21)$$

여기서, K_e =직접강도법에 따른 각 요소의 탄성강성행렬의 합($=\sum_{i=1}^n k_e^i$)으로 산정하는 시스템의 탄성강성행렬, F =시스템 외력벡터, 그리고 U =시스템 절점변위벡터이다.

나. 시스템 탄성좌굴해석: 안정함수를 이용하여 각 부재의 접선강성행렬을 산정하는 경우에 탄성강성행렬과 기하학적 강성행렬이 비선형적 관계로 결합되어 나타나기 때문에 표준적인 고유치 해석과는 달리 식 (22)의 비선형 고유치문제를 풀어야 한다.

$$K_t(\xi) D = \sum_{i=1}^n k_t^i(\xi P_i, E) D = 0 \quad (22)$$

즉, 식 (22)의 행렬식 $\det \|K_t(\xi_{cr})\|$ 이 영이 될 때 고유치 ξ_{cr} 을 구한다. 여기서, K_t 는 시스템의 접선강성행렬을 나타낸다. 식 (22)는 이미 언급한 바와 같이 비선형 고유치문제이므로 일반적인 고유치해석은 적용하기 곤란하다. 따라서 본 연구에서는 첫 번째 고유치 $\xi_{cr}^{(1)}$ 에서 식 (22)의 행렬식이 영이 되고, 강성행렬을 upper triangular matrix로 변환할 때 pivot 중 1개의 부호가 변화하는 성질을 이용하였다. 아울러 전술한 방법으로 고유치가 구해지면 고유벡터는 영이 아닌 특정 절점변위성분을 선택하여 다음 연립방정식의 해에서 단위 값을 갖도록 penalty method를 적용하여 산정한다. 즉, 특정 절점변위성분의 자유도에 대응하는 강성행렬의 대각선 강도와 하중벡터에 매우 큰 값을 더한 다음에 가우스 소거법을 적용하면 고유벡터를 산출할 수 있다.

다. 시스템 비탄성좌굴해석: 식 (23)의 비선형 고유치문제를 푼다.

$$K_t(\xi) D = \sum_{i=1}^n k_t^i(\xi P_i, E_{ti}) D = 0 \quad (23)$$

여기서, i 번째 부재의 접선강성행렬 k_t^i 를 산정할 때, 주어진 작용하중 ξP_i 에 대응하는 접선계수 E_{ti} 가 적용된다는 점이 탄성좌굴해석과 큰 차이점이 된다. 즉, 작용하중을 단면적으로 나누고, 다시 항복응력으로 나누어 무차원화 시켜서 \bar{f}_i 를 산출하고, 그림 2로부터 세장비 $\bar{\lambda}_i$ 그리고, 그림 3(b)로부터 접선계수 E_{ti} 를 구한다. 이렇게 하여 작용하중 파라미터 ξ 를 증가시키면서 반복적으로 $\det \|K_t(\xi_{cr})\|$ 를 산정하고, 이 값이 영이 되는 ξ_{cr} 을 구한다. 이때의 좌굴모드는 탄성좌굴해석의 경우와 마찬가지로 penalty method를 적용하여 산정한다.

다. 유효좌굴길이 결정: 1차 해석 및 시스템 좌굴해석 결과로부터 각 부재의 축방향력 P_i 과 고유치 ξ_{cr} 을 구한 후에 식 (20)으로 i 번째 부재의 유효좌굴길이 $L_{e,i}$ 를 얻는다.

4. 수치예제

수치예제에서는 탄성 및 비탄성 좌굴고유치 해석법을 통해 유효좌굴길이를 산정하고, 보다 정확한 상대강비를 고려한 수정된 거더길이를 사용하여 alignment chart 및 기댄 기둥(leaning column)효과를 고려한 수정된 유효좌굴길이계수, 그리고 도로교 설계기준에 의한 값과 비교하였다. 횡하중에 저항하지 못하는 기댄기둥의 효과를 고려하는 경우는 AISC-LRFD Specification(1993)에서 제시하고 있는 다음의 식을 이용하여 유효좌굴길이계수 K 를 수정한 K' 로 사용한다.

$$K'_i = \sqrt{\frac{I_i}{P_{ui}} \frac{\Sigma P_u}{\Sigma(I_i/K_i^2)}} \quad (24)$$

여기서, I_i = i 번째 강결기둥의 단면2차 모멘트; P_{ui} = i 번째 강결기둥의 축력; ΣP_u =모든 기둥의 축력의 합; K_i = i 번째 기둥의 K 값이다.

