

# 페트로프-갤러킨 자연요소법 : II. 선형 정탄성 해석

## The Petrov-Galerkin Natural Element Method : II. Linear Elastostatic Analysis

이 홍 우†

Lee, Hong-Woo

조 진 래\*

Cho, Jin-Rae

(논문접수일 : 2004년 8월 10일 ; 심사종료일 : 2005년 4월 11일)

### 요 지

무요소기법이 공통적으로 내재하고 있는 수치적분의 부정확성을 해결하기 위해, 페트로프-갤러킨 자연요소법이라 불리는 향상된 자연요소법을 제안한다. 제안된 방법은 라플라스 기저함수를 시도 형상함수로 사용하는 반면, 시험 형상함수로서 델라우니 삼각형이 지지영역이 되는 함수를 새롭게 정의한다. 이러한 접근은 통상적인 적분영역과 적분함수 지지영역간의 불일치를 제거하게 하며, 이는 적용이 편리할 뿐만 아니라 수치적분의 정확성을 보장한다. 본 논문에서는 2차원 선형 탄성의 대표적인 검증문제를 통하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다. 비교를 위해 기존의 부브노프-갤러킨 자연요소법과 일정 변형률 유한요소법을 이용한 해석을 동시에 수행한다. 조각 시험과 수렴률 평가를 통해 제안된 기법의 우수성을 확인할 수 있다.

**핵심 용어** : 페트로프-갤러킨 자연요소법(PG-NEM), 부브노프-갤러킨 자연요소법(BG-NEM), 일정 변형률 유한요소법(CS-FEM), 조각 시험, 수렴률

### Abstract

In order to resolve a common numerical integration inaccuracy of meshfree methods, we introduce an improved natural element method called Petrov-Galerkin natural element method(PG-NEM). While Laplace basis function is being taken for the trial shape function, the test shape function in the present method is differently defined such that its support becomes a union of Delaunay triangles. This approach eliminates the inconsistency of the support of integrand function with the regular integration domain, and which preserves both simplicity and accuracy in the numerical integration. In this paper, the validity of the PG-NEM is verified through the representative benchmark problems in 2-d linear elasticity. For the comparison, we also analyze the problems using the conventional Bubnov-Galerkin natural element method(BG-NEM) and constant strain finite element method(CS-FEM). From the patch test and assessment on convergence rate, we can confirm the superiority of the proposed meshfree method.

**keywords** : Petrov-Galerkin natural element method(PG-NEM), Bubnov-Galerkin natural element method(BG-NEM), constant strain finite element method(CS-FEM), patch test, convergence rate

### 1. 서 론

새롭게 제안한 페트로프-갤러킨 자연요소법(PG-NEM; 이홍우 등, 2005)은 Laplace 보간기법을 기반으로 시도 형상함수를 구성함으로 인해 EFG(Belytschko 등, 1994), RKPM(Liu 등, 1995) 등의 기존 무요소법이 내재하고 있는 보간특성의 위배를 완벽하게 복구할 수 있다. 이러한 Laplace 기저함수(basis function)의 특성은 필수경계조건

의 직접적 처리를 가능하게 한다. 또한, MLSM(moving least square method; Belytschko 등, 1994) 등과 같은 거리기반의 근사기법과는 달리 불규칙한 절점배치에서도 매우 적절한 근사 공간을 제공한다. 이와 더불어 기존의 부브노프-갤러킨 자연요소법(BG-NEM; Sukumar 등, 1998, 2001)이 내재하고 있는 수치적분의 부정확성을 해결할 수 있는 방안을 제시하고 있다. 즉, 델라우니 삼각형(Delaunay triangle) 기반의 시험 형상함수(test shape function)를

† 책임저자, 정회원 · 부산대 기계설계 Post-Doc.  
전화: 051-510-3206 ; Fax: 051-514-7640  
E-mail: leehongw@pusan.ac.kr  
\* 정회원 · 부산대 기계공학부 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

도입하여 약 형식의 적분영역과 적분함수(integrand)의 경계를 일치시킴으로써 적분오차의 발생을 최소화 하였다. 제시된 방법은 Dolbow와 Belytschko(1999)가 제안한 경계 상자기법(bounding box technique)과 개념적으로 동일하나, 실제 문제로의 적용에 있어서 보다 실용적인 방법이라 볼 수 있다.

본 논문에서는 Laplace 기저함수를 이용한 PG-NEM의 검증에 위해 2차원 선형탄성 문제에 대한 포트란 프로그램을 작성하고, 다양한 검증 문제에 적용하여 PG-NEM과 기존 BG-NEM 및 CS-FEM의 수치해석 결과에 대하여 논의한다. 이를 통하여 PG-NEM의 정확성, 수렴특성 및 수치 적분 오차의 감소에 대하여 고찰하도록 한다.

### 2. 수치 실험

PG-NEM, BG-NEM 및 CS-FEM에 대한 해석결과의 정확도 및 수렴특성 고찰을 위해  $L^2$  상대오차 norm(relative error norm) 및 에너지 상대오차 norm을 도입하고 다음과 같이 정의한다.

