개선된 소영역분할법을 이용한 탄성지반위에 놓인 평판의 해석

An Analysis of Plate on the Elastic Half-Space by Using the Improved Subsection Method

한 충 목†
Han, Choong-Mok
(논문접수일 : 2004년 9월 10일 ; 심사종료일 : 2005년 4월 26일)

요 지

탄성지반위에 놓여진 평판은 일반적으로 유한요소법을 이용하여 해석할 수 있다. 그러나 Boussinesq의 이론에 근거한 지반의 유연도 행렬을 계산하는 것에 약간의 어려움이 있다. 본 연구에서는 원형 면적에 등분포하는 하중으로 인해 발생하는 수직 처짐에 대한 해석 결과를 이용하는 효과적인 수치해석과정을 제시한다. 예제를 통하여 수치적분기법에 의한 결과 또는 소영역분할기법에 의한 방법보다 개선된 결과가 얻어짐을 제시한다.

핵심용어 : 상호작용, 탄성지반, 평판

Abstract

A Plate on the elastic half-space may be generally be analyzed by the finite element method. However, there are some difficulties to obtain the flexibility matrix of the foundation based on the Boussinesq's theory. In this study, an efficient numerical procedure which uses the analysis results of the vertical displacements due to the uniformly distributed loading in a circular area is presented. Some numerical examples represent better results than those of numerical integration technique or subsection method especially in the case of irregular mesh pattern.

keywords : *interaction, elastic half-space, plate*

1. 서 론

지반과 그 위에 놓인 평판의 상호작용을 해석하기 위해서는 지반의 성질이 정당하게 고려되어야 한다. 일반적으로 자연발생적인 지반은 비선형, 비가역성이며 시간 종속적인 응력-변형률 관계를 가진다. 그리고 비등방이며 비균질의 재료특성을 나타낸다. 그러므로 지반의 이러한 모든 성질들을 고려하여 상호작용 문제를 해결하려는 것은 매우 힘든 일이다. 지반과 구조물의 상호작용을 해석하는 과정에서 발생하는 이러한 어려움을 극복함과 동시에 의미있고 신뢰할 수 있는 결과를 얻어내기 위해서는 지반의 거동을 현실에 비교적 가깝게 이상화할 필요가 있다.

지반을 이상화한 가장 간단한 모델은 1867년 Winker가 제안한 모델이다. 그 이후로 1885년에 Boussinesq가 그의 논문에서 경계면에 수직한 집중하중을 받는 반무한 탄성체의 문제를 해결함으로 인해 지반을 연속체로 이상화하려는 시도가 이루어졌다. 최근에 와서는 비선형 해석 및 시간 종속적 재료의 특성에 대한 거동의 규명문제로까지 확대 되어가고 있다.

본 연구에서는 판과 지반의 분리가 없다는 가정 하에서 접촉응력을 해석하고 지반의 접촉압력을 먼저 구한 후 판과 지반의 접촉점 변위를 구하여 판의 모든 요소변위를 확정하는 방법을 택하였다. 해석과정 중 지반의 유연도 행렬 구성 방법은 크게 Gauss 수치해석 방법과 소영역 분할법 그리고 등분포 하중이 작용하는 축대칭 원판에 대한 수치해석 결과를 이용하는 개선된 소영역분할법을 적용하여 그 결과를 비교하였다.

† 책임저자, 정회원 · 울산과학대학 공간디자인학부 부교수
전화 : 052-230-0634 ; Fax: 052-234-9300
E-mail : cmhan@mail.uc.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

2. 판의 유한요소 정식화

임의의 곡선 경계를 가지는 평판의 해석을 용이하게 하기 위해 그림 1과 같은 8절점 등매개변수 평판 요소를 사용하였다.