4.1 문형라멘의 유효좌굴길이

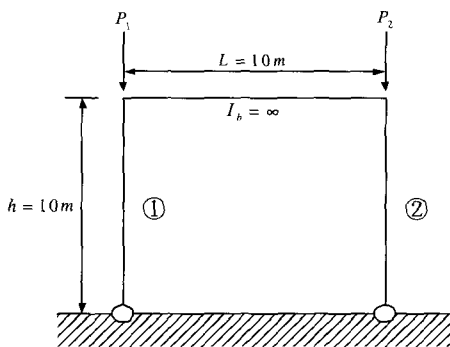


그림 6 문형프레임

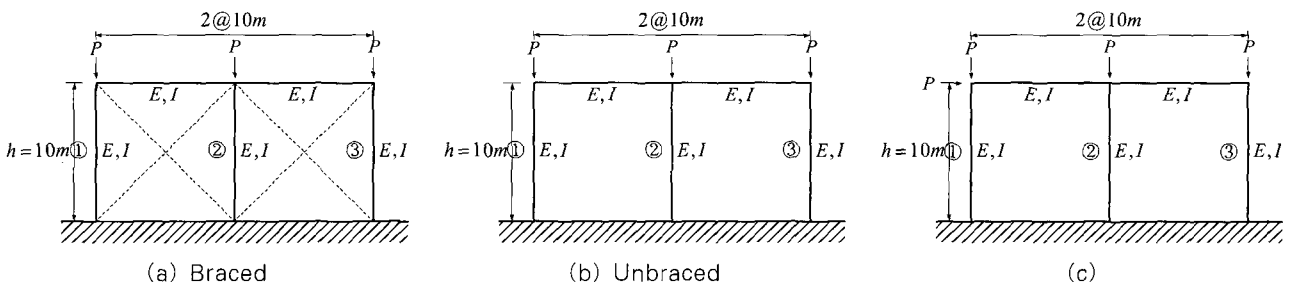


그림 7 1층 2경간 프레임구조

그림 6은 가로 흔들이가 있는 기본적인 문형프레임을 나타내고 있으며, P_1/P_2 의 값에 따른 기둥의 유효좌굴길이계수 변화를 표 1에 나타내었다. 사용된 제원은 450×200×9×14 단면을 사용하였고, 기둥 간격과 높이는 10m로 하여 탄성 좌굴해석에 의한 유효좌굴길이계수를 Aristizabal-Ochoa (1994) 및 Cheong-Siat-Moy(1986)의 값과 비교하였다. 표 1에서 볼 수 있듯이 탄성 좌굴 고유치해석을 적용한 본 연구의 값과 문헌의 값이 1% 내외의 오차로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 비탄성 좌굴 고유치해석을 적용하는 경우에 압축력이 더 많이 작용하는 2번 부재는 유효좌굴길이계수가 작아지는 반면에, 적게 작용하는 1번 부재 유효좌굴길이계수가 커지는 경향을 나타내었다. 이는 비탄성 좌굴해석 값을 이용하여 설계하는 경우에 더 경제적인 설계가 이루어질 수 있을 것으로 판단된다.

