

페트로프-갤러킨 자연요소법 : III. 기하학적 비선형 해석

The Petrov-Galerkin Natural Element Method : III. Geometrically Nonlinear Analysis

이 홍 우†

Lee, Hong-Woo

조 진 래*

Cho, Jin-Rae

(논문접수일 : 2004년 8월 10일 ; 심사종료일 : 2005년 4월 11일)

요 지

기존의 부브노프-갤러킨 자연요소법(BG-NEM)에서 발생하는 수치적분의 부정확성을 페트로프-갤러킨 자연요소법(PG-NEM)에서 완벽히 해결할 수 있음을 저자들의 이전 논문에서 확인하였다. 본 논문에서는 PG-NEM을 확장하여 2차원 기하학적 비선형 문제를 다룬다. 해석을 위해 선형화된 토탈 라그랑지 정식화를 도입하고 PG-NEM을 적용하여 근사화한다. 각 하중 단계마다 절점은 새로운 위치로 갱신되며, 재분포된 절점을 바탕으로 형상함수를 새롭게 구성한다. 이러한 과정은 PG-NEM이 더 정확하고 안정적인 근사함수를 제공하는 것을 가능하게 한다. 개발된 포트란 시험 프로그램을 이용하여 대표적인 수치 예제를 수행하였으며, 수치결과로부터 PG-NEM이 효율적이고 정확하게 대변형 문제를 근사화하는 것을 확인하였다.

핵심용어 : 페트로프-갤러킨 자연요소법, 기하학적 비선형, 토탈 라그랑지 정식화, 모서리 교환 알고리즘

Abstract

According to our previous study, we confirmed that the Petrov-Galerkin natural element method(PG-NEM) completely resolves the numerical integration inaccuracy in the conventional Bubnov-Galerkin natural element method(BG-NEM). This paper is an extension of PG-NEM to two-dimensional geometrically nonlinear problem. For the analysis, a linearized total Lagrangian formulation is approximated with the PG-NEM. At every load step, the grid points are updated and the shape functions are reproduced from the relocated nodal distribution. This process enables the PG-NEM to provide more accurate and robust approximations. The representative numerical experiments performed by the test Fortran program, and the numerical results confirmed that the PG-NEM effectively and accurately approximates the large deformation problem.

keywords : Petrov-Galerkin natural element method, geometrical nonlinearity, total Lagrangian formulation, edge flipping algorithm

1. 서 론

초기의 부브노프-갤러킨(Bubnov-Galerkin) 개념에 기초한 자연요소법(BG-NEM)은 Sibson 또는 Laplace 보간함수의 선형 일관성(linear consistency)에도 불구하고 조각시험에서 선형 변위장을 정확히 재구성하지 못하였을 뿐만 아니라 해의 수렴 특성에도 영향을 끼쳐 점근적 수렴(asymptotic convergence)이 보장되지 않았다(Sukumar 등, 1998, 2001). 이러한 BG-NEM의 문제점은 약형식의

수치적분 오차에 기인하며, 이는 형상함수의 지지영역(함수가 '0'이 아닌 영역)과 배경격자(background mesh) 경계의 불일치가 가장 큰 요인이 되고 있음이 참고문헌(Dolbow 등, 1999)을 통하여 밝혀졌다. 이에 저자들은 논문(이홍우 등, 2005)에서 수치적분 오차를 감소시키기 위한 방안을 제시하고, 선형 정탄성 문제에 대한 수치 예제를 통하여 그 성능을 검증하였다. 제안된 방법이 시험함수(test function)와 시도함수(trial function)가 다르게 적용되는 페트로프-갤러킨(Petrov-Galerkin) 개념에 기반을 두고 있으며

† 책임저자, 정회원 · 부산대 기계설계 Post-Doc.
전화: 051-510-3206 ; Fax: 051-514-7640
E-mail: leehongw@pusan.ac.kr

* 정회원 · 부산대 기계공학부 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

로 기존의 자연요소법이 부브노프-갈리킨 개념에 기초한 정식화인 것에 대비해 페트로프-갈리킨 자연요소법(PG-NEM)이라 명명하였다(이홍우 등, 2005).

본 논문에서는 PG-NEM을 이용하여 기하학적 비선형(geometrically nonlinearity)을 포함한 문제의 해법을 제시하고, 다양한 수치 예제를 통하여 대변형 문제에서 PG-NEM의 타당성 및 정확성을 검증하도록 한다.

2. 토탈 라그랑지 정식화

미소변형에 대한 선형 정식화에서는 변형 전형상(deformed configuration)과 변형 후 형상(deformed configuration)이 차이가 없을 만큼 충분히 작은 변형만을 고려한다. 하지만, 기하학적 형상의 변화가 뚜렷한 대변형 문제의 정식화를 위해서는 형상의 변화를 충분히 고려해 주어야 한다. 먼저, 평형 상태(equilibrium state)에 도달한 변형 후 형상을 Ω^{n+1} 이라 두고, 영역 Ω^{n+1} 내부의 임의의 질점(material point)의 좌표를 x_i^{n+1} 이라 하자. 여기서, 오른쪽 상첨자는 하중 증분(load increment)을 의미하며, 하첨자 i 는 좌표성분으로서 x, y, z 축을 나타낸다. 한편, 변형 전 형상을 Ω^0 라 하고, 질점의 초기좌표를 x_i^0 라 두면, $n+1$ 번째 하중 상태에서 질점의 좌표는 초기 형상에 대한 좌표의 유연한 사상(smooth mapping)에 의해 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$x_i^{n+1} = \xi_i(x^0) = x_i^0 + u_i^{n+1} \quad (1)$$

따라서, 초기 형상에 대한 변형 구배(deformation gradient) F_{ij}^{n+1} 은 다음과 같다.

$$F_{ij}^{n+1} = \frac{\partial \xi_i(x^0)}{\partial x_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j^0} \quad (2)$$

여기서, $J^{n+1} = \det[F_{ij}^{n+1}] > 0$ 의 조건을 만족하여야 한다.