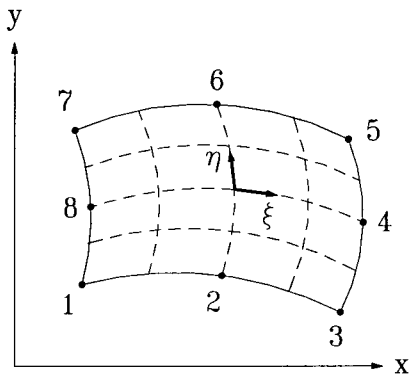


그림 1 8-절점 등매개변수 요소

요소에 대해 자연 좌표계(ξ, η)를 설정하였으며, 자연 좌표계(ξ, η)의 값은 -1로부터 +1사이의 값을 갖게 된다. 그리고 자연 좌표계와 전체 좌표계 사이의 변환을 정의하는 함수인 형상함수(shape function) 또는 보간함수(interpolation function)는 여러 참고문헌에서 찾아볼 수 있다.

요소강성도 행렬은 최소포텐셜 에너지 원리를 이용하는 방법, 가상일의 원리를 이용하는 방법 등으로 구할 수 있다. 잘 알려져 있는 바와 같이, 요소 강도 행렬 $\boldsymbol{K}^{(e)}$ 는 식 (1)과 같다.

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}_i^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_j\, t\, \det \boldsymbol{J}\, d\xi d\eta \qquad (1)$$

여기서,

$\boldsymbol{B}$: 변형률행렬

$\boldsymbol{D}$: 탄성행렬

t : 요소의 두께

$\boldsymbol{J}$: Jacobian행렬

식 (1)에는 자연 좌표계(ξ, η)에 관한 적분이 포함되어 있으며, 이 적분이 매우 복잡하기 때문에 보통의 경우 수치적분법으로 구하게 되며, Gauss-Legendre 구적법을 많이 사용한다.

요소 강성도 행렬은 절점에서 변위의 연속조건을 고려하여 평형방정식을 세우기 위해서 공통의 전체 좌표계로 변환이 필요하며, 좌표변환 후에 전 요소에 대하여 조합하면 강성도 행렬 $\boldsymbol{K}$를 구할 수 있다. 외부 절점하중도 전체 좌표계에 대하여 구성하여 $\boldsymbol{F}$라 할 때 식 (2)와 같은 평형방정식이 세워진다.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\delta \qquad (2)$$

여기서,

δ : 절점 변위도

3. 지반의 유한요소정식화

3.1 반무한 탄성체 지반에 대한 Boussinesq의 해

Boussinesq는 반무한 탄성체의 표면에 작용하는 하나의 집중하중에 의한 임의점 j에서의 표면 변위를 다음 식으로 구하였다.

$$w_{ji} = \frac{(1-\nu_s^2)P_i}{\pi E_s d_{ij}} \qquad (3)$$

여기서,

P_i : 작용하중

ν_s : 지반의 Poisson비

d_{ij} : 하중작용점에서 임의점 j까지의 거리

E_s : 지반의 탄성계수

여기서, Boussinesq는 지반을 탄성, 균질 및 등방성이라고 가정하였으며, 응력과 변형률은 Hooke의 법칙을 따르고 변형은 미소하다고 가정하였다. 이러한 가정은 실제적인 조건들을 이상화한 것이지만 물리적으로는 판의 연단부근 교란 분포반력을 표현해낼 수 있다는 장점을 가지고 있다.

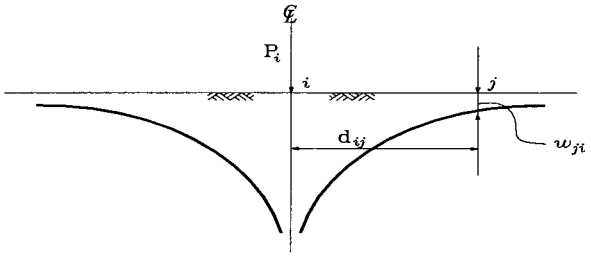


그림 2 집중하중에 의한 반무한 탄성체의 표면의 변위

3.2 축대칭 등분포하중이 지표면에 직접 작용하는 지반의 변위

식 (3)을 이용하면 반무한 탄성체에 작용하는 축대칭 등분포하중 q에 의한 임의점 j에서의 변위를 다음과 같이 계산할 수 있다.

