

자동차 부싱에 대한 Pipkin-Rogers 모델의 실험적 연구

김성진*, 이수용*, 이성범#

An Experimental Study of Pipkin-Rogers Model for Automotive Bushing

Sung Jin Kim*, Su Young Lee* and Seong Beom Lee#

ABSTRACT

An automotive bushing is a device used in automotive suspension systems to reduce the load transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is a hollow cylinder, which is bonded to a solid steel shaft at its inner surface and a steel sleeve at its outer surface. The relation between the force applied to the shaft and the relative deformation of a bushing is nonlinear and exhibits features of viscoelasticity. In this paper, an automotive bushing is regarded as nonlinear viscoelastic incompressible material. Instron 8801 equipment was used for experimental research and ramp-to-constant displacement control test was used for data acquisition. Displacement dependent force relaxation function was obtained from the force extrapolation method and expressed as the explicit combination of time and displacement. Pipkin-Rogers model, which is the direct relation of force and displacement, was obtained and comparison studies between the experimental results and the Pipkin-Rogers results were carried out.

Key Words : Automotive bushing (자동차 부싱), Nonlinear viscoelastic incompressible material (비선형 점탄성 비압축성 물질), Force relaxation function (힘 완화함수), Force extrapolation method (힘 외삽법), Pipkin-Rogers model (핍킨-라저스 모델)

기호설명

$R(\Delta, s)$ = displacement-dependent force relaxation function

Δ = displacement

s = time

t = present time

T^* = rise time

1. 서론

자동차의 여러 가지 성능 중에서 주행 중의 편안함과 조종 시 차량의 신뢰성을 좌우하는 승차감 및 조종 안정성은 현가장치에 의하여 확보되어야 할 동적 성능이다. 이러한 현가장치는 차체중량을 지지함과 동시에 불규칙한 노면 등에 의한 휠의 상하진동을 완화하여 진동이 차체에 직접 전달되는 것을 방지한다. 또한, 노면과 휠의 이상적인 접촉을 유지하고 차체의 자세를 최적화하도록

접수일: 2005년 6월 29일; 게재승인일: 2005년 9월 9일

* 인제대학교 대학원 기계공학과

교신저자: 인제대학교 기계자동차공학부

E-mail mechlsb@inje.ac.kr Tel. (055) 320-3667

설계된다. 자동차의 현가장치에서 부싱을 통하여 전달되는 힘은 부품의 피로수명 예측, 차량의 승차감 및 동특성에 직접 관련되어 매우 중요한 역할을 하고 있다. 따라서, 정확한 부싱의 모델링 및 이에 대한 실험 연구는 자동차 현가장치의 Dyna-mics simulation 을 위하여 필수적이다. 특히, 현가장치의 동역학적 현상을 정확히 예측하는데 있어서, 간단하면서도 정확한 부싱 모델은 매우 중요하다고 할 수 있다. 부싱은 바깥쪽의 실린더 형 슬리브와 안쪽의 실린더 형 축 사이에서 가운데가 완전히 비어있는 실린더의 형태를 가지며, 미국 미시간 대학교 기계공학과의 자동차 구조 내구성 센터 (Center for Automotive Structural Durability Simulation) 에서 수행한 일차원 반경방향 변위제어 실험(One-dimensional radial displacement control test) 결과, 부싱은 힘과 변위와의 관계로 모델링되며, 비선형성, 비선형성, 점탄성 성질을 가짐이 확인되었다.¹