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\left\{ \int_{\Omega} (u_i - u_i^h)(u_i - u_i^h) d\Omega \right\}^{1/2}}{\left\{ \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega \right\}^{1/2}} \quad (1a)$$

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \frac{\left\{ \int_{\Omega} C_{ijkl} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^h)(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^h) d\Omega \right\}^{1/2}}{\left\{ \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} d\Omega \right\}^{1/2}} \quad (1b)$$

여기서,  $u_i$  와  $u_i^h$ 는 각각 변위에 대한 정해 및 수치해들의 의미한다. 식 (1)의 상대오차 norm은 전역적 관점의 오차평가에 이용되며, 국부적 오차평가를 위해 식 (2)와 같이 국부

(point-wise) 에너지 오차 norm을 정의한다.

$$\|e(x)\| = \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^h)(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^h) \right\}^{1/2} \quad (2)$$

각각의 오차 norm은 적분점(integration point)에서 측정되며, 가우스 적분을 위한 배경격자로서 델라우니 삼각형(Delaunay triangular)을 이용한다. 한편, Sibson 및 Laplace 기저함수는 모두 절점에서  $C^0$ 의 연속성만을 가지며, 이는 Sukumar 등(1998, 2001)의 수치결과에서 나타나는 것과 같이 실제 응력이 연속이라 할지라도 절점에서 응력 점프(stress jump) 현상을 유발하게 된다. 이러한 현상은 유한요소법의  $C^0$ 요소경계에서 응력의 불연속이 발생하는 것과 동일한 결과이며, 보다 유순한(smooth) 응력 분포를 얻기 위하여 절점응력의 복구(stress recovery)과정이 필요하다. 이러한 응력 복구에 대한 다양한 연구가 유한요소법 연구자들에 의해 제안되었으나, 본 논문에서는 Zienkiewicz와 Taylor(1989)의 참고문헌에서 기술되어 있는 응력 정사영(stress projection)기법을 도입하여 절점응력 및 국부적 에너지 오차를 계산하였다. 해석에 사용된 재료 물성치는 모든 문제에 대하여 탄성계수(elastic modulus)  $E=200\text{GPa}$ , 프와송 비(Poisson's ratio)  $\nu=0.3$ 을 적용한다. 또한, 사용한 가우스 적분점은 약 형식의 적분에는 Sukumar 등(1998, 2001)의 논문에서 적용한 3점 적분을, 응력 가시화 및 오차 norm 계산의 후처리에서는 정확한 적분을 위해 13점 적분을 사용한다.

### 3. 조각 시험(Patch test)

조각시험은 비적합(non-conforming) 유한요소의 수렴성 검증에 위해 가장 널리 쓰이고 있는 방법이다. 본 논문에서

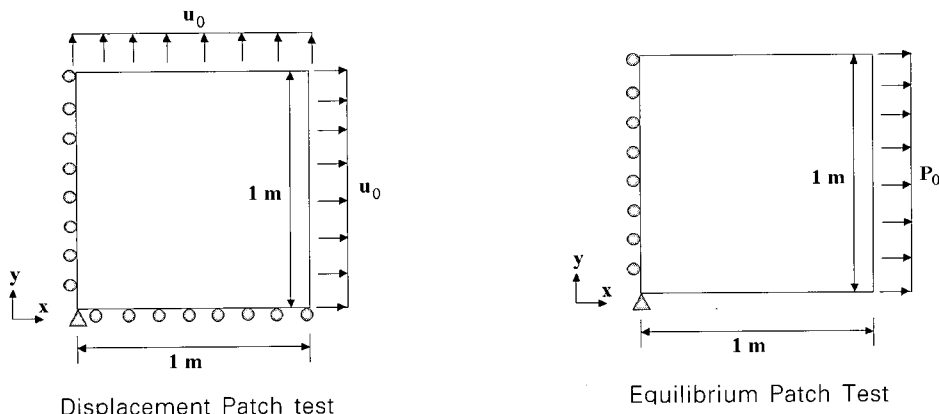


그림 1 Models for patch test

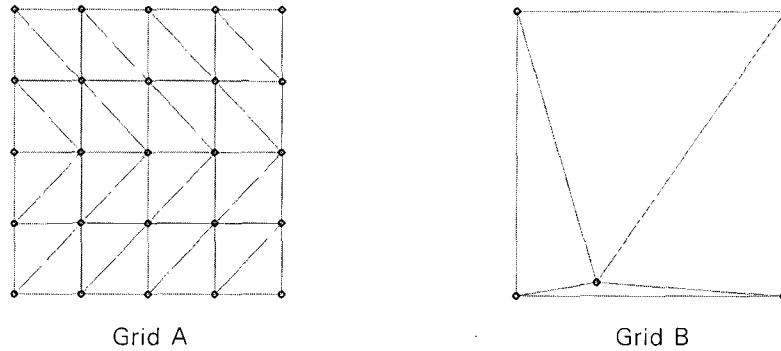


그림 2 Nodes distribution for patch test

조각시험은 다음의 크게 두가지 조건에 대하여 수행한다. 첫째, 변위 조각시험(displacement patch test)으로 선형의 변위장을 경계  $\Gamma_u (\Gamma_u = \partial\Omega)$ 에 부여하여 해석영역의 변위가 정확히 근사되는지를 판단한다. 둘째, 평형 조각시험(equilibrium patch test)으로 단축 응력장(uniaxial stress field)을 구현하는 능력을 검증한다. 그림 1에 변위 및 평형 조각시험을 위한 모델을 도시하였으며,  $u_0 = 10^{-3}$  m,  $P_0 = 1$ Pa을 적용하였다. 해석을 위해 두 경우 모두 평면응력(plane stress) 조건을 적용하였으며, 그림 2에서와 같이 25개의 균일 절점과 5개의 불균일 절점 분포에 대하여 BG-NEM 및 PG-NEM을 이용한 해석을 수행하였다.