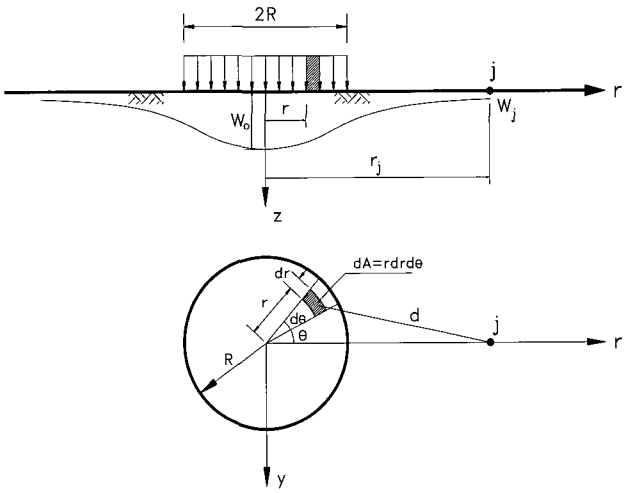


그림 3 축대칭하중에 의한 반무한 탄성체의 표면의 변위

그림 3을 참고하고 식 (3)을 이용하면 미소영역 dA에 작용하는 하중 $qrdrd\theta$에 의한 임의점 j에서의 수직방향 변위는 다음과 같이 나타내어진다.

$$dw_j = \frac{(1-\nu_s^2)\,qr\,dr\,d\theta}{\pi E_s d} \tag{4}$$

따라서, 원영역에 작용하는 축대칭 등분포하중에 의한 임의점 j에서의 지반 변위는 식 (4)를 적분하여 다음과 같이 얻어진다.

$$w_j = 2\alpha q \int_0^{\pi}\int_0^{R} I(r,\theta)\,dr\,d\theta \tag{5}$$

여기서,

$$\alpha = \frac{1-\nu_s^2}{\pi E_s}$$

$$I(r,\theta) = \frac{r}{\sqrt{r^2+r_j^2-2rr_j\cos\theta}}$$

식 (5)에서 r방향 적분을 먼저 수행하면 아래와 같다.

$$w_j = 2\alpha q \int_0^{\pi}\int_0^{R} I(r,\theta)\,dr\,d\theta = 2\alpha q \int_0^{\pi} I_1(\theta)\,d\theta \tag{6}$$

여기서,

$$I_1(\theta) = \sqrt{R^2+r_j^2-2Rr_j\cos\theta} - r_j + r_j\cos\theta\,\ln\left|(R-r_j\cos\theta)/(r_j\sin\theta) + \sqrt{(R-r_j\cos\theta)^2/(r_j\sin\theta)^2+1}\right|\cot\theta+\mathrm{cosec}\theta\,|$$

식 (6)에서 반경방향(r)에 대하여 해석적분이 가능하나 원주방향(θ)에 대해서는 해석적분이 불가능하여 수치적분을 수행하였다. .수치적분은 재하 반경 R과 변위를 알고자 하는 위치 r_j가 달라질 때마다 반복 수행해야 하는 불편이 있다. 이러한 불편을 없애기 위하여 지표변위 w_j를 지반상의 임의점 j까지의 거리 r_j와 R과의 비인 $e_j\,(=r_j/R)$의 함수로 무차원화한 함수 $F(\theta)$를 이용하여 다음 식과 같이 나타내었다.

$$w_j = 2\alpha q \int_0^{\pi} I_1(\theta)\,d\theta = 2w_j = 2R\alpha q \int_0^{\pi} F(\theta)\,d\theta \tag{7}$$

여기서,

$$I_1(\theta) = F(\theta)\,R$$

$$F(\theta) = \sqrt{1+e_j^2-2e_j\cos\theta} - e_j + e_j\cos\theta\,\ln\left|(1-e_j\cos\theta)/(e_j\sin\theta) + \sqrt{(1-e_j\cos\theta)^2/(e_j\sin\theta)^2+1}\right|\cot\theta+\mathrm{cosec}\theta|$$

식 (7)의 적분은 무차원 함수 $F(\theta)$의 수치적분으로서 다음과 같이 수행된다.

$$w_j = 2R\alpha\, q \int_0^{\pi} F(\theta)\,d\theta = 2R\alpha\, q\, f(e_j) \tag{8}$$

식 (8)의 수치적분을 수행하면, 그 결과는 그림 4와 같다.