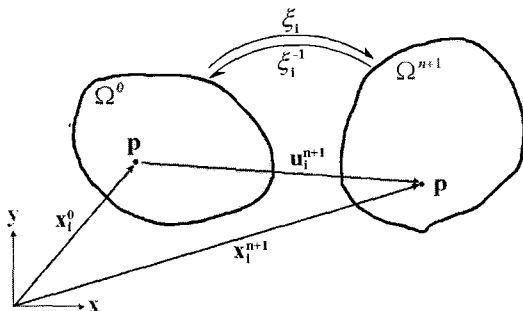


그림 1 Definition of large displacement

2.1 초기형상에 대한 약정식화

전체 영역이 Ω^{n+1} 이고 경계가 Γ^{n+1} 인 변형 후의 탄성체를 고려하자. 영역의 경계를 따라 미리 규정된 변위 \hat{u}_i^{n+1} 이 필수경계(essential boundary) Γ_D^{n+1} 에 부여되고, 표면력 t_i^{n+1} 이 자연경계(natural boundary) Γ_N^{n+1} 을 따라 작용하는 탄성문제에 대한 정적 평형방정식과 경계조건은 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{n+1}}{\partial x_j^{n+1}} + b_i^{n+1} = 0 \quad , \quad in \quad \Omega^{n+1} \quad (3)$$

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i \quad on \quad \Gamma_D^{n+1} \quad (4a)$$

$$\sigma_{ij}^{n+1} n_j^{n+1} = t_i^{n+1} \quad on \quad \Gamma_N^{n+1} \quad (4b)$$

여기서, σ_{ij}^{n+1} 는 평형 상태의 Cauchy 응력 텐서(stress tensor), b_i^{n+1} 은 체적력을 의미한다.

식 (3)의 평형방정식에 대한 약 정식화(weak formulation)를 위해 변위 시도함수(trial function) $u^{n+1} \in [H^1(\Omega^{n+1})]^2$ 과 시험함수(test function) $v \in [H_0^1(\Omega^{n+1})]^2$ 를 선정한다. 여기서, $H^1(\Omega)$ 은 1차의 Hilbert 함수공간(Reddtm, 1986)을 의미한다. 식 (3)에 시험함수 v_i 를 곱하여 전체 영역 Ω^{n+1} 에 대하여 적분한 후, 부분적분과 발산정리(divergence theorem)을 적용하면 최종적으로 다음과 같은 약 형식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{n+1}} \sigma_{ij}^{n+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j^{n+1}} d\Omega^{n+1} \\ &= \int_{\Gamma_N^{n+1}} t_i^{n+1} v_i d\Gamma^{n+1} + \int_{\Omega^{n+1}} b_i^{n+1} v_i d\Omega^{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

앞서 언급한 것처럼 대변형 문제에서 초기 형상과 변형 후 형상은 큰 차이를 보이기 때문에 평형 상태의 형상 Ω^{n+1} 은 미지의 상태라고 볼 수 있다. 따라서, 식 (5)의 직접적인 적분은 불가능하며, 알려져 있는 형상 즉, 참조 형상(reference configuration) Ω^r 로의 사상(mapping)이 필요하다. 본 논문에서는 편의상 토탈 라그랑지 정식화(total Lagrangian formulation: Bathe, 1996)를 적용하며, 이는 참조 형상으로서 초기 형상 Ω^0 를 사용하게 됨을 의미한다. 이에 따라 식 (5)를 초기 형상 Ω^0 로 사상시키면, 다음 식과 같은 최종적인 약 형식으로 귀결 되어진다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^0} S_{ij}^{n+1} \tilde{E}_{ij}^{n+1} d\Omega^0 \\ &= \int_{\Gamma_N^0} t_i^0 v_i d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^0 v_i d\Omega^0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 변형 후 체적과 초기 체적의 관계는 변형증분율 F_{ij}^{n+1} 의 행렬식(determinant)에 의해 표현된다.

$$d\Omega^{n+1} = J^{n+1} d\Omega^0 = |F_{ij}^{n+1}| d\Omega^0 \quad (7)$$

S_{ij}^{n+1} 은 초기 형상에 대한 변형 후 상태의 2차 Piola-Kirchhoff(PK2) 응력을 의미하며, 다음의 관계식에 의해 정의된다(Holzappel, 2000).

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \frac{1}{J^{n+1}} F_{ik}^{n+1} S_{kl}^{n+1} F_{jl}^{n+1} \quad (8)$$

한편, PK2 응력과 에너지 쌍(energy pair)을 이루는 Green-Lagrange(GL) 변형률 텐서는 식 (9)와 같이 정의된다(Holzappel, 2000).

$$E_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_j^0} \right] \quad (9)$$

또한, \tilde{E}_{ij}^{n+1} 은 시험함수 v 에 의해 정의되는 변형률과 관련된 텐서로서 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{E}_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_j^0} \right] \quad (10)$$

t_i^0 는 $d\Gamma^{n+1}$ 과 $d\Gamma^0$ 의 면적 비에 의해 조정된(scaled) 표면력이며, b_i^0 도 $d\Omega^{n+1}$ 과 $d\Omega^0$ 의 체적 비에 의해 조정된 체적력이다. 따라서, t_i^0 와 b_i^0 는 식 (11)과 같은 관계를 가진다.

$$t_i^0 = A^{n+1} t_i^{n+1}, \quad b_i^0 = J^{n+1} b_i^{n+1} \quad (11)$$

여기서, n_i^0 는 $d\Gamma^0$ 에 수직인 단위 벡터이며, 면적비 $A^{n+1} = J^{n+1} |F_{ij}^{n+1}|^{-1} n_j^0$ 은 Nanson의 관계(Holzappel, 2000)로부터 정의된다.

