탄성좌굴 고유치 및 2차 탄성해석법을 이용한 평면강절프레임의 개선된 좌굴설계법

An Improved Stability Design of Plane Frames using System Buckling and Second-order Elastic Analysis

김 문 영† 송 주 영* 경 용 수** 김 남 일***
Kim, Moon-Young Song, Ju-Young Kyung, Yong-Soo Kim, Nam-Il

(논문접수일 : 2004년 11월 22일 ; 심사종료일 : 2004년 4월 11일)

요 지

탄성좌굴 고유치해석을 이용한 유효좌굴길이 산정법과 2차 탄성해석기법을 이용하여 축력과 휨모멘트를 받는 강절프레임의 보-기둥부재에 대하여 개선된 좌굴설계법을 제안한다. 이를 위하여 먼저 안정함수를 이용하여 보-기둥요소의 접선강성행렬을 유도하고, 탄성좌굴 고유치해석을 이용한 유효좌굴길이 산정법을 고찰한다. 또한 강절프레임에 대하여 소위 P-Delta 효과를 고려하는 2차 해석법을 제시한다. 해석예제를 통하여 먼저 2차 탄성해석과 기하학적 비선형해석에 의한 결과를 비교하여 2차 해석의 정확성을 검증하고, 강절프레임에 대한 기존의 설계법과 본 연구의 개선된 좌굴설계법에 대한 수치결과를 비교, 검토를 행한다.

핵심용어 : 라멘, 좌굴해석, 유효좌굴길이, 보-기둥요소, 2차 탄성해석

Abstract

An improved stability design method for beam-columns of plane frames is proposed based on system buckling analysis and second-order elastic analysis. For this, the tangent stiffness matrix of beam-column elements is first derived using stability functions and a procedure for evaluating effective buckling lengths is reviewed using elastic system buckling analysis. And then the second-order analysis procedure is presented considering $P-\Delta$ effects and is compared with the closed-form solution through numerical examples. Design examples showing the validity of the proposed method are presented and their numerical results are compared with those obtained from the conventional stability design methods. Finally some useful conclusions are drawn.

keywords : *plane frame, buckling analysis, effective buckling length, beam-column element, second-order elastic analysis*

1. 서 론

축력과 휨모멘트를 동시에 받는 부재로 구성된 강절프레임을 설계하기 위해서는 원칙적으로 소성영역(plastic zone) 또는 소성힌지를 고려한 비탄성·비선형해석법을 적용하여 시스템 전체의 극한내하력을 산정하여야 한다. 그러나 이 방법은 재료적, 기하적 비선형 해석기법을 적용하여야 하기 때문에 해석자체도 복잡성을 내포하고, 비선형해석 기법이나 모델에 따라 해석결과가 달라질 수 있다. 뿐만 아니라 하중조합에 따라 매번 비선형해석을 수행해야하는 어려움이 따른다.

이러한 비선형해석법의 대안으로 *AISC-LRFD* 기준(2002)을 포함한 여러 설계기준에서는 시스템 안정성 검토를 생략하는 대신에 개별부재의 유효좌굴길이를 산정하여 압축부재의 내하력을 결정하고, $P-\delta$ 및 $P-\Delta$효과(그림 1 참조)를 고

† 책임저자·정회원·성균관대학교 토목환경공학과 교수
전화 : 031-290-7514 ; Fax : 031-290-7548
E-mail: kmye@skku.ac.kr
* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정
** 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정
*** 성균관대학교 토목환경공학과 박사후연구원·공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

려하는 부재안정성 식을 검토하는 설계법을 규정하고 있다.

유효좌굴길이는 구조시스템 전체가 탄성좌굴거동에 의한 붕괴 시 개별부재 내에 또는 부재 축을 가상으로 연장하여 휨모멘트가 영이 되는 유효한 부재길이를 의미하며, 구조시스템이 개별 부재에 미치는 영향을 정량적으로 나타낸 것이다. *AISC-LRFD* commentary(AISC, 1993)에서는 가로흔들이(side sway)를 허용하거나 이를 허용치 않는 프레임을 설계할 때, 강재 보-기둥부재의 유효좌굴계수(이후 "K-factor"사용)를 산정하기 위하여 소위 alignment chart를 추천하고 있다. 평면 프레임의 유효좌굴길이를 산정하기 위한 연구(Chu 등, 1969; Yura, 1971; LeMessurier, 1977; Cheong-Siat-Moy, 1986; Bridge 등, 1987; Galambos, 1988; Duan 등, 1989, 1993; Aristizabal-Ochoa, 1994; Charles 등, 1996)는 많은 연구자에 의해 수행되어 왔다. 그러나 평면프레임의 유효좌굴길이 산정을 위한 차트는 기본가정을 가지고 있어 이 가정에 어긋난 구조물의 경우에는 유효좌굴길이의 보정이 요구된다. 최근에 alignment chart 법의 대안으로 탄성좌굴 고유치해석 결과를 이용하여 개별부재의 유효좌굴길이를 산정하는 방법(Roddis 등, 1998; 진만식 등, 2004)을 제시한 바 있다.

한편, 축방향력에 의한 휨모멘트 증폭효과를 나타내는 $P-\delta$ 및 $P-\Delta$효과도 비교적 간단한 설계식을 통하여 1차 탄성해석에 의한 결과값을 적용할 수 있도록 고려하고 있으나, 이 경우에도 유효좌굴길이가 계산과정에서 요구되며 설계모멘트가 실제보다 과다한 값을 나타내어 비경제적인 설계로 이끌 수 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 축방향력 및 휨모멘트를 받는 보-기둥부재의 개선된 좌굴안정성 검토식을 제안하고자 한다. 이를 위하여 alignment chart를 사용하지 않고 축방향력 및 휨모멘트를 동시에 받는 강절프레임의 주요부재에 대하여 유효좌굴길이를 효과적으로 산정할 수 있는 탄성좌굴 고유치해석법에 기초한 유효좌굴길이 산정법과 $P-\delta$ 및 $P-\Delta$효과를 정확히 고려할 수 있는 2차 탄성해석법을 제시한다. 또한 해석예제를 통하여 이러한 개선된 설계법과 관용 설계법을 각각 적용하여 비교, 검토를 행한다.