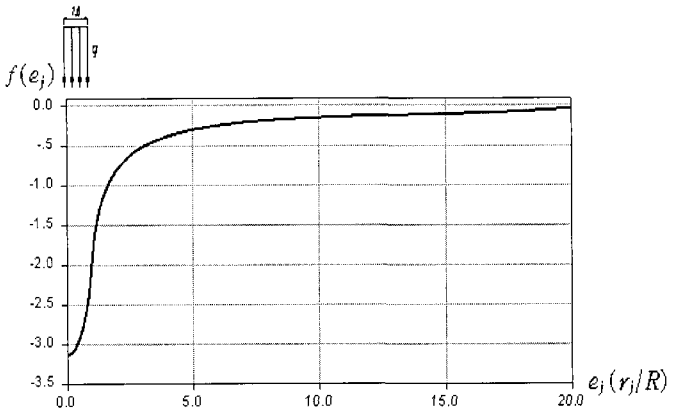


그림 4 수치적분의 결과

3.3 사각형 영역에 작용하는 분포하중에 의한 지반 변위

미소면적 dA에 작용하는 분포하중 q_i에 의한 임의점 j의 변위는 축대칭 등분포하중이 작용할 경우를 참고하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dw_{ji} = \frac{(1-\nu_s{}^2)}{\pi E_s} \frac{q_i\, dA}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \tag{9}$$

식 (9)를 참고하면 한 영역(e) 내에서 그 영역내의 분포하중에 의한 임의점 j의 수직 변위는 다음과 같은 적분으로 주어진다.

$$w_j = \alpha \int_{A^{(e)}} \frac{q(x,y)\, dA}{\sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2}} \tag{10}$$

3.3.1 수치해석에 의한 방법

식 (10)의 적분을 구체적으로 생각하면 아래와 같다. 상부 평판 요소로부터 지반에 주어지는 분포반력의 강도를 평판에 관한 8절점 등매개변수 요소의 경우와 동일하게 요소 절점강도로부터 보간하면 다음과 같다.

저판의 한 요소 (e)영역에 작용하는 분포 반력에 의한 j점의 변위는 다음과 같은 적분으로 주어진다.

$$w_j^{(e)} = \alpha \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{N\, q^{(e)} \det J\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x_j - \sum N_i x_i)^2 + (y_j - \sum N_i y_i)^2}} \tag{11}$$

여기서,

N_i : 8절점 등매개변수 요소의 형상함수

식 (11)의 적분은 먼저 하중이 작용하는 한 요소 영역이 임의 형상이고, 또 하중 분포가 일정하지 않는 경우를 생각하여야 하므로 수치적분에 의존하지 않을 수 없다.

3.3.2 소영역분할법에 의한 방법

임의의 함수 $f(x)$의 Gauss적분 과정을 살펴보자. Gauss 적분점 x_i에서의 함수 값을 $f(x_i)$라 하면,

$$F = \sum_i f(x_i)\, W_i \tag{12}$$

여기서,

F : 적분값

W_i : 적분점 i에서의 가중치

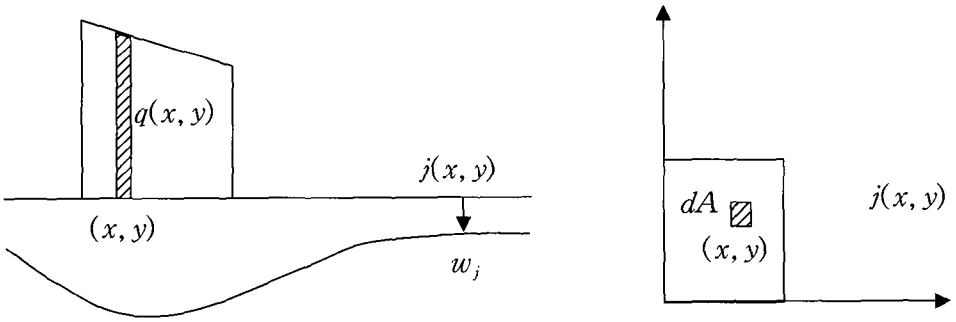
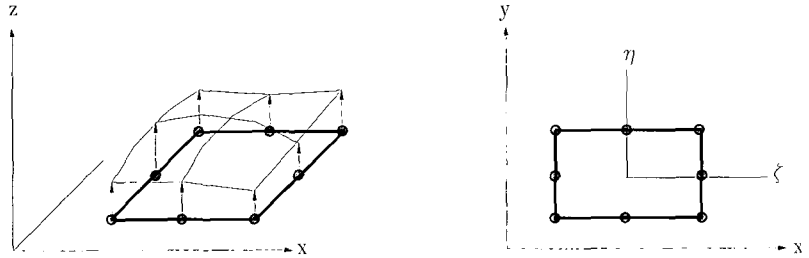