2.2 약 형식의 선형화

식 (6)에 나타낸 약 형식의 선형화(linearization)를 위

해 각 적분소(integrand)를 Taylor급수 전개시키면 다음과 같은 선형화된 약 형식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^0} C_{ijpq}^n E_{pq}^{\Delta} \tilde{E}_{ij}^n d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} S_{ij}^n \tilde{E}_{ij}^{\Delta} d\Omega^0 \\ &= \int_{\Gamma_N^0} t_i^0 v_i d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^0 v_i d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} S_{ij}^n \tilde{E}_{ij}^n d\Omega^0 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, S_{ij}^n 은 n 번째 평형 상태에서 계산된 PK2응력이며, \tilde{E}_{ij}^n 은 식 (10)에서 u_i^{n+1} 대신에 u_i^n 이 대입된 식으로 n 번째 평형 상태에서 계산된 GL변형률의 변분으로 생각할 수 있다. 한편, u_i^{Δ} 는 변위 증분(displacement increment)을 의미한다.

C_{ijpq}^n 은 n 번째 평형 상태에서의 접선 물성 텐서(tangent modulus tensor)이며, E_{ij}^{Δ} 와 \tilde{E}_{ij}^{Δ} 는 각각 식 (13a)와 (13b)와 같이 정의된다.

$$E_{ij}^{\Delta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^{\Delta}}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j^{\Delta}}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{\Delta}}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^n}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_m^n}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{\Delta}}{\partial x_j^0} \right] \quad (13a)$$

$$\tilde{E}_{ij}^{\Delta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_m^{\Delta}}{\partial x_i^0} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{\Delta}}{\partial x_j^0} \right] \quad (13b)$$

선형화된 식 (12)의 약 형식을 반복 형식(iteration form)으로 다시 쓰면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^0} C_{ijpq}^{(k)} E_{pq}^{\Delta(k+1)} \tilde{E}_{ij}^{(k)} d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} S_{ij}^{(k)} \tilde{E}_{ij}^{\Delta(k+1)} d\Omega^0 \\ &= \int_{\Gamma_N^0} t_i^{(k)} v_i d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^{(k)} v_i d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} S_{ij}^{(k)} \tilde{E}_{ij}^{(k)} d\Omega^0 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, 상첨자 (k) 는 $n+1$ 번째 하중 단계의 (k) 번째 반복을 나타내며, 상첨자 $\Delta^{(k+1)}$ 은 $(k+1)$ 번째 변위 증분의 함수임을 의미한다. 식 (14)에서 알 수 있듯이 하중 단계를 나타내는 상첨자는 편의상 생략하였다. 계산된 변위 증분으로부터 $(k+1)$ 번째 반복 후의 변위가 계산된다.

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + u_i^{\Delta^{(k+1)}}, \quad k \geq 0 \quad (15)$$

한편, 물성모델로서 Saint Venant-Kirchhoff 탄성재료(elastic material)(Holzapfel, 2000)를 도입한다.

$$C_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (16)$$

여기서, λ 와 μ 는 Lamé 상수이며, 식 (16)에서 알 수 있듯이 물질 텐서 $C_{ijpq}^{(k)}$ 는 변위에 영향을 받지 않는다. 따라서, $(k+1)$ 번째 반복 후의 PK2응력은 다음 식에 의해 계산된다.

$$S_{ij}^{(k+1)} = C_{ijpq} E_{pq}^{(k+1)} \quad (17)$$

3. 페트로프-갤러킨 자연요소법

선형화된 약 형식의 근사해를 구하기 위해 좌표 x_n 에서의 변위 증분 $u^{\Delta(k+1)}$ 과 시험함수 v 를 다음 식과 같이 형상함수(shape function)를 이용하여 이산화한다.

$$u^{\Delta(k+1)} = \sum \phi_I u_I^{\Delta(k+1)}, v = \sum \psi_I v_I \quad (18)$$

여기서, ϕ_I 와 ψ_I 는 각각 절점 I 에 해당하는 시도 및 시험 형상함수이며, 본 논문에서는 시도 형상함수로서 보로노이 다이어그램을 기반으로 한 Laplace기저함수(basis function)를, 시험 형상함수로서 델라우니 삼각형을 기반으로 한 일정 변형을 유한요소(constant strain finite element ; CSFE) 기저함수를 도입한다.

Remark 본 논문에서는 Laplace 기저함수를 시도 및 시험 형상함수로 사용하는 기존의 자연요소법과는 달리 시험 형상함수로 델라우니 삼각형 기반의 기저함수를 적용하며, 이는 수치적분영역인 델라우니 삼각형과 적분함수 지지영역의 경계 불일치로 인해 유발되는 심각한 적분오차의 발생을 억제하기 위해 제안된 방법이다. 이러한 기법은 기존의 자연요소법이 부브노프-갤러킨 개념에 기반을 둔 것과는 달리 시도와 시험함수의 기저를 다르게 선택하는 페트로프-갤러킨 개념에 기반을 두고 있으므로 PG-NEM이라 명명되었다. PG-NEM의 자세한 개념 및 선형 정탄성 문제의 적용과 성능 평가에 대한 자세한 내용은 저자들의 이전 논문(이홍우 등, 2005)에서 확인할 수 있다.