점탄성에 대한 연구는 Boltzmann 으로부터 시작되었으며,² Adkins 와 Gent 는 원통형 고무부싱에 대해 여러 가지 실험을 통하여 힘과 변위와의 관계를 발전시켰다.³ 하지만 이 연구는 선형 탄성이론을 적용하여 비선형성과 시간에 의존하는 점탄성 성질에 관해서는 설명하기가 어려웠다. Coleman 과 Noll 은 등방성 점탄성 고체에 대한 3 차원 구성방정식을 완성하였으며,⁴ McGuirt 와 Lianis 는 styrene-butadiene rubber 에 대한 실험을 통하여 비선형 점탄성 구성방정식을 완성하였다.⁵ Morman, Kao, Nagteggal 은 부싱을 비선형 점탄성 고체로서 모델링하였으며, 변형을 해석하기 위하여 유한요소법을 제안하였다.⁶ 부싱에 대한 연구는 Wineman, VanDyke, Shi 에 의하여 기초적인 이론이 정리되었으며,⁷ Lee 에 의하여 부싱의 비선형 점탄성 모델링에 대한 연구가 계승되어 왔다.⁸ 한편, Lee 의 부싱 연구는 기초 데이터를 얻는 과정에 있어서 실험에 의존하지 않고, Lianis 구성방정식을 이용하여 회전방향모드와 반경방향모드에 대하여 Lianis 모델을 이용한 이론적인 방법을 통하여 비선형 점탄성 모델링을 수행하였다.^{9,10}

본 연구에서는 실험을 통하여 부싱의 축 방향 모드에 대한 힘과 변위의 관계를 고려하였으며, 폴리머의 비선형 점탄성 모델로 Pipkin 과 Rogers 에 의하여 제안된 식을 사용하였다. Pipkin 과 Rogers 에 의하여 제안된 식을 부분 적분법을 이용하여 정리하면 힘과 변위의 관계는 다음과 같다.¹¹

$$F(t) = R(\Delta(0), t) + \int_0^t \frac{\partial R(\Delta(s), t-s)}{\partial \Delta(s)} \frac{d\Delta(s)}{ds} ds \quad (1)$$

$R(\Delta, t)$ 는 시간이 0 일 때, 변위가 Δ 의 크기로 점프하여, 시간이 지남에 따라 일정한 Δ 값을 갖는 스텝 변위(step displacement)가 주어졌을 때 힘 $F(t)$ 가 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로, 이를 변위에 의존하는 힘 완화함수 (Displacement-dependent force relaxation function)라 일컫는다. Pipkin-Rogers 모델이라 일컫는 식(1)은 힘과 변위의 직접 관계식으로 계산과 이용에 있어 편리한 장점을 가지고 있다.

본 연구는 실제 자동차 부싱을 이용하여 축 방향 실험을 수행함으로써, 비선형 점탄성 모델을 완성하였다. 실험을 통하여 얻어진 데이터를 바탕으로 부싱의 변위에 의존하는 힘 완화함수를 구하여, 비선형 점탄성 부싱 모델인 Pipkin-Rogers 모델을 완성하였고, 이를 실험 결과와 비교하여 검증하였다.

2. 실험을 통한 비선형 점탄성 모델링

본 연구에서는 자동차에서 사용되고 있는 부싱을 실험 샘플로 사용하였으며, 이는 가운데가 비어있는 실린더형태로 축 방향 대칭이다. 본 연구에서는 Instron 8801 만능재료 피로 시험기를 이용하여 ramp-to-constant displacement control test 를 수행하고 데이터를 획득하였다. 부싱에 대한 실험은 실험조건에 따라 그 결과가 민감하게 좌우되므로, 실험조건(온도, 상대습도) 및 부싱의 상태를 검토하여 많은 실험을 통하여 필요한 데이터를 획득하였다. 즉, $d_i = 3, 4, 5, 6, 7\text{mm}$ 의 변위를 이용하여 rise time (T_r^*)을 1, 2, 4, 8 sec.로 증가시키면서 각각의 경우에 대하여 $t=120$ sec. 까지 데이터를 획득하였다. 주어진 실험의 변위 입력값은 식(2)와 같으며, 여기에서 rise time (T_r^*)은 변위가 일정한 기울기로 증가하다가 일정한 값으로 바뀌는 시점에서의 시간을 일컫는다.