2. 강절프레임의 현행 좌굴설계법

서론에서 언급한 바와 같이 각국 설계기준에서는 강절프레임 전체의 시스템 안정성 검토를 생략하는 대신에 개별부재의 유효좌굴길이를 산정하고 부재안정성을 검토하는 설계법을 규정하고 있다. 먼저 *AISC-LRFD*에서는 식 (1)을 사용하여 부재 안정성을 검토한다.

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n}+\frac{8}{9}\frac{M_u}{\phi_b M_n}\le 1 \qquad \text{for} \qquad \frac{P_u}{\phi_c P_n}\ge 0.2 \tag{1a}$$

$$\frac{P_u}{2\phi_c P_n}+\frac{M_u}{\phi_b M_n}\le 1 \qquad \text{for} \qquad \frac{P_u}{\phi_c P_n}< 0.2 \tag{1b}$$

여기서 ,P_u= 단면에 작용하는 축방향력; P_n= 공칭압축강도; M_u= 작용휨모멘트; M_n= 공칭휨강도; ϕ_c, ϕ_b = 저항계수이다. 이 경우에 압축강도 P_n은 alignment chart를 사용하여 유효좌굴길이를 결정하고 기둥의 내하력식으로부터 산출한다. 2차모멘트 M_u는 다음과 같이 $P-\delta$ 및 $P-\Delta$ 효과를 고려하여 산정하도록 규정하고 있다.

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \tag{2}$$

여기서, M_{nt} , M_{lt}는 각각 가로흔들이가 없는 경우와 이를 허용하는 경우에 대하여 주목하는 부재의 최대휨모멘트; B_1 , B_2는 각각 $P-\delta$ 및 $P-\Delta$ 효과의 증폭계수를 나타낸다. 즉, B_1 은 그림 1(a)에서 보는 바와 같이 양단이 이동하지 않는 전제하에 압축력에 의한 휨모멘트의 증폭효과를 표시한 것이며, B_2는 그림 1(b)에서 보는 바와 같이 양단이 강체회전으로 인하여 연직하중의 모멘트 증폭효과를 의미한다.

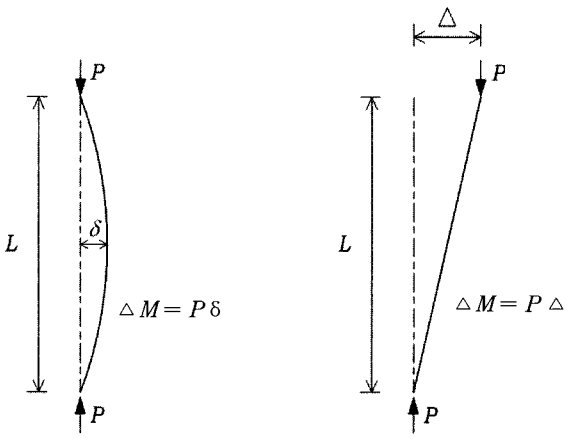
구체적인 계산은 식 (3)을 적용한다.

$$B_1 = \frac{C_m}{1-\dfrac{P_u}{P_{e1}}} \tag{3a}$$

$$B_2 = \frac{1}{1-\dfrac{\sum P_u}{\sum P_{e2}}} \tag{3b}$$

여기서, C_m=하중 및 경계조건에 따른 등가모멘트 계수 ; P_u=작용압축력; P_{e1}, P_{e2}=가로흔들이가 허용되지 않는 경우와 허용되는 경우에 휨변형 면내의 유효좌굴길이에 근거하여 산정되는 각각의 오일러하중이다. 이상 살펴본 바와 같이 *AISC-LRFD*기준에 근거한 보-기둥의 안정성검토 방법은 역학적 거동에 근거하여 합리적으로 제시되었다고 판단되지만 유효좌굴길이와 B_1 , B_2를 정확히 산정하는 것은 다소 경험적 판단을 요구하고 있다.

한편, 도로교설계기준(한국도로교통협회, 2000)에서는 축방향력과 휨모멘트를 동시에 받는 보-기둥부재에 대하여 아래와 같은 안정성검토를 요구하고 있다.



(a) $P-\delta$ 효과 (member effect)　　(b) $P-\Delta$ 효과 (frame effect)

그림 1 기둥부재의 P-delta 및 P-Delta 효과

$$\frac{f_c}{f_{caz}} + \frac{f_{bcy}}{f_{bagy}(1 - f_c/f_{Ey})} \leq 1 \tag{4a}$$

$$f_c + \frac{f_{bcy}}{(1 - f_c/f_{Ey})} \leq f_{cal} \tag{4b}$$

여기서, f_c=단면에 작용하는 축방향력에 의한 압축응력; f_{caz}=약축(z축) 방향의 허용압축응력; f_{bcy}=강축 둘레에 작용하는 휨모멘트에 의한 휨압축응력; f_{bagy}=국부좌굴을 고려하지 않은 강축(y축) 둘레의 허용휨압축응력; f_{Ey}=강축 둘레의 오일러 좌굴응력이다. 이때 응력 f_{caz}, f_{Ey}을 산정하기 위해서는 적절한 유효좌굴길이 산정이 필수적이다. 한편, 증폭계수 $1/(1-f_c/f_{Ey})$는 식 (3)과 비교할 때 C_m을 1.0으로 취한 것으로 보이지만, 양단의 휨모멘트가 선형적으로 변하는 경우에 C_m에 해당하는 비율로 허용휨압축응력을 증가시킬 수 있도록 규정하고 있기 때문에, 식 (4)는 $P-\delta$효과는 적절히 고려하고 있는 반면에 $P-\Delta$효과는 무시하고 있다.