식 (18)을 이용하여 식 (14)의 약 형식을 이산화시키면 다음의 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_m^{(k)} + K_G^{(k)}] u^{\Delta(k+1)} = f_{ext}^{(k)} - f_{int}^{(k)} \quad (19)$$

여기서, $[K_m^{(k)}]$ 와 $[K_G^{(k)}]$ 는 각각 물질 접선 강성행렬

(material tangent stiffness matrix) 및 기하 접선 강성행렬(geometric tangent stiffness matrix)을 나타내며, $f_{ext}^{(k)}$ 와 $f_{int}^{(k)}$ 는 각각 외력 벡터(external force vector) 및 내력 벡터(internal force vector)를 의미한다.

식 (19)는 선형의 대수방정식이며, 이로부터 $(k+1)$ 번째 반복 후의 변위 증분을 얻을 수 있다. 지속적인 반복을 통해 $n+1$ 번째 하중 단계의 평형상태에 수렴한 해(convergent solution)를 얻을 수 있으며, 본 논문에서는 적절한 수렴상태를 판단하기 위해 변위와 하중에 관련된 수렴 조건을 동시에 적용한다.

$$\Delta \bar{u}_{rel} = \frac{|u^{\Delta(k+1)}|}{|u^{(k+1)}|} \leq \alpha_u |u^{(k+1)}| \quad (20a)$$

$$\Delta \bar{f}_{rel} = \frac{|f_{cut}^{(k+1)} - f_{int}^{(k+1)}|}{|f_{cut}^{(k+1)}|} \leq \alpha_f |f_{cut}^{(k+1)}| \quad (20b)$$

여기서, $\Delta \bar{u}_{rel}$ 및 $\Delta \bar{f}_{rel}$ 은 각각 상대 변위 증분(relative displacement increment)과 상대 하중잔여(relative force residual)를 나타내며, α_u 와 α_f 는 각각 변위와 하중의 수렴기준 상수로서 본 논문에서는 10^{-5} 을 적용한다.

4. 수치 알고리즘

4.1 수치해석 절차

급격한 하중증가를 효율적으로 처리하기 위해 여러 단계에 걸쳐 하중을 증가시키는 하중 증분 알고리즘(load incremental algorithm)을 도입하고, 각 하중 단계마다 변위에 관한 비선형 항의 선형화를 위해 Newton-Raphson 기반의 평형 반복 알고리즘(equilibrium iteration algorithm)을 적용한다. 다수의 평형 반복 후 변위와 하중의 증분이 수렴조건을 만족하게 되면, 물체가 평형상태에 도달한 것으로 판단하고 다음 하중 단계의 적용을 위해 모든 절점의 위치를 새롭게 갱신(update)시키는 과정을 수행한다. 절점의 이동이 완료되면 델라우니 삼각형의 갱신을 위해 모서리 교환(edge flipping) 알고리즘(Okabe 등, 1992)이 실행되며, 갱신된 델라우니 삼각형으로부터 형상함수를 재구성하여 새로운 평형반복 과정을 수행한다. 한편, 반복횟수가 미리 지정한 최대값 k^{max} 를 넘어서게 되면, 수렴하지 않는 것으로 판단하고 하중 증분의 크기를 조절하는 계수 θ

를 반으로 줄인 후 새롭게 반복과정을 수행한다. 계속 수렴이 되지 않아 θ 가 미리 지정한 최소값 θ^{\min} 보다 작아지면, 프로그램은 종료하게 된다. 이 경우 수렴하지 않은 상태에서 프로그램이 종료되므로 입력 인자를 조정 한 후 재해석을 수행하여야 한다. 이러한 과정을 반복하여 최종적인 하중 상태에 대한 해를 얻을 수 있으며, 그림 2에 본 논문에서 적용한 비선형 반복 알고리즘의 흐름도를 나타내었다.

4.2 변형 구배 갱신

매 반복마다 변형 구배, GL변형률 및 PK2응력과 같은 상태변수(state variables)는 갱신되는 과정을 거치게 된다. 이를 위해 이전 단계의 평형상태에 대한 각 상태변수를 저장하고 있어야 하나, 본 논문에서 적용한 물질 모델의 경우 변형 구배 F_{ij} 에 의해 모든 상태변수가 표현 가능하므로 변형 구배만을 저장하고 있는 것으로 충분하다. 한편, 각 상태변수를 저장하는 방법은 크게 두 가지로 볼 수 있다. 첫 번째는 각 하중 단계마다 수렴된 적분점에서의 값을 특정한 근사함수를 사용하여 절점 값으로 사상시켜 저장하는 방법이다. 이 방법을 적용할 경우 절점으로 사상된 값은 적용된 근사함수에 의해 결정되므로 수렴한 상태를 정확하게 표현하지 못할 수 있다. 따라서, 하중 단계가 증가할수록 어느 정도의 오차누적은 충분히 예상할 수 있으며, 이러한 오차의 누적을 최소화하기 위한 방안이 필요하다. 두 번째는 가우스 적분점(Gauss integration point)에 저장하는 방법으로 집선 강성행렬과 하중벡터의 적분이 여기에서 측정된 값에 의해 이루어지므로 대부분의 유한요소 프로그램에서 적용되고 있다. 이 방법은 적분점의 변경이 없는 경우 오차발생 요인은 내포하고 있지 않으나, 델라우니 삼각형이 재구성될 경우 수치 적분점이 이전 단계의 그것과 달라지게 되므로 근사에 의한 오차를 포함하게 된다. 이는 대변형에 의해 지속적으로 변경되는 델라우니 삼각형을 고려할 때, 적분점에 저장하는 방법 역시 오차 발생을 완전히 제거할 수는 없음을 의미한다. 또한, 절점에 저장하는 경우에 비해 지나치게 많은 저장 공간을 필요로 하게 되므로, 본 논문에서는 변형 구배를 절점에 저장하는 방법을 채택하도록 한다.