$L^2$  상대오차 높 및 에너지 상대오차 높에 대한 조각시험 결과를 표 1에 정리하였다. BG-NEM의 경우 변위 및 에너지 상대오차 높의 결과는 정확도가  $10^{-3}$ 에서  $10^{-2}$ 사이 존재한다. 따라서, BG-NEM의 결과는 기계 정확도(machine precision)인  $10^{-16}$ 에 비하여 높은 오차를 나타내며, 조각시험을 통과하지 못한다는 것을 알 수 있다. 반면, PG-NEM은 기계 정확도에 근접한 오차를 보이고 있다. 이러한 조각시험의 결과는 Laplace 기저함수가 선형의 변위장을 정확히 재구성(reproduce)할 수 있다는 사실을 고려할 때, 약 형식의 수치적분과정에서 오차의 원인 대부분이 제공되

고 있다는 사실을 파악할 수 있다. Sibson 기저함수를 적용한 BG-NEM의 수치적분에 대한 이러한 평가는 Sukumar 등(1998, 2001)과 Cueto 등(2002)의 논문에 자세히 언급되어 있다.

이상의 조각시험 결과에서 수치적분 오차를 내포하고 있는 BG-NEM과는 달리 Dealunay 삼각형 기반의 시험형 상함수를 구성한 PG-NEM에서는 적분오차가 거의 발생하지 않는다는 것을 충분히 확인할 수 있다. 그림 3에 변위 조각시험의 등가응력(equivalent stress) 결과를 가시화하였으며, 전체적으로 균일한 등가응력 분포를 보이는 PG-NEM(그림 3(a))의 결과와는 달리 BG-NEM(그림 3(b))의 경우 모서리 부분에서 심각한 등가응력의 변동이 관찰된다. 이러한 BG-NEM에서의 불균일한 응력분포는 평형 조각시험에서도 동일하게 나타난다. 조각시험에서 나타나는 이와 같은 BG-NEM의 단점은 다른 무요소법에서도 일반적으로 발생한다. 예를 들어 EFG는 사각형의 배경격자에 대하여 고차의 적분점을 적용한 경우에도  $10^{-6}$ 이내의  $L^2$  상대오차 높을 보여주며, 이 또한 대부분이 적분영역과 적분함수 지지영역(함수가 '0'이 아닌 영역)의 불일치로 인해 발생함을 Dolbow와 Belytschko(1999)의 논문에서 언급되어 있다. 이러한 문제점에 대하여 Sukumar 등(1998, 2001)은 적분함수의 지지기반을 적분영역으로 하는 적절한

표 1 Relative error norms for the patch test.

Test	Grid Type	Method	$\ ell\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ell\ _{E(\Omega)}$
Displacement	A	PG-NEM BG-NEM	1.30E-16 9.78E-3	1.32E-15 3.72E-2
	B	PG-NEM BG-NEM	1.43E-16 1.76E-2	9.14E-16 6.53E-2
Equilibrium	A	PG-NEM BG-NEM	2.48E-15 1.40E-2	1.08E-14 4.76E-2
	B	PG-NEM BG-NEM	3.45E-16 2.39E-2	1.42E-15 4.15E-2

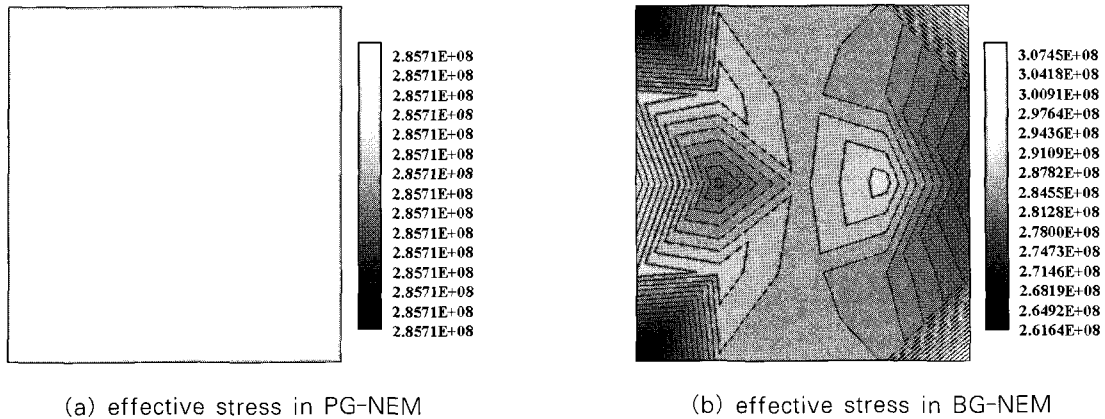


그림 3 Displacement patch test results (grid A)

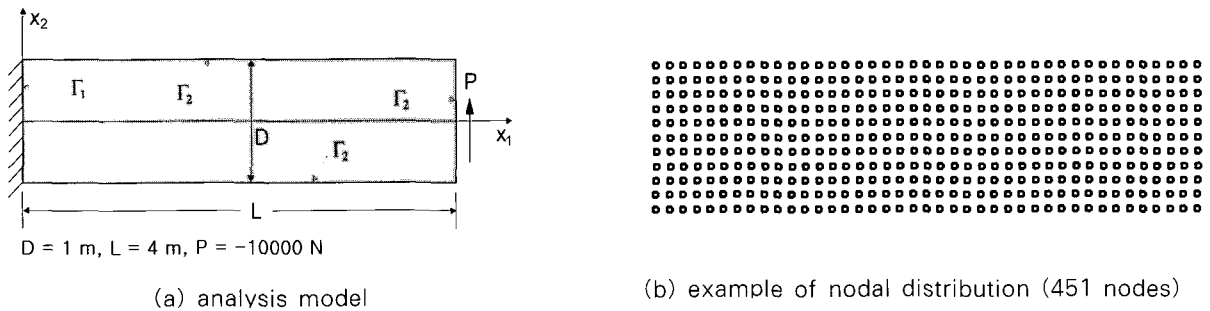


그림 4 Cantilever beam model

수치적분 기법을 도입함으로써 적분오차의 현저한 감소를 이룰 수 있을 것으로 예상하였다. 따라서, 본 논문에서 제안하는 PG-NEM은 Sukumar 등(1998, 2001)과 Dolbow와 Belytschko(1999)가 언급한 개념에 부합할 뿐만 아니라 실제 문제에 손쉽게 적용할 수 있는 실용적인 방안을 제시하고 있다.