3. 시스템좌굴해석법을 이용한 강절프레임의 개선된 좌굴설계법

개선된 좌굴설계법을 제시하기 위하여 먼저 3.1절에서 보-기둥요소의 접선강성행렬을 유도하며, 3.2절에서는 시스템좌굴해석을 이용한 유효좌굴길이 산정과 2차 탄성해석법을 각각 제시한다. 그리고 마지막으로 3.3절에서 수정된 좌굴설계법을 제시한다.

3.1 평면 보-기둥요소의 접선강성행렬

그림 2와 3은 부재좌표계에서 보-기둥요소의 변위 및 부재력벡터를 나타내며, 이들의 구체적인 정의는 다음과 같다.

$$u^T = < u^p, v^p, \omega^p, u^q, v^q, \omega^q > \tag{5a}$$

$$f^T = < f_1^p, f_2^p, m^p, f_1^q, f_2^q, m^q > \tag{5b}$$

또한 그림 2와 3에서 순수변형벡터 e와 이에 대응하는 단면력벡터 s는 각각 아래와 같이 정의한다.

$$e^T = < e, \theta_A, \theta_B > \tag{6a}$$

$$s^T = < P, M_A, M_B > \tag{6b}$$

그림 2와 3을 참조하면 정의된 네 개의 벡터들 사이에 보-기둥요소의 적합조건, 평형조건 그리고 힘-변형관계는 각각 식 (7), (8), (9)로 나타낼 수 있다(hen 등, 1987, 1997).

$$\begin{pmatrix} e \\ \Theta_A \\ \Theta_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^p \\ v^p \\ w^p \\ u^q \\ v^q \\ w^q \end{pmatrix} \tag{7}$$

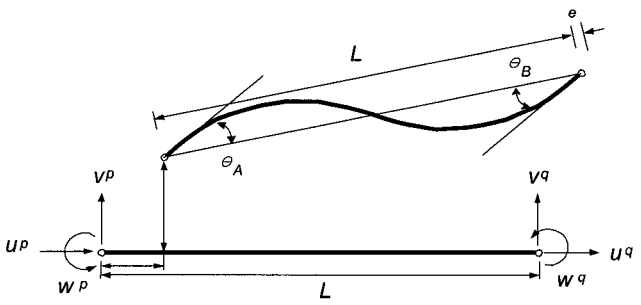


그림 2 보-기둥요소의 변위 및 순수변형벡터

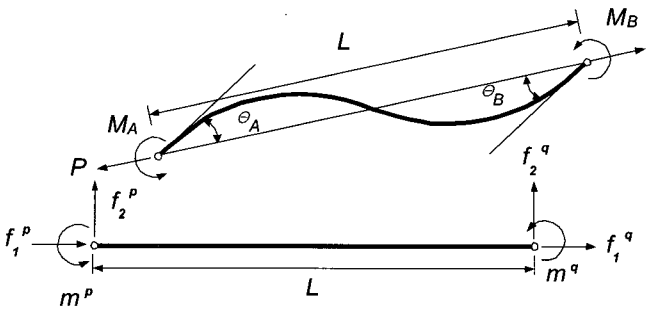


그림 3 보-기둥요소의 부재력 및 단면력벡터

$$\begin{pmatrix} f_1{}^p \\ f_2{}^p \\ m^p \\ f_1{}^q \\ f_2{}^q \\ m^q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & 4\phi_3 & 2\phi_4 \\ 0 & 2\phi_4 & 4\phi_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix} \tag{9}$$

여기서, 식 (9)의 ϕ_3, ϕ_4는 축방향력이 영이면 1이고 영이 아니면 그림 1(a)에 보이는 $P-\delta$효과를 고려하는 안정함수이다(표 1 참조). 아울러 식 (9)는 $P-\delta$효과를 고려한 평형방정식으로부터 엄밀하게 유도되었음을 강조할 필요가 있다. 이제 식 (9)를 식 (8)에 대입하고 다시 식 (7)을 대입하면, 다음과 같이 부재좌표계에서 보-기둥요소의 변위 및 부재력벡터 관계식을 얻을 수 있다.

$$f = k_1 u \tag{10a}$$

여기서,

$$\begin{pmatrix} f_1{}^p \\ f_2{}^p \\ m^p \\ f_1{}^q \\ f_2{}^q \\ m^q \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{2(4\phi_3+2\phi_4)}{L^2} & \frac{4\phi_3+2\phi_4}{L} & 0 & -\frac{2(4\phi_3+2\phi_4)}{L^2} & \frac{4\phi_3+2\phi_4}{L}\phi_2 \\ & & 4\phi_3 & 0 & -\frac{(4\phi_3+2\phi_4)}{L} & 2\phi_4 \\ & sym. & & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(4\phi_3+2\phi_4)}{L^2} & -\frac{(4\phi_3+2\phi_4)}{L} \\ & & & & & 4\phi_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^p \\ v^p \\ w^p \\ u^q \\ v^q \\ w^q \end{pmatrix} \tag{10b}$$

한편, 그림 1(b)의 $P-\Delta$효과를 고려하기 위하여 $\Delta = v^q - v^p$이므로 이에 대응하는 증폭모멘트는 $P\Delta$가 된다. 이는 다시 전단력으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$P\Delta = P(v^q - v^p) = f_2{}^p l \tag{11}$$