적분점의 값을 절점으로 사상시키기 위한 방안으로 가중 잔여법(weight residual method)(Reddy, 1986; Zienkiewicz 등, 1989)을 적용한다. n 번째 하중 단계에서 수렴한 임의의 함수를 $f(x_n)$, 근사화된 함수를 $\hat{f}(x_n)$ 이라 두면 전역적 관점에서 실제 함수 f 와 근사함수 \hat{f} 의 오차는 식 (21)과 같이 표현된다.

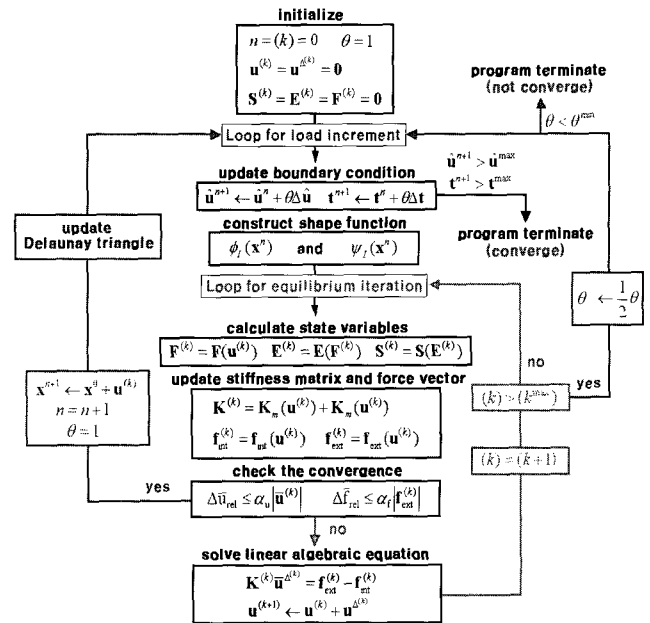


그림 2 Flowchart for large deformation analysis

$$E = \int_{\Omega^n} w [\hat{f}(x^n) - f(x^n)] d\Omega^n = 0 \tag{21}$$

여기서, w 는 가중함수(weight function)이며, \hat{f} 과 w 는 다음 식과 같이 이산화할 수 있다.

$$\hat{f}(x^n) = \sum \phi_I(x^n) \bar{f}_I^n \tag{22a}$$

$$w(x^n) = \sum \psi_J(x^n) \bar{w}_J^n \tag{22b}$$

여기서, ϕ_I 는 근사를 위한 형상함수로서 적절한 근사를 위해 Laplace 기저함수를 사용하며, ψ_J 는 가중함수의 기저로서 PG-NEM에서는 적분오차 발생을 억제하기 위해 델라우니 기반의 기저함수를 적용한다.

식 (21)의 가중잔여식에 식 (22)를 대입하여 정리하면 다음의 선형 연립 방정식을 얻을 수 있다.

$$M \bar{f} = q \tag{23}$$

여기서,

$$M_{IJ} = \int_{\Omega^n} \psi_I \phi_J d\Omega^n, \quad q_I = \int_{\Omega^n} \psi_I f(x^n) d\Omega^n \tag{24}$$

각 하중 단계마다 식 (23)의 방정식을 계산하여 절점으로 사상된 변형 증분률을 구할 수 있다. 이러한 방법은 응력 및 변형률의 가시화를 위한 후처리(post-processing)과정에서도 적용할 수 있다.

5. 수치 예제

2차원 기하 비선형 문제에 대한 PG-NEM의 성능 검증을 위해 앞절들의 이론전개를 바탕으로 포트란 시험 프로그램을 작성하고, 다양한 검증문제를 통하여 기존 BG-NEM과 FEM의 수치해석 결과와 비교 분석한다.

5.1 아치(Arch)

먼저, 아치(arch)모델에 대한 해석을 수행하였으며, 그림 3에 해석 모델의 기하학적 치수, 물성치 및 2가지 균일(uniform) 절점 분포(11×3, 21×3절점)를 도시하였다. 물성 모델은 식 (16)에 정의된 탄성재료를 적용하였으며, 2차원 해석을 위해 평면 응력(plane stress)을 가정하였다. 해석은 총 10개의 하중단계로 나누어져 수행되었으며, 해석 모델에 대한 이론해는 Schreyer 등(1996)의 논문에서 얻을 수 있다.

그림 4의 하중-변위 곡선에서 알 수 있듯이 CS-FEM의 처짐은 이론해의 결과와 매우 큰 차이를 보이고 있으나, PG-NEM과 BG-NEM의 결과는 매우 적은 수의 절점으로도 정확한 결과를 예측하고 있다. 이러한 결과는 형상함수의 적절성과 관련되어 있다. 즉, PG-NEM과 BG-NEM에

서 사용하는 Laplace기저 함수는 변형된 후의 형상에서 최적의 보간함수를 제공하기 때문이다. 따라서, 절점 이동 후 형상함수를 지속적으로 재구성 해야하는 단점이 있으나, 해석 결과의 정확성 면에서는 매우 뛰어난 근사함수를 제공하고 있다. 한편, PG-NEM과 BG-NEM의 결과 차이는 거의 나타나지 않으며, 이는 수치적분 오차가 영향을 끼칠 만큼 대변형이 발생하지 않았기 때문인 것으로 판단된다.