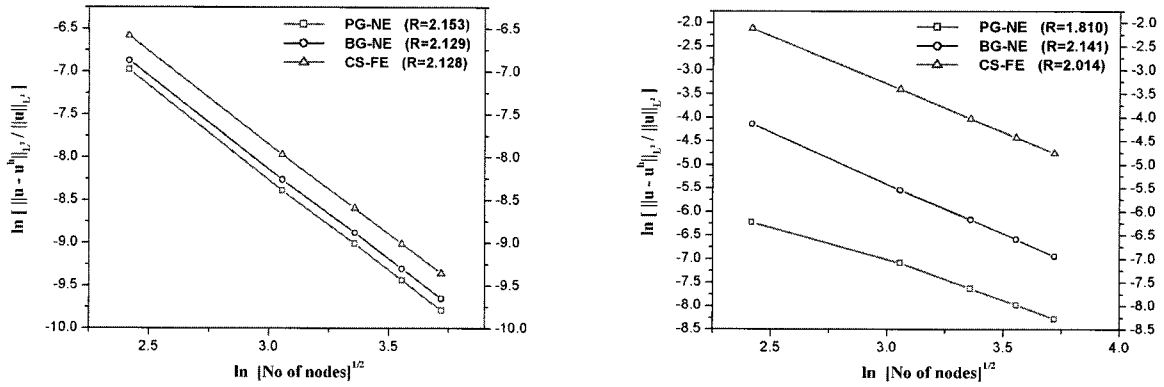
#### 4. 외팔 보 문제

그림 4에 끝단에 전단하중(shear load)이 작용하는 외팔 보를 도시하였다. 이 문제에 대한 이론해는 Timoshenko와 Goodier(1970)의 참고문헌에 주어져 있다.

외팔 보 문제의 해석을 위해 경계조건에 따라 다음의 2가지 모델을 도입한다. 첫번째 모델(Case 1)은 필수경계(essential boundary)조건만을 적용한 것으로 그림 4(a)에 정의된 경계  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$  모두에 이론해에서 구해진 변위를 부여한다. 두 번째 모델(Case 2)은  $\Gamma_1$ 에 Case 1과 동일한 필수경계조건을 부여하고,  $\Gamma_2$ 에는 이론해에서 제시하는 표면력(surface traction)을 부여한다. 수치해석을 위한 치수로  $L=4m$ ,  $D=1m$ ,  $P=-10^4N$ 을 적용하고, 평면응력 조건으로 가정한다.

수렴성 검증을 위해 동일한 절점 간격  $h$ 를 가지는 균일한 절점분포를 적용하며,  $h=0.2, 0.1, 0.075, 0.06, 0.05m$ 의 다섯 가지 경우에 대해 해석을 수행한다. 그림 4(b)에 해석에 사용한 절점분포의 예를 도시하였다( $h=0.1, 451$ 절점). 그림 5와 그림 6에 각각  $L^2$  상대오차 놈 및 에너지 상대오차 놈에 대한 수렴 그래프를 절점 수에 대하여 log-log스케일로 나타내었으며, 수렴율(convergence rate)을  $R$ 로 표시하였다. 그림 5에서 알 수 있듯이 Case 1의  $L^2$  상대오차 놈은 CS-FEM, BG-NEM 및 PG-NEM의 세 방법 모두 거의 동일한 수렴율을 보이지만, 절대적인 정확도 면에서는 PG-NEM이 BG-NEM이나 CS-FEM보다 좋은 결과를 보이고 있다. 한편, Case 2의 경우는 PG-NEM의 수렴율이 나머지 두 방법에 비해 다소 떨어지나, 절대적인 정확도에서 PG-NEM은 다른 두 방법에 비해 현저히 향상된 결과를 제공하고 있다.

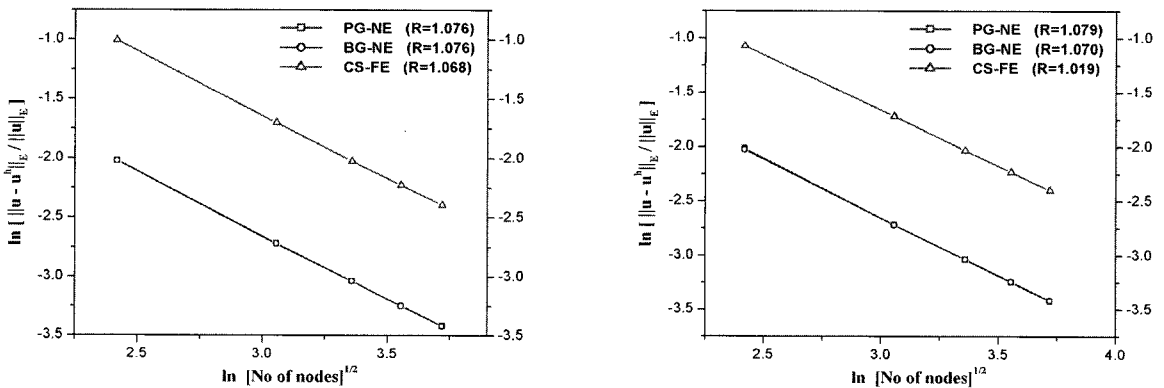
한편, 그림 6에 나타난 에너지 상대오차 놈은 Case 1과 Case 2에서 세 가지 방법 모두 거의 동일한 수렴율을 보여 주고 있지만, 절대적인 정확도면에서 PG-NEM과 BG-NEM이 CS-FEM에 비해 현저히 좋은 결과를 나타내고 있다. 또한, PG-NEM과 BG-NEM의 에너지 상대오차 놈은 거의 동일한 수렴특성을 보여준다. 그림 7에 외팔보의 중앙선