이를 힘-변위 관계식($f = k_2 u$)으로 나타내면 아래와 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} f_1{}^p \\ f_2{}^p \\ m^p \\ f_1{}^q \\ f_2{}^q \\ m^q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & P/L & 1 & 0 & -P/L & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & sym. & & & -P/L & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^p \\ v^p \\ w^p \\ u^q \\ v^q \\ w^q \end{pmatrix} \tag{12}$$

최종적으로 식 (10b)와 식 (12)를 더하면 아래와 같이 보-기둥요소의 최종 접선강성행렬을 얻는다.

$$f = k u \tag{13a}$$

여기서,

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ & & 4\phi_3 & 0 & \frac{6}{L}\phi_2 & 2\phi_4 \\ & & & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ & & & & & 4\phi_3 \end{bmatrix} \tag{13b}$$

이고, ϕ_i는 안정함수이며, 자세한 결과식은 표 1에 나타낸다. 표 1에 β가 영으로 접근함에 따라 안정함수 ϕ_i는 부정이 되므로 이 경우의 안정함수들을 β에 대한 Taylor 전개를 행하여 2차 항까지 고려하여 나타내었다. k는 평면 국부좌표계에서의 6×6 접선강성행렬을 구성한다. 이제 국부좌표계에서 계산된 강성행렬은 전체좌표계로 변환시킬 수 있고, 직접강도법에 의하여 전체 시스템에 대한 좌굴방정식을 얻을 수 있다.

표 1 안정함수(김문영 등, 1990, 1997)

$P > 0$	
$\beta \gg 0.01$	$0 < \beta < 1$
$\phi_1 = \frac{\beta^3 \cdot \sinh\beta}{12 \cdot \phi+}$ $\phi_2 = \frac{\beta^2 \cdot (\cosh\beta - 1)}{6 \cdot \phi+}$ $\phi_3 = \frac{\beta \cdot (\beta \cdot \cosh\beta - \sinh\beta)}{4 \cdot \phi+}$ $\phi_4 = \frac{\beta \cdot (\sinh\beta - \beta)}{2 \cdot \phi+}$	$\phi_1 = 1 + \beta^2/10$ $\phi_2 = 1 + \beta^2/60$ $\phi_3 = 1 + \beta^2/30$ $\phi_4 = 1 - \beta^2/10$
$P < 0$	
$\beta \gg 0.01$	$0 < \beta < 1$
$\phi_1 = \frac{\beta^3 \cdot \sin\beta}{12 \cdot \phi-}$ $\phi_2 = \frac{\beta^2 \cdot (1 - \cos\beta)}{6 \cdot \phi-}$ $\phi_3 = \frac{\beta \cdot (\sin\beta - \beta \cdot \cos\beta)}{4 \cdot \phi-}$ $\phi_4 = \frac{\beta \cdot (\beta - \sin\beta)}{2 \cdot \phi-}$	$\phi_1 = 1 - \beta^2/10$ $\phi_2 = 1 - \beta^2/60$ $\phi_3 = 1 - \beta^2/30$ $\phi_4 = 1 + \beta^2/60$

여기서, $\phi- = 2 - 2\cos\beta - \beta\sin\beta$, $\phi+ = 2 - 2\cosh\beta - \beta\sinh\beta$,
$\beta = L\sqrt{|F|/EI}$

이제까지 축력효과를 엄밀히 고려하는 안정함수를 이용하여 강성행렬을 유도하였으며, 이때 $P-\Delta$ 및 $P-\delta$효과가 명확히 고려되고 있음을 보였다. 한편, 많은 경우에 강절프레임의 좌굴해석에 *Hermitian* 다항식을 이용한 근사적인 접선강성행렬이 사용된다. 이 경우 비록 근사적인 강성행렬이어서 많은 수의 요소로 분할하여 모델링 하여야 하지만 탄성 강성행렬과 기하학적 강성행렬이 분리되어 있어서 일반적인 고유치 해법이 적용될 수 있는 장점이 있다. 이에 반하여 식 (13)을 사용하여 좌굴해석을 수행하는 경우는 엄밀하게 강성행렬이 유도되어서 기둥부재 당 1개의 요소로 모델링 하여도 정해를 얻을 수 있지만, 탄성 및 기하강성행렬이 결합되어 있어서 행렬식이 영이 되는 해석기법을 적용하여야 하는 어려움이 따른다.

Hermitian 다항식을 이용한 접선강성행렬은 식 (13)의 과정과 거의 동일한 과정을 거쳐서 유도될 수 있다. 이때 식 (7)과 식 (8)은 변함이 없지만 식 (9)가 다음과 같이 바뀌어야 한다. 즉,

$$\begin{pmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L}+\frac{2PL}{15} & \frac{2EI}{L}-\frac{PL}{30} \\ 0 & \frac{2EI}{L}-\frac{PL}{30} & \frac{4EI}{L}+\frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix} \tag{14}$$

이제 식 (13)과 식 (11)을 고려하면 최종 접선강성행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & -a_1 & \cdot & \cdot \\ & a_2 & b_1 & \cdot & -a_2 & b_1 \\ & & a_3 & \cdot & -b_1 & c_1 \\ & & & a_1 & \cdot & \cdot \\ & symm & & & a_2 & -b_1 \\ & & & & & a_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$a_1 = EA/L$, $a_2 = 6P/5L + 12EI/L^3$,

$a_3 = 2PL/15 + 4EI/L$, $b_1 = P/10 + 6EI/L^2$,

$c_1 = -PL/30 + 2EI/L$

여기서, EI = 휨강성; P = 축방향력

3.2 강절프레임의 시스템 탄성좌굴해석과 2차 탄성해석

본 절에서는 선형탄성(1차 탄성)해석으로 구한 강절프레임구조의 개별부재의 축방향력을 이용하여 탄성좌굴 고유치 해석 및 2차 탄성해석 과정을 간략히 제시한다.