5.2 곡선 보(curved beam)

본 예제에서는 그림 5(a)에 도시된 곡선 보(curved beam)의 대변형 해석을 수행하였다. 물성 모델로 식 (16)의 Saint Venant Kirchhoff 탄성재료를 적용하였으며, 사용한 곡선 보의 기하학적 치수 및 물성계수는 그림 5(a)에 자세히 나타내었다. 해석을 위해 그림 5(b)에 나타난 것과 같이 2가지 균일 절점 분포(41×5, 81×5절점)를 사용하였으며, 본 예제에서도 10개의 동일한 하중단계로 나누어 해석을 수행하였다.

결과 비교를 위한 참조해는 범용 유한요소 해석 프로그램인 MSC/MARC로부터 얻었으며, 해석은 8절점 2차요소(총 1613절점)를 적용하여 이루어졌다. 그림 6에 PG-NEM과 BG-NEM의 하중-수평처짐(horizontal deflection) 곡

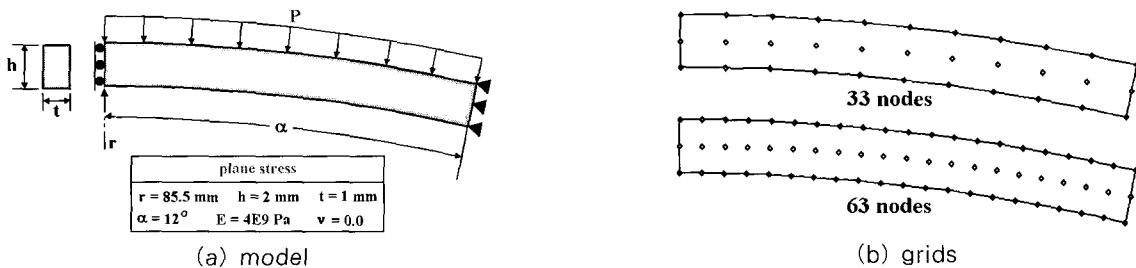


그림 3 Arch model

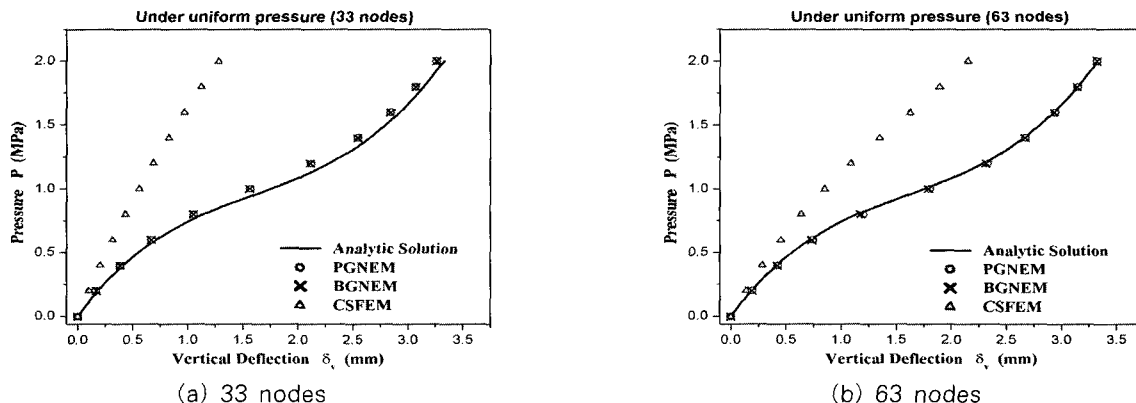


그림 4 Pressure-deflection curves of arch model

선을 MSC/MARC의 결과와 비교하여 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 변형이 증가할수록 BG-NEM의 결과는 참조해와 차이를 보이고 있으나, PG-NEM은 적은 수의 절점으로도 MSC/MARC와 거의 동일한 결과를 보여주고 있다. 이러한 BG-NEM의 오차는 참고문헌(Sukumar 등, 2001)의 선형해석 결과에서 확인된 것과 같이 수치적분의 부정확성에 기인하는 것으로 대변형 해석에서 변위가 증가할수록 누적된 오차가 뚜렷이 드러나는 것으로 판단된다. 한편, BG-NEM의 오차는 그림 7에 도시한 최종 단계에서의 변형 형상으로부터 재확인 할 수 있다. 그림에서 PG-NEM의

변형 형상이 MSC/MARC와 일치하는 반면, BG-NEM은 수평 처짐량이 과예측(overestimation)되어 있음을 알 수 있다. 그림 8은 하중단계에 따른 곡선 보의 변형 형상(PG-NEM)을 나타낸 것이다.

5.3 축대칭 반구(axisymmetric half sphere)

마지막으로 적용된 예제는 그림 9에 도시된 축대칭 반구(axisymmetric half sphere) 모델이다. 축대칭 모델의 기하학적 치수 및 물성계수는 그림 9에 자세히 나타내었다.