$$\begin{aligned}
 d(t) &= \frac{d_i}{T_j^*} t, & 0 \leq t \leq T_j^* \\
 &= d_i, & T_j^* \leq t \leq 120 \text{ sec.} \\
 i &= 1, 2, 3, 4, 5 & j = 1, 2, 3, 4 \\
 \begin{cases} d_i &= 3, 4, 5, 6, 7 \text{ mm} \\ T_j^* &= 1, 2, 4, 8 \text{ sec.} \end{cases} & (2)
 \end{aligned}$$

본 실험에 사용된 부싱의 실험 샘플과 Instron 8801 실험 장비는 Fig. 1 과 Fig. 2 에 각각 나타내었다.

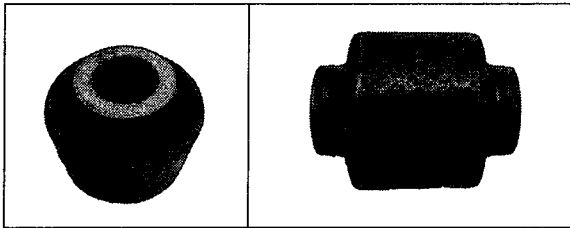


Fig. 1 Bushing specimen

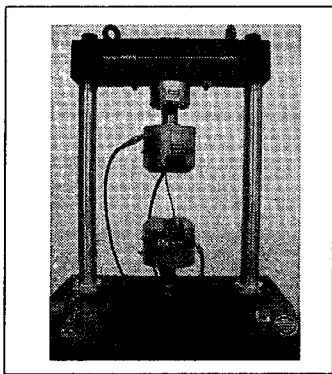


Fig. 2 Instron 8801 Testing system

실험에 사용된 load cell 용량으로는 1ton(10kN)을 사용하였다. 실험조건으로 온도 23~25℃, 상대습도는 45~50% 이며, 얻어진 각각의 실험 데이터는 Figs. 3,4,5,6,7 과 같으며, $d_i=3,4,5,6,7\text{mm}$ ($T_j^*=1,2,4,8\text{sec.}$)에 대한 force output 을 각각 나타내고 있다.

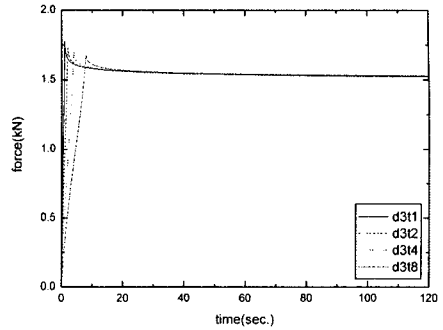


Fig. 3 Force output for $d_i=3\text{mm}$ (from exp.)

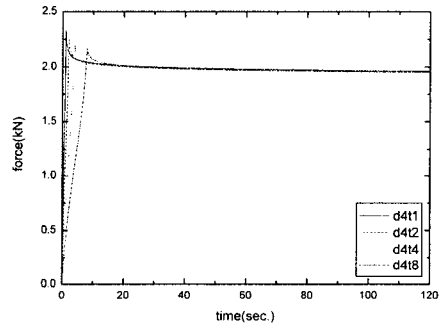


Fig. 4 Force output for $d_i=4\text{mm}$ (from exp.)

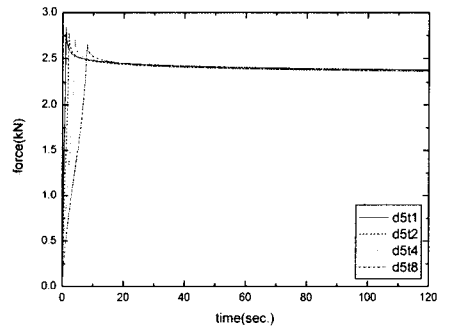


Fig. 5 Force output for $d_i=5\text{mm}$ (from exp.)