표 1 각 기둥의 유효좌굴길이계수

P_1/P_2		본 연구		Aristizabal-Ochoa (1994)	Cheong-Siat-Moy (1986)	식(24)	alignment chart
		탄성	비탄성				
1.00	부재 ①	2.001	2.001	2.000	2.000	2.0	2.0
	부재 ②	2.001	2.001	2.000	2.000	2.0	2.0
0.25	부재 ①	3.174	3.519	3.150	3.140	3.16	2.0
	부재 ②	1.587	1.404	1.575	1.570	1.58	2.0
0.00	부재 ①	∞	∞	∞	∞	-	2.0
	부재 ②	1.426	1.123	1.410	$\sqrt{2}$	1.41	2.0

그림 7은 가로흔들이가 없는 프레임과 가로흔들이가 있는 1층 2경간 프레임을 나타내고 있으며, 모든 부재의 휨강성과 기둥의 축압축력이 동일한 값을 갖는 대칭구조 시스템이다. 표 2는 전체 시스템의 좌굴해석에 기초한 본 연구의 방법과 alignment chart 및 식 (24)에 의한 수정된 유효좌굴길이계수를 비교한 것이며, 사용된 단면제원은 H-450×200×9×14단면으로 $A=96.76cm^2$, $I=33500cm^4$ 이다.

표 2 가로흔들이의 유무에 따른 각 기둥의 유효좌굴길이계수 비교

경우 (a)	본 연구		alignment chart	식(24)
	탄성	비탄성		
①	0.613	0.515	0.611	0.599
②	0.613	0.515	0.576	0.599

경우 (b)	본 연구		alignment chart	식(24)
	탄성	비탄성		
①	1.139	1.045	1.191	1.140
②	1.139	1.045	1.055	1.140

경우 (c)	본 연구		alignment chart	식(24)
	탄성	비탄성		
①	1.050	1.284	1.191	1.140
②	0.900	0.504	1.055	1.140
③	1.040	0.759	1.191	1.140

표 2에서 볼 수 있듯이 기본적으로 alignment chart의 적용을 위해 여러 가지 가정을 내포하고 있는 기본 모델과 어긋날 때 그 차이가 커짐을 알 수 있으며, 대체적으로 기댄 기둥효과를 이용하여 구한 유효좌굴길이계수와 본 연구가 일치하는 것을 볼 수 있다. 특히 가로흔들이가 있는 프레임의 경우 기댄기둥효과를 이용한 결과와 매우 유사하다는데 주목할 만하다. 비탄성 좌굴해석을 통해 계산된 값들은 경우 (a)와 경우 (b)에 대해서는 전반적으로 유효좌굴길이계수가 줄어드는 경향을 보이는 반면에, 횡하중이 작용하는 (c)의 경우에는 alignment chart와 기댄기둥효과는 결합된 부재의 강성에 의해 그 값이 결정되기 때문에 유효좌굴길이계수의 값에 변화가 없지만 본 연구의 결과를 살펴보면 횡하중의 작용으로 기둥 ③의 축하중이 증가하는 효과가 고려되어 유효좌굴길이계수가 작아지고 있는 것을 볼 수 있다.

그림 8과 표 3은 alignment chart방법의 기본 가정을 벗어나는 비대칭 2차원 3층 3경간 프레임과 이에 사용된 제원을 나타낸 것이다. 즉, 각 기둥들의 단면적과 단면 2차 모멘트의 차이는 모든 기둥의 강성이 각 층마다 다르게 되므로 앞서 제시한 alignment chart를 사용하기 위한 기본 가정에 위배된다는 것을 알 수 있다.

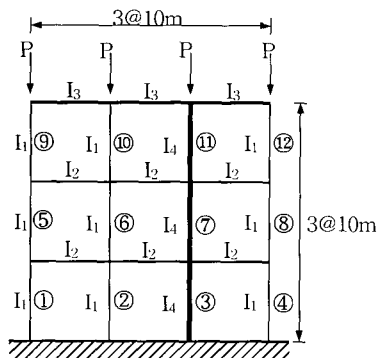


그림 8 비대칭 프레임 구조

표 3 단면제원

단 면	단면적(cm ²)	단면 2차모멘트(cm ⁴)
H-450×200×9×14	96.76	$I_1 = 33500$
H-400×200×8×13	84.12	$I_2 = 23700$
H-350×250×8×12	88.15	$I_3 = 18500$
H-498×432×45×70	770.1	$I_4 = 298000$

표 4는 전체 프레임의 탄성 및 비탄성좌굴 고유치해석을 통해 구한 각 기둥의 유효좌굴길이계수와 기댄기둥효과를 고려하여 계산된 유효좌굴길이계수를 비교한 것이다.