그림 5 반무한 탄성체에 작용한 분포하중



(a) 분포반력 (b) 좌표계

그림 6 요소에서의 분포반력

3점 적분을 수행하는 경우, 이 식을 그림으로 표현해 보면 그림 7과 같다. Gauss적분점 i에서의 함수값 $f(x_i)$가 그 Gauss적분점의 가중치에 대응하는 넓이에 등분포하고 있는 경우라고 생각할 수 있다.

이러한 가정하에서 3점 Gauss적분을 수행할 직사각형판에서 한 Gauss 적분점에서 함수값이 일정하게 분포하는 영역은 그림 8과 같이 생각할 수 있다. 그러므로 하나의 요소에 대응하는 반무한 탄성체 경계상의 면적을 9개의 소영역으로 분할하여 각 소영역 내의 접촉압력이 그 소영역 내의 Gauss적분점에서의 접촉압력 q_G로서 일정하다고 가정할 수 있다. 이상의 가정을 사용하여 접촉반력을 상수값으로 만드는 것이 가능해 졌다.

식 10에 이 가정을 도입하여 다시 쓰면 다음과 같고, 이 식들은 해석적으로 적분이 가능하다.

$$w_j^{(e)} = \alpha \left[q_{G1} \int_{A_{G1}} \frac{dA_{G1}}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} + q_{G2} \int_{A_{G2}} \frac{dA_{G2}}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} + \cdots + q_{G9} \int_{A_{G9}} \frac{dA_{G9}}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \right] \quad (13)$$

3.3.3 개선된 소영역분할법(축대칭 원형판의 해석결과를 이용한 소영역 분할방법)

앞의 식 (13)에서 만일 적분영역이 직사각형이 아니라면 해석적인 적분이 불가능하게 되어 소영역분할법을 사용하여 계산하면 잘못된 결과를 얻게 되므로 수치적분이 필요하게 된다. 그러므로 여기서 소영역을 더욱 작은 세부영역으로 다시 나누어서 각각의 세부영역을 원형등가영역으로 바꾼 다음 축대칭원판의 해석결과를 이용하는 근사적인 방법을 사용하기로 한다.

그림 9에서와 같이 하나 하나의 요소에 대하여 우선 가우스 적분점의 개수만큼 소영역을 나누고, 나누어진 소영역을 더욱 작은 세부 영역으로 다시 나누어서 각각의 세부영역을 원형등가영역으로 바꾼다. 3.2절에서 설명되어진 축대칭 등분포하중에 의한 지반변위 계산식인 식 (8)을 이용하여 세부영역인 원형등가영역에 작용하는 원형등가 등분포 하중에 의한 임의점의 변위를 계산하고 모든 세부영역의 결과를 더하여 식 (13)의 적분 결과로 대치한다.

4. 지반의 강성도 행렬

지반의 유연도 행렬로부터 저판의 분포반력에 의한 모든 절점에서의 수직변위는 다음 식과 같이 표현될 수 있다.