(a) Case 1

(b) Case 2

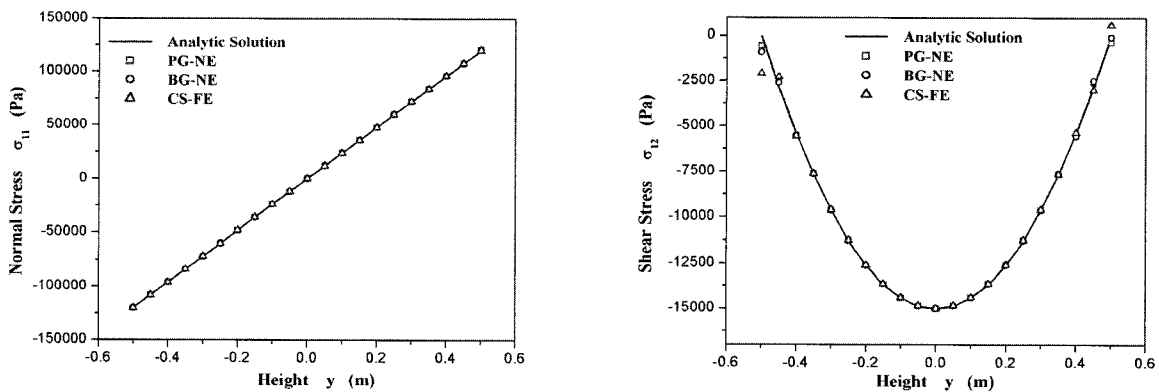
그림 5 Rate of convergence ( $L^2$  error norm)



(a) Case 1

(b) Case 2

그림 6 Rate of convergence (energy error norm)



(a) normal stress

(b) shear stress

그림 7 Stress distribution (Case 2,  $h=0.05m$ )

( $x_1=2.0m$ )에서 이론해와 CS-FEM, BG-NEM 및 PG-NEM의 응력을 비교하였다. 비교를 위한 응력값으로 후 처리된 후의 절점응력을 사용하였다. 그림에서 이론해와 수치해는 매우 잘 일치하고 있으며, PG-NEM, BG-NEM 및 CS-FEM의 수직응력  $\sigma_{11}$ 은 거의 차이를 보이지 않고 있

다. 반면, 전단응력  $\sigma_{12}$ 는 경계( $x_2=\pm 0.5m$ )에 접근할수록 이론해와의 차이가 발생하고, 경계에서의 전단응력 값인 '0'에 가장 가까이 수렴한 해는 PG-NEM임을 알 수 있다. 세 방법 중 CS-FEM의 전단응력이 경계에서 가장 큰 차이를 보이고 있다.

5. 원공을 가진 무한 평판

그림 8에서와 같이  $x_1$  축을 따라 단축 인장(unidirectional tension)을 받는 내부에 원공(circular hole)을 가진 무한 평판(infinite plate)을 고려한다. 그림 8에 도시된 평판은 수치해석을 위해  $x_1$  축과  $x_2$  축 방향으로 각각  $2L$  만큼 잘라낸 모델이며, 좌표의 원점은 내부 원공의 중심에 설정한다. 해석 모델의 대칭성으로 인해 좌표의 1-4분면에 존재하는 영역만을 해석영역으로 설정할 수 있으며, 이 때  $x_1$  과  $x_2$  축 상에 존재하는 경계  $\Gamma_1$ 에는 대칭경계조건을 부여하게 된다. 인장력  $P_0 = 1\text{Pa}$  일 경우의 이론해는 Timoshenko와 Goodier (1970)에 의해 주어져 있으며, 경계  $\Gamma_2$ 에 이론해로부터 계산된 표면력을 부가한다.

이와 같은 문제의 수치해석을 위해 내부 원공의 반경  $a = 1\text{m}$ ,  $L = 5\text{m}$ 를 적용하며, 평면 변형률(plane strain) 조건으로 가정한다. 수렴성 검증을 위해 그림 9에 나타낸 예와 같이 응력 집중(stress concentration)이 발생하는 내부 구멍 주위에 세밀한 절점을 배치한 경우(Case 1)와 해석영역 전체에 규칙적인(regular) 절점을 분포시킨 경우(Case 2)의 두가지 모델을 도입한다.