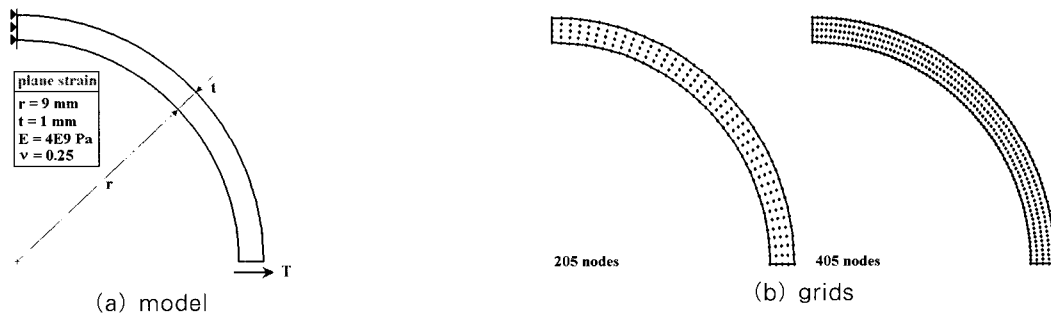


그림 5 Curved beam model

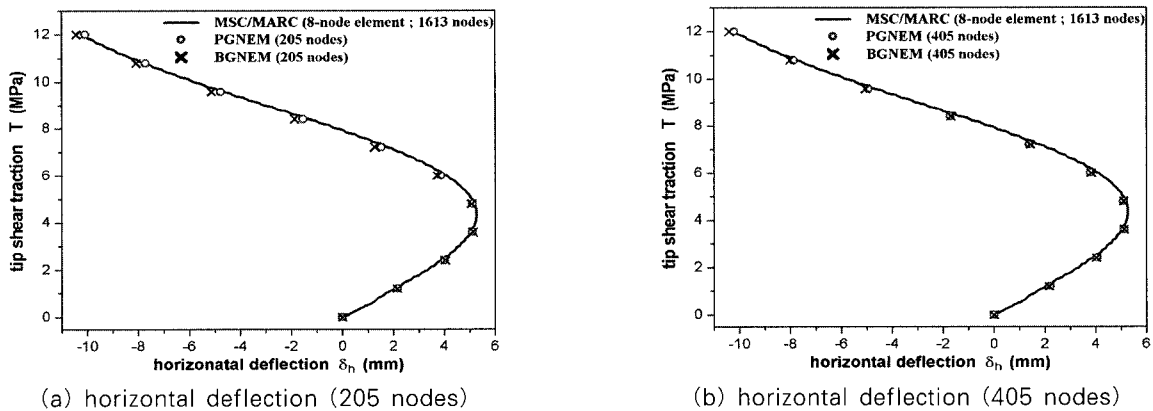


그림 6 Load-deflection curves of curved beam

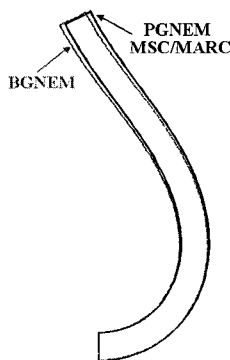


그림 7 Deformed shapes at final stage

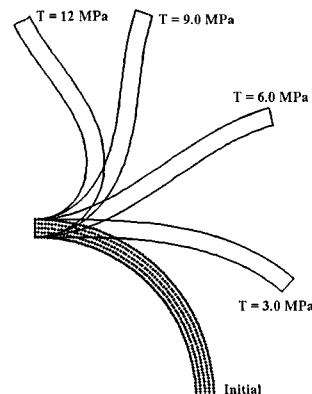


그림 8 deformation patterns (PG-NEM)

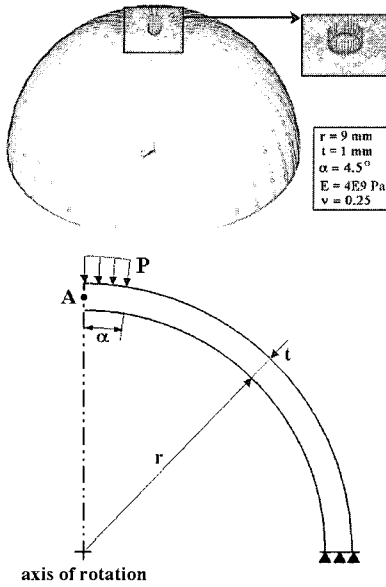


그림 9 Axisymmetric half sphere model

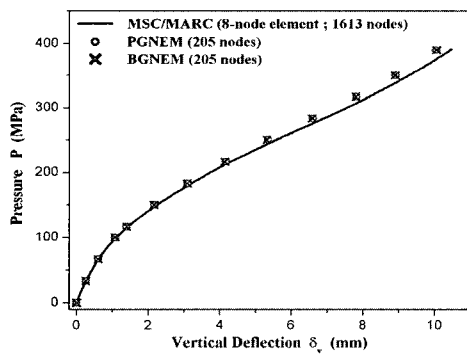
해석을 위해 사용한 질점 분포는 5.2절의 곡선 보에 적용한 것과 동일하며, 참조해는 MSC/MARC의 8절점 2차요소 (총 1613절점)를 적용하여 얻을 수 있었다.

그림 10에 점 A의 하중-수직처짐(vertical deflection) 곡선을 MSC/MARC의 결과와 비교하여 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 41×5절점인 경우(그림 10(a)참고) PG-