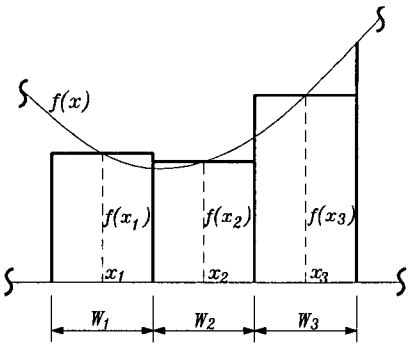


그림 7 Gauss 수치적분

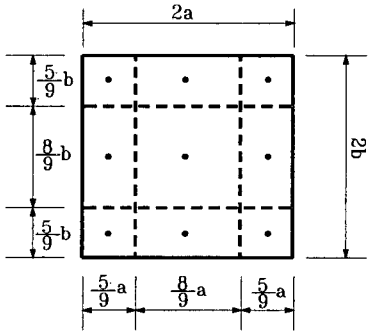


그림 8 Guass 점의 영향면적

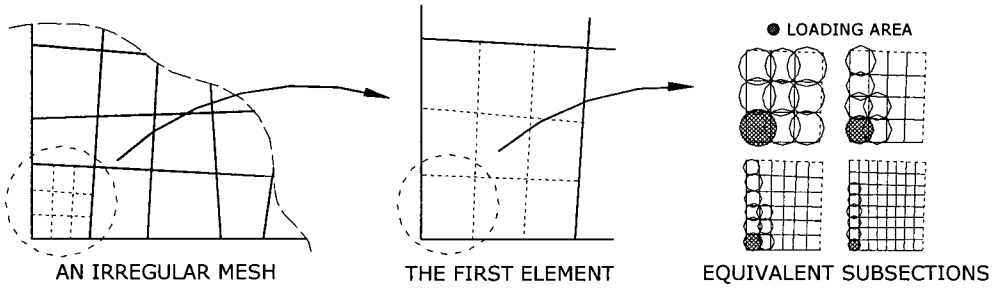


그림 9 평판의 비정규 요소분할과 요소 소영역에서의 등가하중

$$w = Gq \tag{14}$$

그리고 판과 지반의 접촉절점의 변위 w 를 안다면 그 절점상의 하중강도는 유연도 행렬식 인 식 (14)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$q = G^{-1}w \tag{15}$$

따라서, 구조계 전체의 강성도 방정식은 판에 작용하는 외력과 반력의 평형을 고려하여 다음의 방정식이 얻어진다.

$$P - Q = K_s U$$

또는, $$P = K_s U + K_h w \tag{16}$$

위 식에서 지반의 수직변위 w 를 전체계의 변위 U 속에 포함시키면 상·하 전체계 즉, 전체 상호작용 계의 강성도 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = [K_s + K_h] U$$

또는, $$P = KU \tag{17}$$

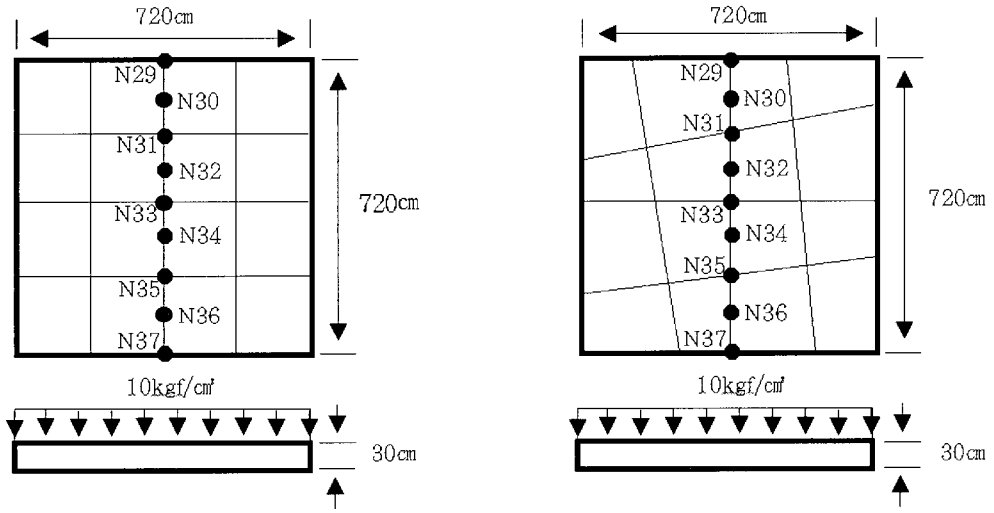
5. 계산예

5.1 탄성지반 위에 놓인 사각형판의 계산예

표 1에 제시한 것과 같은 재료성질과 크기를 가지는 탄성지반위에 놓인 평판을 해석하였다. 하중은 전체 평판 영역에 등분포로 작용한다.