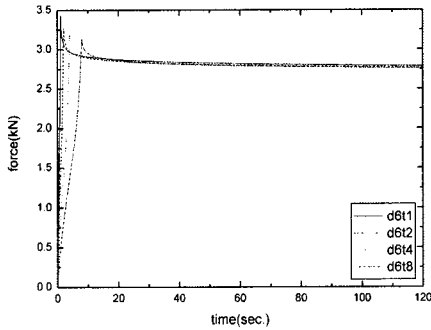


Fig. 6 Force output for $d_i = 6\text{mm}$ (from exp.)

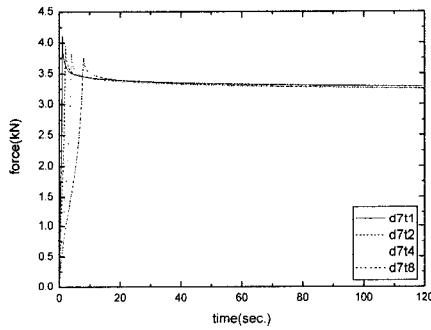


Fig. 7 Force output for $d_i = 7\text{mm}$ (from exp.)

Figs. 3,4,5,6,7 의 실험 데이터 값들로부터 force extrapolation method⁸ 를 이용하여 각각의 변위 입력 값에 대한 힘 완화함수를 구하였으며, 이는 Fig. 8 과 같다.

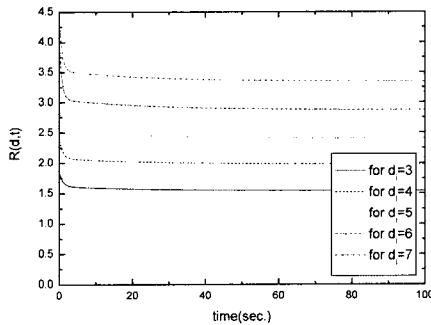


Fig. 8 Displacement-dependent force relaxation functions for $d_i = 3,4,5,6,7\text{mm}$

이는 변위에 의존하는 힘 완화함수(displacement-dependent force relaxation function)라 불리우며, 이 데이터를 이용하여 자동차 부싱의 비선형 점탄성 모델인 Pipkin-Rogers 모델을 완성하였다.

힘 완화함수는 대칭성(symmetry)에 의하여 변위의 홀수승으로 표현이 가능하므로 아래의 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.⁷

$$R(d, t) = dG_1(t) + d^3G_3(t) \quad (3)$$

그리고 $0 < t_i \leq 60\text{sec.}$ 에 대하여, 선형 최소자승법(linear least squares method)을 이용하여 Fig. 9에서와 같이 $G_1(t_a)$ 와 $G_3(t_a)$ 를 구하였다.

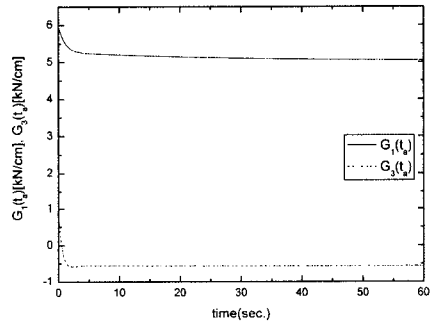


Fig. 9 Coefficients : $G_1(t_a), G_3(t_a)$

또한 $G_1(t_a)$ 와 $G_3(t_a)$ 는 다음과 같이 지수함수의 합으로 표현할 수 있다.

$$G_i(t) = C_{i1} + C_{i2}e^{-t/\tau_{i2}} + C_{i3}e^{-t/\tau_{i3}} + C_{i4}e^{-t/\tau_{i4}} \quad (4)$$

where $i = 1,3$

식(4)에 비선형 최소 자승법(nonlinear least squares method)을 이용하여,¹² C_{ij} 와 τ_{ij} 를 구한 후, $G_1(t)$ 와 $G_3(t)$ 의 함수를 구하였으며, $G_1(t)$ 의 $G_1(t_a)$ 에 대한 상대오차는 0.015%, $G_3(t)$ 의 $G_3(t_a)$ 에 대한 상대오차는 0.98%로 하여, $G_1(t)$, $G_3(t)$ 를 완성하였다. 자동차 부싱의 축 방향 모드에 대하여 완성된 Pipkin-Rogers 모델은 식(5)와 같다.