가. 1차 탄성해석: 주어진 하중조합에 대하여 식 (16)을 이용한 선형해석을 수행하고 각 부재의 축방향력 P_i를 산정한다.

$$\boldsymbol{K}_e \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{16}$$

여기서 $\boldsymbol{K}_e$=직접강도법에 따른 각 요소의 강성행렬의 합 $(=\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_e^i)$으로 산정하는 시스템의 탄성강성행렬, $\boldsymbol{F}$=시스템 외력벡터, 그리고 $\boldsymbol{U}$=시스템 절점 변위벡터이다.

나. 시스템 좌굴해석: *Hermitian* 다항식을 형상함수로 이용하는 경우는 축방향력을 이용하여 식 (17)의 고유치 문제를 푼다.

$$\boldsymbol{K}_e \boldsymbol{D} = \lambda \boldsymbol{K}_g(P_i)\boldsymbol{D} \tag{17}$$

여기서, $\boldsymbol{K}_g$=시스템의 기하강성행렬로 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_g^i(\boldsymbol{P}_i)$; λ=좌굴파라미터 ; $\boldsymbol{D}$=변위벡터이다. 식 (17)은 시스템 행렬이 대칭인 고유치문제이므로 IMSL의 서브루틴을 이용하여 고유치 및 고유벡타를 구할 수 있다.

다. 시스템 좌굴해석: 안정함수를 이용하는 경우는 식 (18)의 비선형 고유치문제를 푼다.

$$\boldsymbol{K}_t(\lambda \boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{D} = 0 \tag{18}$$

여기서, $\boldsymbol{K}_t$=시스템의 접선강성행렬로 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_t^i(\boldsymbol{P}_i)$으로 산정한다. 식 (18)은 비선형 고유치문제이므로 일반적인 고유치 해석법은 적용하기 곤란하다. 본 연구에서는 구하고자 하는 첫 번째 고유치 λ_{cr}에서 식 (18)의 행렬식이 영이 되는 성질을 이용하였다. 다시 말해서, 구하고자 하는 정확한 첫 번째 고유치를 대입하였을 때 가우스 소거법으로 강성행렬 $\boldsymbol{K}_t(\lambda_{cr})$을 upper triangular matrix로 변환시키면, pivot 중 1개의 부호가 영이 되는 성질을 적용하였다. λ_{cr}이 결정되면 고유벡터는 penalty method를 적용하여 계산할 수 있다. 즉, 영이 아닌 특정 절점변위성분을 선택하여 이 변위 자유도에 해당하는 강성행렬의 대각성분과 하중벡터에 매우 큰 값을 더하고 가우스 소거법을 적용한다.

라. 유효좌굴길이 결정: 1차 해석 및 시스템 좌굴해석 결과로부터 각 부재의 축방향력 P_i과 고유치 λ_{cr}을 구한 후에 식 (19), (20)과 같이 i번째 부재의 좌굴하중 $P_{cr,i}$

과 유효좌굴길이 $L_{e,i}$를 얻을 수 있다.

$$P_{cr,i} = \lambda_{cr} P_i \tag{19}$$

$$L_{e,i} = K_i L_i = \pi \sqrt{\frac{E_i I_i}{P_{cr,i}}} \tag{20}$$

여기서, K_i는 i번째 부재의 유효좌굴계수이다.

마. 2차 탄성해석: 1차 해석결과로부터 각 부재의 축방향력 P_i가 결정되면, 이를 이용한 시스템 접선강성행렬과 외력에서 P_i효과를 제거한 하중벡터를 구성하여 아래와 같이 2차 탄성해석을 행하여 축압축력에 의하여 증폭된 휨모멘트를 산정한다.

$$\boldsymbol{K}_t(P_i)\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i^e \tag{21}$$

여기서, $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i^e$는 축력에 대응하는 등가절점하중으로 $\boldsymbol{P}_i^e = \{-P_i\cos\theta, -P\sin\theta, P_i\cos\theta, P_i\sin\theta\}^T$로 산정할 수 있다. 이때, θ 는 부재축이 전체좌표계와 이루는 사이각을 나타낸다.

3.3 강절프레임의 새로운 좌굴설계법

본 연구에서 새로이 제안하는 강절프레임의 개선된 좌굴설계법은 다음과 같다. 도로교 설계기준의 경우는 축방향력과 휨모멘트를 동시에 받는 보-기둥부재에 대하여 식 (4) 대신에 다음과 같이 수정된 좌굴안정성 검토식을 적용한다.

$$\frac{f_c}{f_{caz}} + \frac{f^*_{bcy}}{f_{bagy}} \le 1 \tag{22a}$$

$$f_c + f^*_{bcy} \le f_{cal} \tag{22b}$$

여기서, f_{caz}=시스템 탄성좌굴해석으로 산정한 유효좌굴길이에 대응하는 허용압축응력; f^*_{bcy}=2차 탄성해석에 의거하여 산정한 강축 둘레에 작용하는 휨모멘트에 의한 휨압축응력이다.

또한, *AISC-LRFD*의 경우는 식 (1) 대신에 다음의 수정식을 적용한다.

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} + \frac{8}{9}\frac{M^*_u}{\phi_b M_n} \le 1 \text{ for } \frac{P_u}{\phi_c P_n} \ge 0.2 \tag{23a}$$

$$\frac{P_u}{2\phi_c P_n} + \frac{M^*_u}{\phi_b M_n} \le 1 \text{ for } \frac{P_u}{\phi_c P_n} < 0.2 \tag{23b}$$

여기서, M^*_u=2차 탄성해석법을 이용하여 산정한 작용휨모멘트이다.