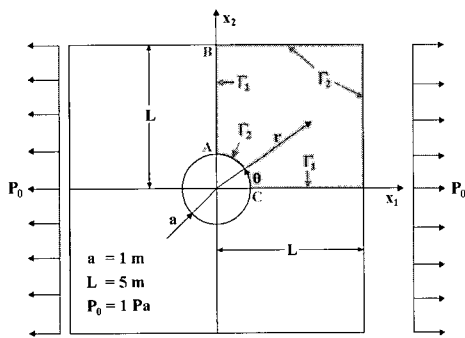


그림 8 Infinite plate with circular hole

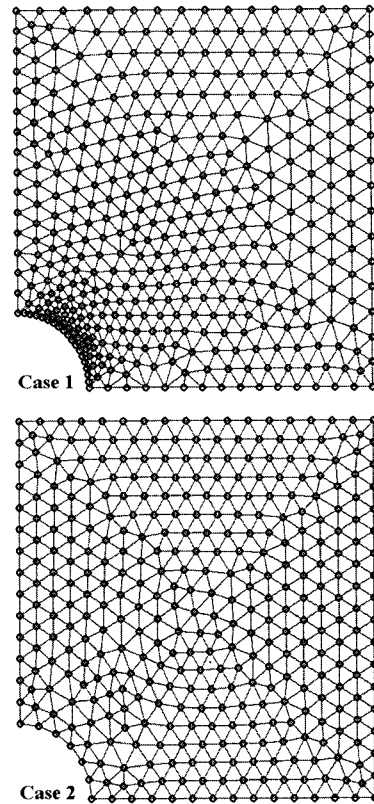
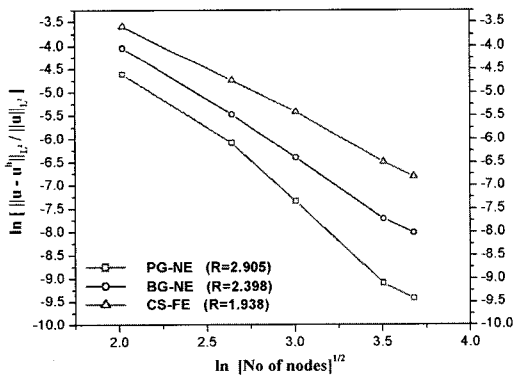
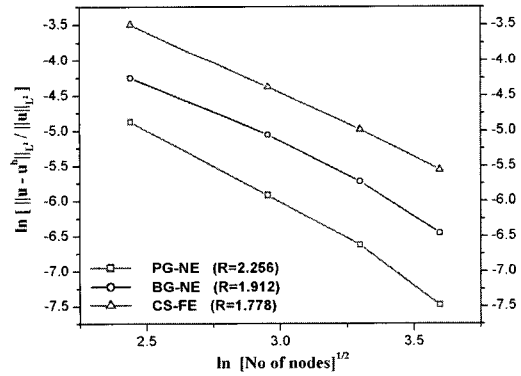


그림 9 Nodal distribution for analysis

그림 10과 그림 11에 각각  $L^2$  상대오차 놈과 에너지 상대오차 놈에 대한 PG-NEM, BG-NEM 및 CS-FEM의 수렴율을 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이  $L^2$ 와 에너지 오차 모두에서 PG-NEM의 수렴율이 가장 크며, 절대적인 정확도에서도 다른 두 방법에 비해 뛰어난 결과를 보이고 있다. 본 문제에 있어서 수렴율 및 절대적인 정확도는 전체적으로 PG-NEM > BG-NEM > CS-FEM의 순서로 정리할 수 있다. 한편, 그림 11의 에너지 오차 그래프에서 BG-NEM의 수렴율이 급속히 나빠지는 구간이 존재하며, 특히



(a) Case 1



(b) Case 2

그림 10 Rate of convergence ( $L^2$  error norm)

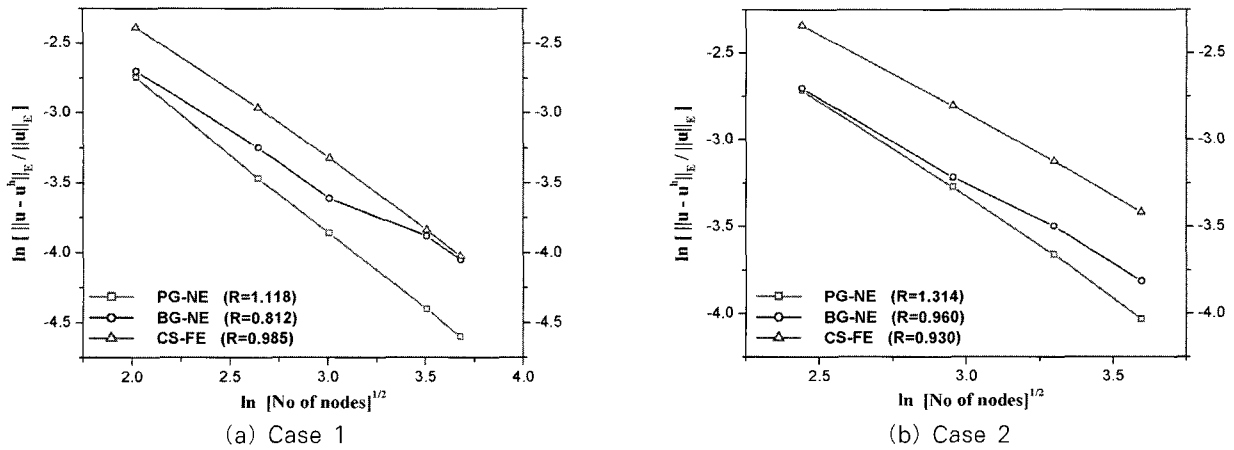


그림 11 Rate of convergence (energy error norm)