표 4 가로흔들이가 있는 프레임의 기둥별 유효좌굴길이계수 비교

기둥	본 연구		식(24)	기둥	본 연구		식(24)
	탄성	비탄성			탄성	비탄성	
①②④	1.299	0.743	0.920	③	3.876	5.177	2.744
⑤⑥⑧	1.299	0.743	1.461	⑦	3.876	5.177	4.359
⑨⑩⑫	1.299	0.743	1.351	⑪	3.876	5.177	4.029

표 4에서 전체 프레임 좌굴해석에서 구한 각 기둥의 유효좌굴길이계수와 기댄기둥의 효과가 고려된 유효좌굴길이계수가 타 기둥에 비해 상대적으로 강성이 큰 3, 7, 11 기둥에서 크게 차이가 남을 볼 수 있다. 이는 9배라는 강성의 차이에 의한 구조물의 비대칭 거동의 결과라고 판단된다. AISC-LRFD Specification(1993)에서는 이처럼 대칭 효과를 반영하는 기댄기둥효과를 이용하여 수정된 유효좌굴길이계수를 제시하고 있다. 앞의 예제와 마찬가지로 본 연구의 방법에 의한 유효좌굴길이계수는 각 기둥의 강성과 길이가 같으면 동일한 값을 나타내지만, 기댄기둥효과에 의한 수정된 유효좌굴길이계수는 각 구하고자 하는 기둥에 연결된 보와 기둥의 강성비에 따라 제각각으로 나타남을 알 수 있다. 비탄성 좌굴해석을 통한 유효좌굴길이계수를 보면, 상대적으로 강성이 약한 기둥에 대해서는 유효좌굴길이계수가 탄소성 효과로 인해 줄어드는 것을 볼 수 있는 반면, 강성이 큰 3, 7, 11 기둥에서는 오히려 유효좌굴길이계수가 커짐을 볼 수 있다.

그림 9는 수평하중을 고려한 예제로 모든 기둥 및 보의 강성이 같고 수직하중($P=50t$)과 수평하중의 비가 0.1, 0.5, 1.0의 비율을 가지고 있으며, 각 층마다 크기가 다른 수평하중이 재하되는 3층 3경간 평면 프레임으로 각각의 경우에 대한 기둥의 유효좌굴길이계수를 표 4에 나타내었다. 이 예제의 경우 수평하중이 추가가 되면서 각 기둥의 축압축력이 각기 달라짐에 따라 전체적으로 다양한 유효좌굴길이계수가 계산됨을 볼 수 있다.