표 1 계산예의 재료 성질과 크기

	크 기	두 께	탄성계수	포아슨비
평판	720×720cm	30cm	2.0 x 105kgf/cm²	0.17
지반			500kgf/cm²	0.30



(a) Regular mesh (b) Irregular mesh

그림 10 반무한 탄성체위의 평판

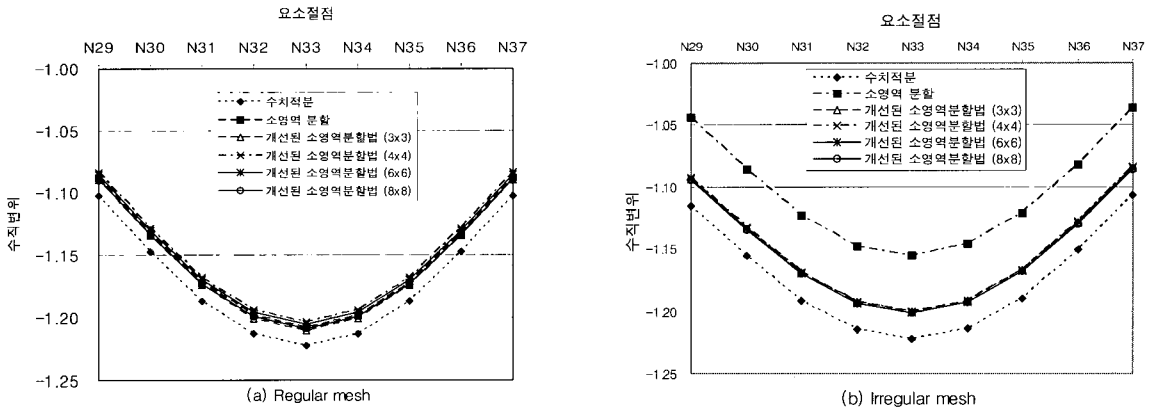


그림 11 절점의 변위값

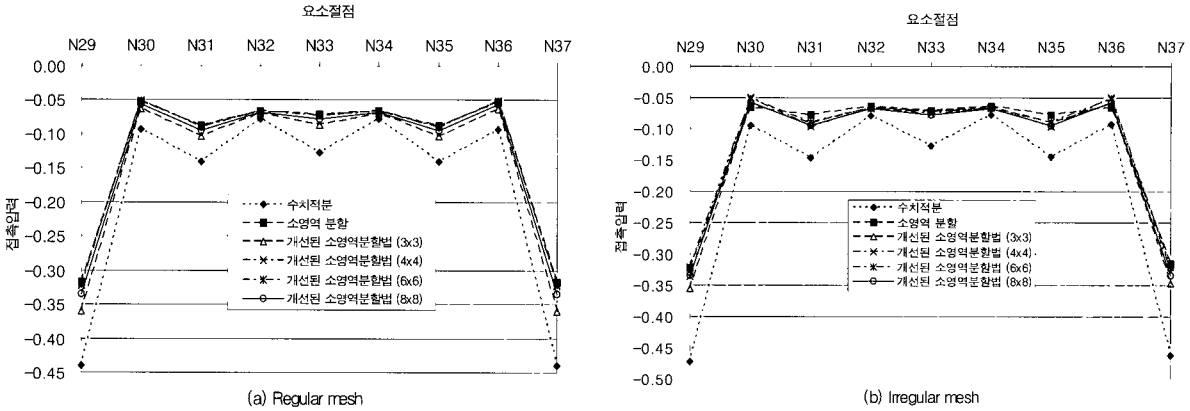


그림 12 절점의 접촉압력

유한요소분할과 변위와 접촉압력을 비교한 절점의 위치는 그림 10과 같다.

regular mesh와 irregular mesh에 대한 절점변위 값의 비교는 그림 11에 제시하였고, 지반 접촉압력 값의 비교는 그림 12에 제시하였다.