4. 수치해석 예

앞 절에서 제시된 해석방법을 이용하여 개선된 좌굴해석 프로그램을 개발하였으며, 이 프로그램의 타당성을 보이기 위하여, 강절프레임의 유효좌굴길이 산정예제를 통하여 본 연구결과와 앞선 연구자들의 결과를 비교하였다. 또한 횡하중을 받는 단순지지된 보-기둥부재의 2차 탄성해석을 수행하여 최대모멘트를 산정하고, 엄밀해와 설계기준에 의한 계산값과 비교하였다. 마지막으로 라멘에 대한 설계예를 통하여 도로교 설계기준 및 *AISC-LRFD* 기준에 제시된 좌굴안정성 검토식과 본 연구에서 제안한 검토식을 이용하여 각각의 결과값을 비교, 검토하였다.

4.1 탄성좌굴 고유치해석법을 이용한 강절프레임의 유효좌굴길이 산정

그림 4는 가로 흔들이가 있는 문형라멘을 나타내고 있으며, 각 기둥과 보는 H-450×200×9×14단면을 사용하였고, 단면제원은 표 2와 같으며, 기둥 간격과 높이는 10m이다. 표 3은 P_1/P_2의 값에 따른 기둥의 *K-factor* 변화를 나타낸 것으로 탄성좌굴 고유치해석에 의한 K-factor와 Aristizabal-Ochoa(1994) 및 Cheong-Siat-Moy(1986)의 값과 비교하였다. 표 3에서 보듯이 본 연구의 방법으로 구한 K-factor와 문헌의 값이 1%내외의 오차로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

표 2 사용단면 제원

사용단면	단면적(cm^2)	단면이차모멘트(cm^4)
H-450×200×9×14	96.76	33500

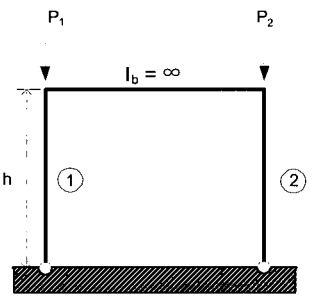


그림 4 문형라멘

표 3 각 기둥의 K-factor

P_1/P_2		본 연구	Aristizabal-Ochoa (1994)	Cheong-Siat-Moy(1986)
1.00	부재 ①	2.001	2.000	2.000
	부재 ②	2.001	2.000	2.000
0.25	부재 ①	3.174	3.150	3.140
	부재 ②	1.587	1.575	1.570
0.00	부재 ①	∞	∞	∞
	부재 ②	1.426	1.410	$\sqrt{2}$

4.2 단순지지 보-기둥부재의 2차 해석 검증예

그림 5는 집중하중이 작용하는 단순지지된 보-기둥구조물로서 H-450×200×9×14를 사용하였으며, L=10m이다. 그림 5에서는 집중하중이 작용하는 위치에 따라 발생하는 휨모멘트의 크기를 비교하기 위하여 하중 작용점의 위치를 달리하며 모멘트를 산정하였다.

표 4는 보-기둥부재에 대한 횡하중을 5t으로 고정하고 축하중 0.2P_{cr}과 0.5P_{cr}일 때, 본 연구방법으로 구한 최대모멘트를 축력효과를 무시했을 때와 축력에 의한 2차 효과를 고려한 이론적인 해법으로 구한 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 표 4에서 보는바와 같이 2차 증폭효과를 고려한 모멘트가 이론적인 방법과 비교하여 2%내외의 근사한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

표 4 집중하중의 작용위치에 따른 최대모멘트(*tonf-m*)

P/P_{cr}	a	1차 탄성해석	엄밀해	2차 탄성해석	AISC-LRFD
0.2	0.2	8.000	9.022	9.036	9.684
	0.5	12.500	15.059	15.086	16.250
0.5	0.2	8.000	11.891	12.207	10.400
	0.5	12.500	22.683	22.799	27.500

그림 6은 부재에 작용하는 축방향력이 일정할 때, 양단에 작용하는 모멘트비를 변화시켰을 경우, 부재에 발생하는 최대휨모멘트를 산정하였다. 이때, 양단의 모멘트가 선형적으로 변하므로 도로교설계기준(2000)에서 제시하고 있는 등가모멘트 계산식을 이용하여 최대모멘트를 산정하였으며, 본 연구와 비교하여 표 4에 나타내었다.

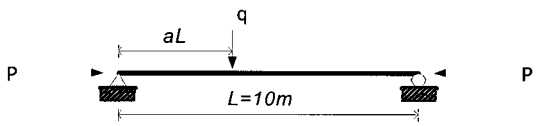


그림 5 단순지지된 보-기둥 부재

표 5 단부모멘트 비에 따른 최대휨모멘트(*tonf-m*)

P/P_{cr}	M_A/M_B	1차 탄성해석	Meq	엄밀해	2차 탄성해석	AISC-LRFD
0.2	-1.0	25.0	25.0	32.742	32.809	31.25
	-0.5	25.0	20.0	30.167 (26.193)	26.328	25.00
	0.0	25.0	15.0	25.352 (19.645)	25.041	18.75
0.5	-1.0	25.0	25.0	56.223	56.535	50.00
	-0.5	25.0	20.0	42.740 (44.978)	42.903	40.00
	0.0	25.0	15.0	31.385 (33.733)	31.544	30.00

표 5의 괄호 안의 값은 등가모멘트를 이용하여 구한 최대모멘트를 나타낸 것이다. 등가모멘트를 이용하여 구한 최대모멘트는 이론적인 방법에 의해 구한 결과보다 모멘트 증폭량이 과소평가되고 있음을 볼 수 있고, 본 연구의 방법과 비교했을 때에는 이론적인 방법에 의해 구해진 증폭효과가 다소 작게 나타나고 있음을 볼 수 있다. 각 경우의 최대모멘트는 M_A/M_B=1.0일때는 중앙단에서, 그 외의 경우에는 단부에서 발생하고 있다.