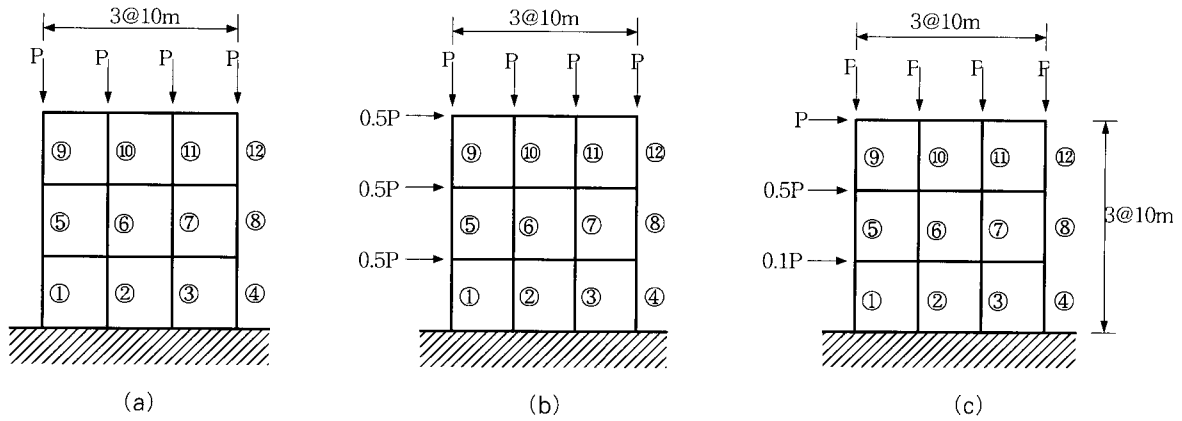


그림 9 3층 3경간 평면 프레임

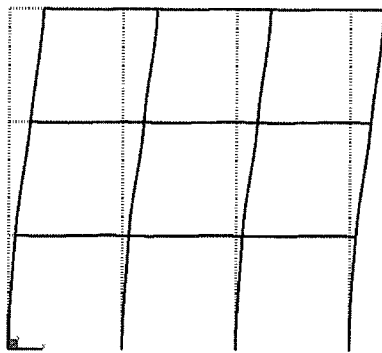


그림 10(a) 그림 9(b)의 탄성 좌굴모드

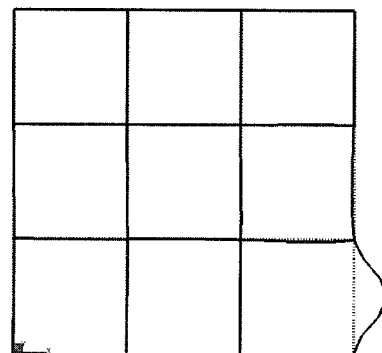


그림 10(b) 그림 9(b)의 비탄성 좌굴모드

표 5 3경간 평면프레임의 좌굴파라미터 비교

경우(a)	Axial Force	유효좌굴길이계수	
		탄성	비탄성
①~⑫	50.000	1.359	1.134

경우(b)	Axial Force	유효좌굴길이계수				P/P_u	
		Alignment chart	식(24)	탄성	비탄성	탄성	비탄성
①	6.418	1.306	3.390	3.798	6.582	0.15	0.42
②	58.463	1.145	1.123	1.258	1.623	0.35	0.42
③	40.773	1.145	1.345	1.507	2.207	0.28	0.42
④	93.346	1.306	0.889	0.996	0.499	0.51	0.42
⑤	28.205	1.649	1.869	1.812	2.841	0.23	0.42
⑥	53.543	1.296	1.357	1.315	1.777	0.33	0.42
⑦	45.329	1.296	1.474	1.429	2.037	0.30	0.42
⑧	71.210	1.649	1.176	1.140	1.191	0.41	0.42
⑨	43.592	1.498	1.373	1.457	2.099	0.29	0.42
⑩	51.355	1.222	1.265	1.343	1.842	0.32	0.42
⑪	48.252	1.222	1.305	1.385	1.939	0.31	0.42
⑫	56.245	1.498	1.209	1.283	1.696	0.34	0.42

경우(c)	Axial Force	유효좌굴길이계수			
		Alignment chart	식(24)	탄성	비탄성
①		인 장			
②	62.728	1.049	1.073	1.208	1.844
③	36.314	1.140	1.410	1.588	2.748
④	114.175	1.358	0.795	0.896	0.499
⑤	12.924	1.667	2.760	2.662	5.040
⑥	56.263	1.211	1.323	1.276	2.014
⑦	41.498	1.300	1.540	1.486	2.514
⑧	85.900	1.660	1.071	1.033	1.226
⑨	37.737	1.343	1.477	1.558	2.680
⑩	52.430	1.243	1.253	1.322	2.126
⑪	46.330	1.235	1.333	1.406	2.328
⑫	61.646	1.348	1.155	1.219	1.871