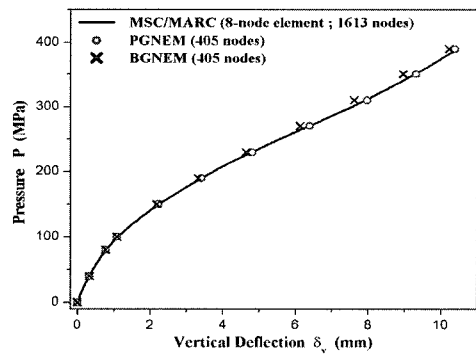
NEM과 BG-NEM이 예측한 처짐량은 참조해와 어느 정도 오차를 보이고 있으나 두 방법의 결과 차이는 거의 나타나지 않는다. 한편, 81×5절점을 적용한 경우(그림 10(b)참고) PG-NEM의 결과는 MSC/MARC의 처짐 곡선과 매우 잘 일치하는 반면, BG-NEM의 결과는 절점 증가에 따른 해의 향상이 나타나지 않고 있다. 이러한 BG-NEM의 부정확성은 선형 해석(Sukumur 등, 2001)에서도 드러난 것과 같이 적분오차(integration error)가 수렴특성에 영향을 끼친 것으로 볼 수 있으며, PG-NEM에서는 적분오차의 영향없이 점근적 수렴이 보장되고 있음을 알 수 있다. 그림 11에 최종 단계의 변형 형상을 나타내었으며, 그림에서 PG-NEM의 정확성과 BG-NEM의 오차를 뚜렷이 확인할 수 있다. 이상과 같은 결과는 대변형 문제에서도 수치적분 오차에 의한 해의 정확성 및 수렴을 저하가 나타날 수 있으며, PG-NEM에서 적용한 개념이 적절하게 오차요인을 억제시킬 수 있다는 것을 보여주고 있다. 그림 12는 하중단계에 따른 축대칭 반구 모델의 변형 형상(PG-NEM)을 나타낸 것이다.

6. 결 론

Laplace 보간기법을 채용한 PG-NEM을 적용한 기하학



(a) vertical deflection (205 nodes)



(b) vertical deflection (405 nodes)

그림 10 Load-deflection curves of half sphere

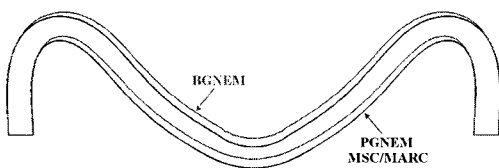


그림 11 Deformed shapes at final stage

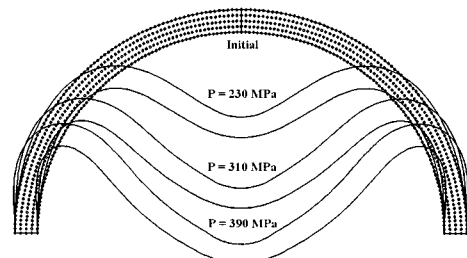


그림 12 Deformation patterns (PG-NEM)

적 비선형 해석을 위해 토달 라그랑지 정식화를 도입하였다. 전개된 이론 및 알고리즘을 바탕으로 시험 포트란 프로그램을 작성하였으며, 다양한 수치예제를 통하여 비선형 문제에 대한 PG-NEM의 성능 및 타당성을 검증하였다. 수치 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

매 하중증분마다 갱신된 절점 좌표로부터 최적의 Laplace 기저함수를 구성함으로써 인해 CS-FEM의 결과에 비해 뚜렷하게 향상된 성능을 보여주고 있다. 즉, 초기에 적절하게 구성된 유한요소 형상함수와 할라라도 변형으로 인해 절점이 이동하게 되면, 격자의 변형이 발생하게 되고 이로 인해 형상함수의 품질(quality)이 떨어지게 된다. 이는 해석결과의 정확성에 직접적으로 반영되며, 본 논문의 수치해석 결과로부터 확인되었다. 반면, 자연이웃(natural neighbor) 기반의 Laplace 형상함수는 해당 절점분포로부터 최적의 형상함수를 제공하게 되므로, 해석비용의 증가를 고려할 지라도 매우 효율적인 근사공간을 제공한다고 볼 수 있다.

대변형에서 PG-NEM은 선형에서와 마찬가지로 BG-NEM에 비해 향상된 결과를 제공하고 있다. 적은 수의 절점으로도 참조해에 거의 일치하는 정확성뿐만 아니라, 수렴 측면에서도 향상된 성능을 확인할 수 있다. 이는 대변형 문제에서도 수치적분의 부정확성이 해석결과의 오차를 유발하는 요인이 되며, PG-NEM에서 적용한 텔라우니 삼각형 기반의 시험 형상함수가 적분의 정확도를 향상시키는 역할을 하게됨을 의미한다.

따라서, 본 논문에서 적용한 PG-NEM은 격자 변형이 유발되는 대변형에서도 안정적인 해를 제공할 수 있으며, 수치적분 정확도의 향상에 PG-NEM의 개념이 충분히 성능을 발휘하고 있다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지역혁신 인력양성사업(2003.6-2006.4)의 연구결과로 수행되었음.

참 고 문 헌

- 이홍우, 조진래(2005) 페트로프-갈러킨 자연요소법 : I. 개념, *한국전산구조공학회 논문집*, 18(2), pp.103~112
- 이홍우, 조진래(2005) 페트로프-갈러킨 자연요소법 : I. 선형 정탄성 해석, *한국전산구조공학회 논문집*, 18(2), pp.113~121
- Bathe, K.J.(1996) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey
- Dolbow, J., Belytschko, T.(1999) Numerical integration of the Galerkin weak form in mesh-free methods, *Computational mechanics*, 23, pp.219~230
- Holzappel, G.A.(2000) *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester
- Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K.(1992) *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley & Sons, Chichester, England
- Reddy, J.N.(1986) *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw Hill, New York
- Schreyer, H.L., Masur, E.F.(1996) Buckling of Shallow Arches, *Journal of the Engineering Mechanics/ASCE*, EM4, pp.1~19
- Sukumar, N., Moran, B., Belytschko, T.(1998) The natural element method in solid mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, pp.839~887
- Sukumar, N., Moran, B., Yu Semenov, A., Belikov, V.V.(2001) Natural neighbor Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp.1~27
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.(1989) *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw Hill, Singapore