4.3 강절프레임의 2차 탄성해석예 : 도로교설계기준과 비교

그림 7은 문형라멘에 횡하중과 수직하중, 그리고 보 부재 중앙에 수직하중이 작용하는 구조물을 나타내고 있다. 횡하중에 의해 기둥에 발생하는 휨모멘트의 변화를 알아보기 위하여 수직하중과 같은 크기의 횡하중을 작용시켰으며, 보 부재 중앙에는 절점에 작용하는 하중의 1/2의 비율로 작용한다.

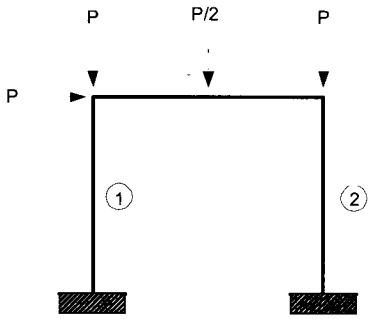


그림 7 횡하중과 수직하중이 작용하는 문형라멘

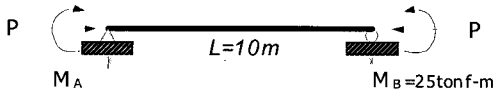


그림 6 양단에 모멘트가 작용하는 보-기둥 부재

기둥의 양단에서 발생하는 모멘트는 선형적으로 변하고 있으므로 등가휨모멘트 M_{eq}를 산정하고, 이를 이용해 구한 모멘트와 2차 탄성해석에 의한 최대휨모멘트를 표 6에 비교하여 나타내었다.

표 6 작용하중에 따른 최대 휨모멘트 비교(*tonf-m*)

P(*tonf*)	도로교설계기준에 따른 등가모멘트		등가모멘트에 의한 증폭된 최대모멘트		2차 탄성해석에 의한 최대모멘트	
	①	②	①	②	①	②
200.0	199.162	242.046	216.111	262.533	228.310	260.610
300.0	311.392	374.890	352.492	424.101	356.420	403.910
500.0	566.698	668.390	699.715	824.400	647.560	722.550

표 6에서 보듯이 하중이 증가함에 따라 각 기둥은 모멘트 증폭효과를 가지며, 이때 횡하중의 영향으로 인하여 기둥②에서 상대적으로 큰 축하중의 영향을 받는다. 이로 인하여 기둥 ②가 전체 시스템의 붕괴를 지배하는 부분이 되며, 도로교설계기준의 등가모멘트에 의해 구한 증폭된 최대 휨모멘트보다 2차 탄성해석에 의해 구한 최대휨모멘트가 작게 산정되고 있음을 볼 수 있다.

그림 8은 그림 7을 확장시킨 3층의 평면 뼈대구조물이다. 보 및 기둥의 사용제원은 H-450×200×9×14이며, 각 상부 절점에 작용하는 수직하중은 P이고, 측면에 작용하는 수평하중은 수직하중의 1/2을 작용시켜 이때 작용하는 도로교설계기준에 따른 모멘트 증폭효과와 본 연구에 의한 결과를 표 7에 나타내었다. A열은 도로교설계기준(한국도로교통협회, 2000)에 따라 유효좌굴길이와 증폭효과가 고려된 최대모멘트이며, B열은 유효좌굴길이 산정시 본 연구방법을 이용하였으며, 증폭모멘트 계산은 도로교설계기준에 의해 계산된 결과이다. C열은 탄성좌굴 고유치해석을 이용한 본 연구의 방법으로 유효좌굴길이를 산정하고 이를 이용하여 2차 탄성해석을 수행하여 계산한 증폭모멘트를 보여주고 있다.

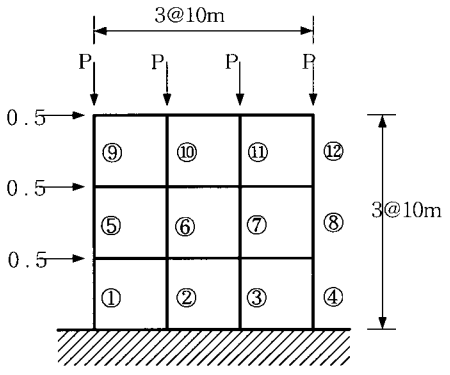


그림 8 수평, 수직하중이 작용하는 3층 평면 뼈대구조

표 7 2차효과에 의한 증폭된 모멘트 비교(*tonf-m*)

기둥	등가모멘트	A	B	C
①	97.183	99.333	112.842	114.320
②	117.572	144.537	135.340	128.420
③	117.624	136.023	136.215	128.990
④	93.812	134.285	108.182	110.890
⑤	55.367	64.997	63.986	61.579
⑥	91.192	125.824	105.037	94.189
⑦	91.412	120.245	105.757	94.278
⑧	55.509	88.041	64.029	61.192
⑨	27.479	35.567	31.722	34.135
⑩	48.400	65.907	55.801	53.130
⑪	48.528	64.968	56.067	53.139
⑫	27.857	39.352	32.137	34.222

표 8에서 보면, 전체적으로 A가 B, C에 비해 큰 모멘트가 발생됨을 알 수 있었으며, B의 경우가 A에 비해 다소 작은 모멘트가 계산된 이유는 증폭된 모멘트효과를 고려하고 있는 $1/(1-P/P_E)$의 P_E에 상당한 안전율이 포함된 유효좌굴길이가 도입됨으로서 더욱 과다한 증폭효과를 나타내고 있는 것으로 판단된다.