경우 (a)는 수평력이 없이 수직력만 작용하는 경우로 전체 시스템 좌굴해석의 결과 모든 기둥에 동일한 압축력 P

가 작용하여 전체적으로 일관된 결과가 나타난다. 수직하중의 50%가 수평하중으로 작용하는 경우(그림 9(b)), 각 기둥의 축압축력에 영향을 미쳐 표 5의 경우(b)에서 보는 것과 같이 다양한 유효좌굴길이계수가 계산된다. 수평하중이 가해진 좌측기둥은 수평하중의 영향으로 경우 (a)에 비해 상대적으로 축력이 약해져 유효좌굴길이계수가 커지게 되고, 가장 오른쪽 기둥은 반대로 수평력이 축압축력을 증가시켜 유효좌굴길이계수가 작아지는 결과를 볼 수 있다. 왼쪽에서 오른쪽으로 가면서 수평하중의 영향은 반복적으로 커졌다 작아지고, 아래층에서 위층으로 올라갈수록 수평하중의 영향이 커져 유효좌굴길이계수가 작아지는 경향을 알 수 있다. 또한, 경우 (b)에 대해서는 작용하중 P 와 극한내하력 P_u 의 비를 나타내 보았다. 탄성해석의 경우 그 비율은 부재별로 다양하게 나타나지만 비탄성 해석을 하게 되면 비율이 각 시방서별로 일정한 값에 이르고 있음을 볼 수 있다. 이는 비탄성 해석을 통하여 각 부재마다 가장 효율적으로 재료가 사용되고 있음을 단적으로 보여주는 예라고 판단된다. 경우 (c)는 상대적으로 큰 수평력으로 좌측 하단 기둥에서는 인장력이 발생하는 극단적인 경우를 보여주고 있다.

그림 10(a)와 (b)는 그림 9(b)에 대한 강절프레임물의 좌굴모드를 나타낸 것이다. (a)의 경우는 수평하중의 영향으로 side sway가 일어나면서 전체적으로 좌굴이 일어나는 반면, 비탄성 좌굴모드를 나타내는 (b)의 경우에는 가장 하중을 크게 받고 있는 우측 최하단 기둥이 크게 좌굴하는 모드형상을 볼 수 있다.

5. 결 론

현재까지 평면 프레임에 대한 유효좌굴계수의 산정에 대해서는 많은 연구자들에 의해 연구가 진행되었으며, 이러한 연구결과를 반영하여 AISC-LRFD commentary에서는 프레임을 설계할 때 강재 보-기둥부재의 유효좌굴계수를 산정하기 위하여 소위 alignment chart를 추천하고 있다. 그러나 alignment chart법은 많은 기본가정을 전제하고 있기 때문에 실제 구조물에 적용할 경우 비경제적인 결과를 초래할 수 있으며, 작용하중에 대한 고려는 거의 무시된 채 대부분 부재의 강성비에 의해 결정되고 있는 것이 현실이다. 본 연구에서는 평면프레임요소의 접선강성행렬을 이용하여 전체 시스템의 좌굴고유치 해석을 수행하여 유효좌굴 길이를 산정하고, 각 설계규정에 제시된 기둥부재의 극한내하력 곡선으로부터 역으로 비선형 응력-변형도곡선을 얻을 수 있다는 점에 착안하여 개별부재의 접선계수이론(tan-

gent modulus theory)에 의한 비탄성좌굴 고유치 해석을 수행함으로써, 설계기준에 충실하면서 각 부재의 가장 최적화된 유효좌굴길이를 산정하는 방법을 제시하였다. 문헌의 결과와 비교하고, 매개변수 연구를 수행하여 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