6. 결 론

반무한 탄성지반 위에 놓여 있는 사각형 판에 연직의 분포하중이 작용하는 경우 판의 변위, 응력, 지반의 접축압력분포 등을 유한요소법을 이용하여 해석하였다.

본 연구에서는 접촉압력과 처짐을 정규와 비정규 요소분할에 대하여 가우스 수치해석 방법, 소영역분할 방법, 개선된 소영역분할법(축대칭 원판의 수치해석 결과를 이용한 원형등가영역 방법)의 세 가지로 계산하였다. 축대칭 원판의 수치해석 결과를 이용한 개선된 소영역분할법은 한 개의 가우스 영역에 대해 (3×3), (4×4), (6×6), (8×8)개로 재분할하여 계산하였다.

1. regular mesh인 경우 소영역분할방법의 결과값이 가장 양호한 값으로 평가되며, 등가하중 적용방법의 재분할 영역의 개수를 증가시킬수록 개선된 소영역분할법의 정도가 증가하며 접촉압력의 결과 값이 개선됨을 알 수 있었다. 그리고 재분할 영역이 6×6인 경우 개선된 소영역분할법과 소영역 분할 방법의 결과가 거의 일치함을 볼 수 있다.
2. irregular mesh에서 소영역분할 방법은 요소 형상이 왜곡되면 해석적분이 불가능하므로 결과 값을 계산하지 못하는 단점이 있다. 그러나 개선된 소영역분할법은 비정규 요소분할에서도 만족할만한 결과 값을 얻을 수 가있다. 따라서 요소분할을 불규칙적으로 하여야 하는 부득이한 경우의 평판 해석은 본 연구에서 사용한 개선된 소영역분할법이 효율적이라고 생각된다.

참 고 문 헌

이외득(1981) 탄성지반 상에 놓인 상자 구조의 해석, 부산대학교 박사학위 논문

조현영, 정진환, 김성도, 한충목(1992) 탄성지반과 판의 접촉압력 해석에 관한 연구, *대한토목학회 논문집*, 12(1), pp.1~7

조현영, 정진환, 김성철(1997) 분리를 고려한 탄성지반 상의 축대칭 원판의 정적 상호작용 해석에 관한 연구, *대한토목학회 논문집*, 17(4), pp.589~596

황창규(1992) 판과 탄성지반의 상호작용을 고려한 3차원 유한요소 해석에 관한 연구, *한국지반공학회지*, 8(1), pp.7~18

山田嘉昭, 横内康人(1981) *有限要素法による 弾塑性解析 プログ, ラミング*, EPIC-Ⅳ 解說, 培風館

Bathe, K.J.(1982) *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, pp.607~660

Bowels, J.E.(1974) *Analytical and computer methods in foundation engineering*, McGraw-Hill, pp.25~73

Bowles, J.E.(1974) *Foundation analysis and design*, 3rd Ed., McGraw-Hill, Ch. 5, 9, 10

Buragohain, D.N., Shah, G.M.(1982) Finite element analysis of plates of arbitrary shapes on elastic half-space, *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, pp.655~674

Cho, H.Y., Cheung, J.W., Kim, S.C.(1995) *A*

contact pressure analysis between circular plate under axisymmetric loading and elastic half-space considering local separation, *EASEC-5*, pp.161~168

Hinton, E., Owen, D.R.J.(1977) *Finite element programing*, Acadamic, New York

Holt, J.S., Hope, P.S.(1979) Displacement oscillation in plane quadratic isoparametric elements in orthotropic situation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, pp.913~920

Lai, J.Y., Booker, J.R.(1991) A residual force finite element approach to soil-structure interaction analysis, *International for Journal Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 15, pp.181~203

Selvadurai, A.P.S.(1979) *Elastic analysis of soil foundation interaction*, Elsevier, New York

Timoshenko, S.P., Woinowsky, K.S.(1959) *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York, 2nd Ed., pp.310~311

Yang, T.Y.(1972) A finite element analysis of plates on a two parameter foundation model, *Computers and Structure*, 2, pp.593~614