4.4 강절프레임의 2차 탄성해석예: LRFD 설계기준과 비교

그림 7은 수직하중과 수평하중을 동시에 받고 있는 2-bay 문형라멘을 나타내고 있다. 본 예제에 사용된 단위계는 US단위계를 사용하였고, *AISC-LRFD* 설계법에 의해 모멘트 증폭계수 B_1, B_2를 구한 후, 이를 이용하여 계산한 최대모멘트(Salmon, 등 1996)와 2차해석을 고려한 본 연구방법의 결과를 비교하여 표 9에 나타내었다. 비교대상은 기둥부재 ③와 보 부재 ④이다.

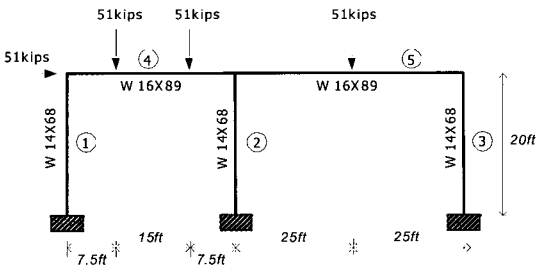


그림 9 가로흔들이가 있는 2-bay 문형라멘

표 8 AISC-LRFD 기준에 의한 최대모멘트와의 비교(kips-in)

기둥	LRFD(Salmon and Johnson)		2차 해석
③	상단	3475.675	3571.200
	하단	3066..225	3067.500
④	5739.700		5667.000

표 8에서 보듯이 국내의 도로교 설계기준(한국도로교통협회, 2000)과는 달리 *AISC-LRFD* 설계법에 의해 계산된 최대모멘트는 본 연구방법에 의해 계산한 최대모멘트와 상당히 근사적인 값을 가지고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

현재까지 평면 프레임에 대한 유효좌굴계수의 산정에 대해서는 많은 연구자들에 의해 연구가 진행되었으며, 이러한 연구결과를 반영하여 *AISC-LRFD* commentary에서는 프레임을 설계할 때 강재 보-기둥부재의 유효좌굴계수를 산정하기 위하여 소위 alignment chart를 추천하고 있으며, 도로교설계기준(2000)에서는 트러스 및 프레임 구조물에서 압축부재의 좌굴설계시 유효좌굴계수 산정에 대한 규정을 두고 있다. 또한 압축력과 휨모멘트를 동시에 받는 부재에 대하여 *P-Delta*를 고려하는 간단한 부재 안정성 검토식을 사용하고 있다. 그러나 alignment chart의 경우 많은 가정이 도입되어 있어 실제 구조물 적용에는 큰 어려움이 따르고 도로교설계기준의 부재안정성 검토식은 *P-Delta* 효과를 과다평가하고 있어 비경제적 설계가 이루어지고 있는 실정이다. 본 연구에서는 평면프레임요소의 접선강성행렬을 이용한 좌굴고유치해석을 통해 유효좌굴길이를 산정하고, 동시에 2차해석을 통해 *P-Delta* 효과로 증폭된 모멘트를 산정하는 간단하면서 정확한 수치해석법을 제시하였다. 이렇게 산정된 증폭된 모멘트는 압축력과 휨모멘트를 동시에 받는 교량의 주요부재의 좌굴설계 및 내하력 평가에 적용되어 좀 더 경제적인 설계가 이루어질 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

이 연구는 한국과학재단의 목적기초사업비(과제번호 : R01-2002-000-00265-0)와 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

김문영, 장승필(1990) 전단변형을 고려한 평면뼈대 구조물의 기하적인 비선형 해석, *대한토목학회논문집*, 10(1), pp.27~36

김문영, 안성원(1997) 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석, *한국전산구조공학회 논문집*, 10(1), pp.201~211

진만식, 경용수, 김문영(2004) 평면프레임의 좌굴설계를 위한 정확한 유효좌굴계수 산정, *대한토목학회논문집*, 24(3A), pp.509~506

한국도로교통협회(2000) 도로교설계기준

American Institute of Steel Construction(2002) *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*, 2nd ed, Chicago. IL

Aristizabal-Ochoa, J.D.(1994) K-factor for Columns in Any Type of Construction : Nonparadoxical Apporach, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 120(4), pp.1272~1290

Bridge, R.Q., Fraser, D.J.(1987) Improved G-factor Method for Evaluating Effective Lengths of Columns, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 113(6), pp.1341~1356

Chen, W.F., Lui, E.M.(1987) *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier

Chen., W.F., Kim, S.E.(1997) *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*, CRC Press, p.4450

Cheong-Siat-Moy, F.(1986) K-factor paradox, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 112(8), pp.1747~1760

Chu, K.H., Chow, H.L.(1969) Effective Column Length in Unsymmetrical Frames, *Publication, International Association of Bridge Structural Engineering*, 29(1)

Duan, L., Chen, W.F.(1989) Effective Length for Columns in Unbraced Frames, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 115(1), pp.149~165

Duan, L., King, W.S., Chen, W.F.(1993) K-Factor Equation to Alignment Charts for Column Design, *ACI Structural Journal*, 90(3), p.242

Galambos, T.V.(1988) *Guide to Structural Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th.Ed., John Wiley and Sons, New York

LeMessurier, W.J.(1977) A Practical Method of Second Order Analysis, Part 2-Rigid Frames,

Engineering Journal, AISC, 2nd Qtr., pp.49~67

Roddis, W.M.K., Hamid, H.A., Guo, C.Q. (1998) Factors for Unbraced Frames: Alignment Chart Accuracy for Practical Frame Variations, *Engineering Journal*, 35(3), pp.81~93

Salmon, C.G., Johnson, J.E.(1996) Steel Structures-Design and Behavior, Harper Collins

Yura, J.A.(1971) The Effective Length of Column in Unbraced Frames, *Engineering Journal, AISC*, 8(2), pp.49~67