1. 시스템 탄성좌굴해석법을 이용하여 개별부재의 유효좌굴 길이를 결정하는 경우에 동일한 축력을 받더라도 주목하는 부재의 상대적인 강성이 클수록, 유효좌굴길이계수 값이 커지는 경향을 보인다. 또한 상대적인 강성은 같더라도 압축력이 더 작은 부재의 유효좌굴길이계수 값이 커지는 경향을 나타내었다.
2. 시스템 비탄성좌굴해석법을 적용하는 경우에는 탄성좌굴 해석법의 경우보다 동일한 축력 하에서 상대적인 강성이 큰 부재 그리고 상대적인 강성이 같으면 압축력이 더 작은 부재의 유효좌굴길이계수 값이 커지는 경향이 더욱 두드러졌다.
3. 한편, alignment chart 및 기둥기둥효과를 고려하는 경우에 두 방법에 의한 유효좌굴길이계수 값의 차이는 크지 않았다. 그리고 본 연구의 방법과 비교하면 상대적인 강성이 큰 부재 그리고 상대적인 강성이 같으면 압축력이 더 작은 부재의 유효좌굴길이계수 값이 본 연구 방법의 결과가 상대적으로 더 크고 반대의 경우는 더 작아지는 결과를 보였다.
4. 결론적으로 탄성 좌굴해석을 이용하여 유효좌굴길이를 결정하는 본 연구의 방법을 사용하여 설계하면 설계를 지배하는 기둥부재의 유효좌굴길이 값이 더 작아지기 때문에 더 경제적이고 합리적인 설계가 가능한 것으로 판단된다. 뿐만 아니라 재료의 잔류응력, 초기부정 등의 비탄성 거동을 고려한 비탄성 좌굴해석법을 적용하면 압축력과 휨모멘트를 동시에 받는 강절프레임의 좌굴설계 시 더욱 효과적인 설계가 기대된다.

감사의 글

이 연구는 한국과학재단의 목적기초사업비(과제번호 : R01-2002-000-00265-0)와 교광설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

김문영, 장승필(1990) 전단변형을 고려한 평면뿔대 구조

- 물의 기하적인 비선형 해석, *대한토목학회논문집*, 10(1), pp.27~36
- 진만식, 경용수, 김문영(2004) 평면프레임의 좌굴설계를 위한 정확한 유효좌굴계수 산정, *대한토목학회논문집*, 24(3A), pp.509~506
- 한국도로교통협회(2000) 도로교설계기준
- American Institute of Steel Construction(2002) *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*, 2nd ed, Chicago. IL
- Aristizabal-Ochoa, J.D.(1994) K-factor for Columns in Any Type of Construction : Nonparadoxical Approach, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 120(4), pp.1272~1290
- Bathe, K.J.(1996) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall
- Bridge, R.Q., Fraser, D.J.(1987) Improved G-factor Method for Evaluating Effective Lengths of Columns, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 113(6), pp.1341~1356
- Chajes, A.(1974) *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall.
- Chen, W.F., Lui, E.M.(1987) *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier
- Cheong-Siat-Moy, F.(1986) K-factor paradox, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 112(8), pp.1747~1760
- Chu, K.H., Chow, H.L.(1969) Effective Column Length in Unsymmetrical Frames, Publication, *International Association of Bridge Structural Engineering*, 29(1)
- Duan, L., Chen, W.F.(1989) Effective Length for Columns in Unbraced Frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 115(1), pp.149~165
- Duan, L., King, W.S., Chen, W.F.(1993) K-Factor Equation to Alignment Charts for Column Design, *ACI Structural Journal*, 90(3), p.242
- Fukumoto, Y.(1997) *Structural Stability Design*, Pergamon
- Galambos, T.V.(1988) *Guide to Structural Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th.Ed., John Wiley and Sons, New York
- LeMessurier, W.J.(1977) A Practical Method of Second Order Analysis, Part 2-Rigid Frames, *Engineering Journal*, AISC, 2nd Qtr., pp.49~67
- Roddis, W.M.K., Hamid, H.A., Guo, C.Q. (1998) Factors for Unbraced Frames: Alignment Chart Accuracy for Practical Frame Variations, *Engineering Journal*, 35(3), pp.81~93
- Salmon, C.G., Johnson, J.E.(1996) *Steel Structures-Design and Behavior*, Harper Collins
- Yura, J.A.(1971) The Effective Length of Column in Unbraced Frames, *Engineering Journal*, AISC, 8(2), pp.49~67