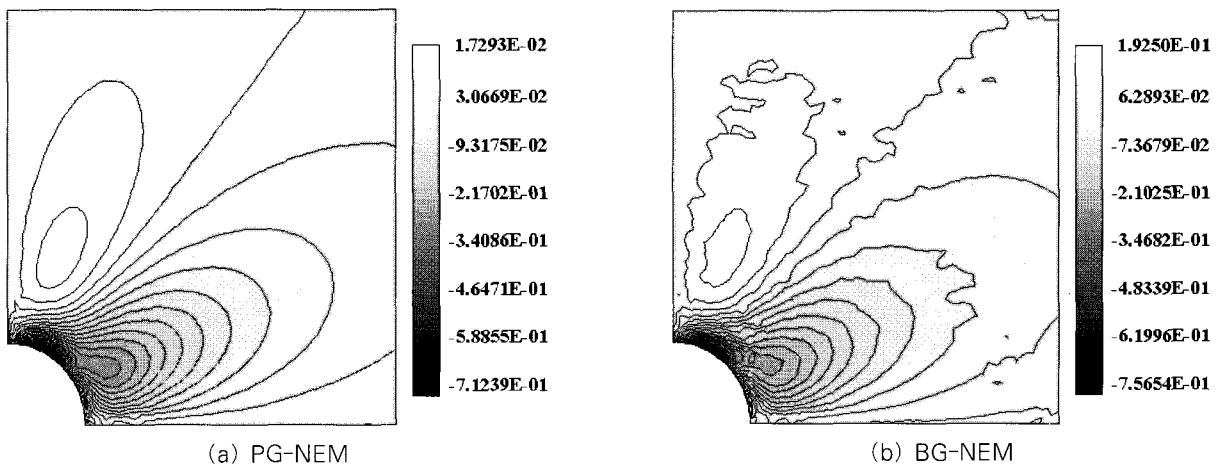


그림 12 Shear stress field ( $\sigma_{12}$ )

Case 1에서 수렴을 저하가 뚜렷하게 관찰되고 있다. 이러한 현상은 Cueto 등(2002)의 논문에서 언급한 것과 같이 수치적분 과정에서 발생하는 오차가 주 원인이 되며, 해석 결과의 전반적인 수렴율에 영향을 미치므로 절점수를 증가시키는 경우에도 수렴율의 저하는 그대로 유지되고 있음을 알 수 있다. 반면, PG-NEM에서는 모든 경우에 점근적 수렴이 보장되고 있으며, 이는 델라우니 삼각형을 이용한 시험 형상함수의 적용으로 인해 수치적분 오차의 대부분이 제거되었음을 의미한다. 따라서, PG-NEM은 CS-FEM에 비해 수렴율과 절대적인 정확도 면에서 향상된 결과를 제공할 뿐만 아니라, BG-NEM이 내재하고 있는 적분오차의 발생 위험을 거의 대부분 억제시키고 있다. 이와 같이 BG-NEM의 적분오차로 인한 문제점과 PG-NEM의 향상된 결과는 그림 12-13의 전단응력 및 국부 에너지 오차의 분포도로부터 더욱 분명히 확인할 수 있다. 그림 12에 Case 1(1569 절점)의 전단응력( $\sigma_{12}$ )를 나타내었다. BG-NEM의 경우 전

체 영역에 걸쳐 PG-NEM에서는 발생하지 않는 떨림 현상이 뚜렷이 나타나고 있다. 한편, 그림 13(b)에서 나타낸 BG-NEM의 에너지 오차 분포에서 평판의 대각선 방향으로 큰 오차가 관찰되고, 특히 응력 집중이 발생하는 내부 구멍에 근접할수록 오차의 크기가 급격히 상승하고 있다. 이러한 현상들은 PG-NEM에서는 나타나지 않으며, 이는 BG-NEM의 수치적분과정에서 발생하는 오차가 전체 해석결과에 심각하게 영향을 미치고 있다는 것을 다시 한번 확인하게 한다. 이상의 결과들로부터 PG-NEM은 응력 및 국부 에너지 오차 분포면에서도 가장 안정적인 결과를 제공하고 있음을 알 수 있다. 그림 14에서 그림 8의 경계 A-B를 따른 수직응력( $\sigma_{11}$ )과 곡선 경계 C-A에서의 등가응력( $\sigma_{eff}$ )에 대하여 이론해와 PG-NEM, BG-NEM 및 CS-FEM의 결과를 비교하였다. 그림에서 알 수 있듯이 PG-NEM의 결과가 나머지 두 방법 결과보다 이론해에 근접한 응력 분포를 보여주고 있다.

6. 결 론

PG-NEM의 정확도와 수렴성 검증을 위해 2차원 탄성체에 대한 검증 문제에 적용하여 BG-NEM과 CS-FEM의 결과와 비교 분석하였다. 먼저, 조각시험으로부터 PG-NEM의 수치적분 오차는 BG-NEM에 비해 현저히 감소되었음을 확인하였다. 조각시험에서 BG-NEM은  $L^2$ 상대오차 놈과 에너지 상대오차 놈이 각각  $10^{-3}$ 과  $10^{-2}$ 의 정확도를 가지는 반면, PG-NEM은 두 오차 놈이 기계 정확도인  $10^{-16}$ 에 근접한 결과를 보여준다. 이는 PG-NEM이 기존의 유한요소법과 마찬가지로 조각시험을 통과하였음을 의미한다. 다음으로 외팔 보와 내부 원공을 가진 무한평판 문제를 통하여 PG-NEM의 수렴율과 정확도가 BG-NEM이나 CS-FEM 보다 훨씬 향상되었음을 알 수 있었다. 또한, 응력 및 국부 에너지 오차 분포를 가시화하여 BG-NEM에서 수치적분 오차가 해석결과에 어떠한 영향을 미치는 지를 관찰하고, PG-NEM에서는 이러한 BG-NEM의 문제점이 더 이상 발생하지 않는 것을 확인할 수 있었다.

이상의 수치해석 결과를 바탕으로 PG-NEM의 장점을 다음과 같이 정리할 수 있다.

약 형식의 수치적분에서 델라우니 삼각형을 배경격자로 사용하는 BG-NEM의 가장 큰 문제점은 적분영역과 적분함수의 지지영역이 일치하지 않는다는 것이다. 이러한 영역의 불일치는 심각한 적분오차를 유발하며, 이로 인해 BG-NEM은 조각시험을 통과하지 못하고 점근적 수렴을 보장할 수도 없다. 반면, PG-NEM은 델라우니 삼각형 기반의 시험형상함수를 도입함으로써 이러한 문제점의 완벽한 역제가 가능하게 되었다. 즉, PG-NEM은 조각시험을 통과하였으며, 검증 문제의 해석에서 점근적 수렴이 보장됨을 확인할 수 있다.

이와 같은 PG-NEM은 대부분의 갤러킨 기반의 무요소법에서 가장 관심을 가지고 있는 필수경계조건의 처리와 수치적분 정확도에 대한 문제점을 동시에 해결하는 방안을 제시하고 있다.

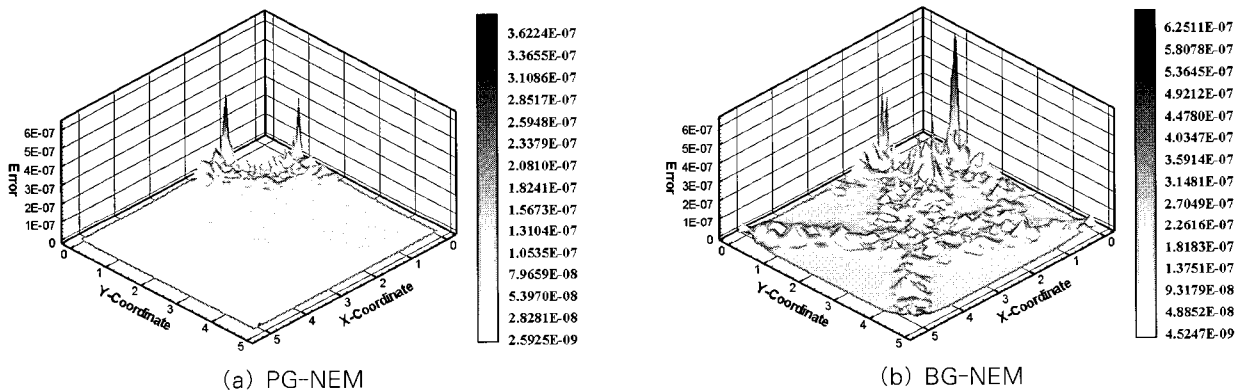


그림 13 Point-wise energy error norm(Case1, 1569 nodes)

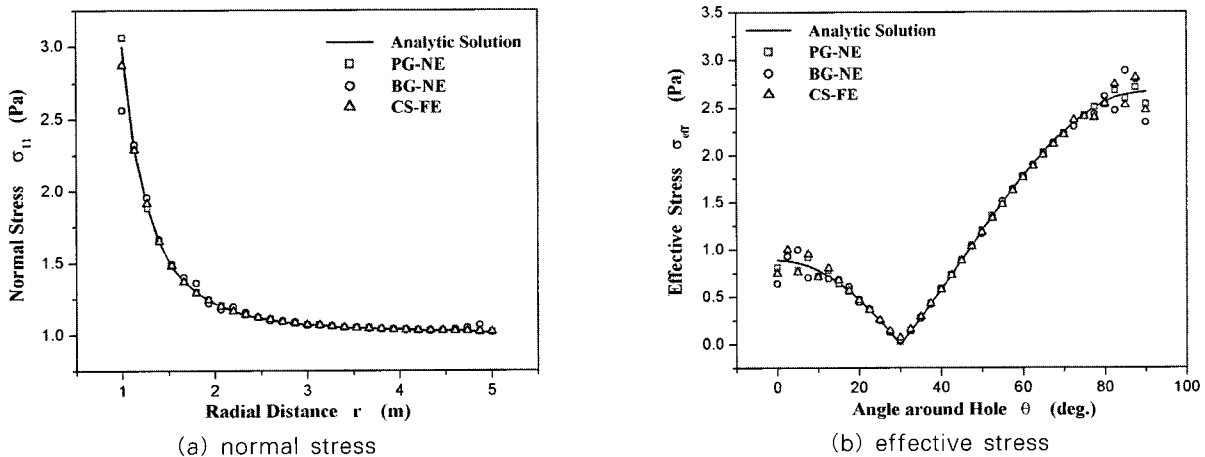


그림 14 Stress distribution (Case1, 1569 nodes)



### 감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지역혁신 인력양성사업(2003.6-2006.4)의 연구결과로 수행되었음.

### 참고 문헌

- 이홍우, 조진래(2005) 페트로프-갤러킨 자연요소법 ; 1. 개념, *한국전산구조공학회 논문집*, 18(2), pp.103~112
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L.(1994) Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256
- Cueto, E., Calve, B., Doblare, M.(2002) Modeling three-dimensional piece-wise homogeneous domains using the  $\alpha$ -shape-based natural element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, pp.871~897
- Dolbow, J., Belytschko, T.(1999) Numerical integration of the Galerkin weak form in mesh-free methods, *Computational mechanics*, 23, pp.219~230
- Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F.(1995) Reproducing kernel particle methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20, pp.1081~1106
- Sukumar, N., Moran, B., Belytschko, T.(1998) The natural element method in solid mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, pp.839~887
- Sukumar, N., Moran, B., Yu Semenov, A., Belikov, V.V.(2001) Natural neighbor Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp.1~27
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.(1970) *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.(1989) *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw Hill, Singapore