$$F(t) = R(d(0), t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial R(d(s), t-s)}{\partial d(s)} \frac{d}{ds} (d(s)) \right\} ds \quad (5)$$

where

$$R(d(s), t) = [C_{11} + C_{12}e^{-t/\tau_{12}} + C_{13}e^{-t/\tau_{13}}]d(s) + [C_{31} + C_{32}e^{-t/\tau_{32}} + C_{33}e^{-t/\tau_{33}} + C_{34}e^{-t/\tau_{34}}][d(s)]^3$$

$$C_{11} = 0.502, \quad C_{12} = 0.036, \quad C_{13} = 0.071$$

$$\tau_{12} = 38.115, \quad \tau_{13} = 1.011$$

$$C_{31} = -0.057, \quad C_{32} = 2.061, \quad C_{33} = -1.918, \quad C_{34} = 0.008$$

$$\tau_{32} = 0.315, \quad \tau_{33} = 0.301, \quad \tau_{34} = 0.013$$

3. 비선형 점탄성 모델의 오차 해석

Pipkin-Rogers 모델의 유용성을 입증하고자 실험을 통해 얻어진 결과와 Pipkin-Rogers 모델의 결과를 $0 < t_i \leq 120 \text{sec}$. 동안 각각의 변위 입력값에 대해 norm(2-norm)의 개념을 바탕으로 아래의 식(6)을 이용하여 상대오차(E)를 확인하였다.

$$E = \frac{\|(\text{the Pipkin-Rogers output}) - (\text{Experiment result})\|_2}{\|(\text{Experiment result})\|_2} \times 100\% \quad (6)$$

Figs. 10,11,12,13,14 는 $T^* = 1 \text{ sec}$.에 대하여 $d_i = 3,4,5,6,7 \text{mm}$ 의 Pipkin-Rogers 모델과 실험결과의 force output 을 나타내었으며, 이것은 실험결과에

대하여 Pipkin-Rogers 모델이 근접한 결과를 보여주고 있는 것을 알 수 있다.

동일한 방법으로 $d_i = 3,4,5,6,7 \text{mm}$, $T_j^* = 1,2,4,8 \text{sec}$.에 대한 상대오차 E는 Table 1에 나타내었다.

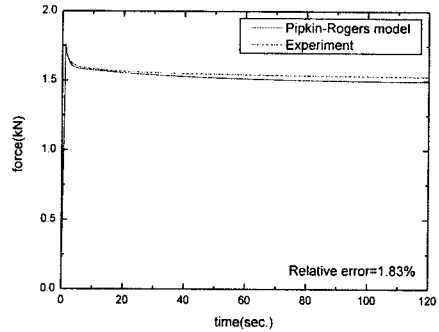


Fig. 10 Comparison of force output for $d_i = 3 \text{mm}$, $T_j^* = 1 \text{sec}$.

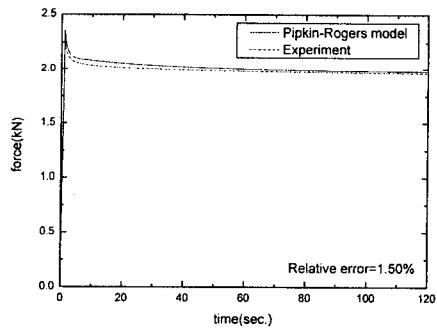


Fig. 11 Comparison of force output for $d_i = 4 \text{mm}$, $T_j^* = 1 \text{sec}$.

Table 1 Relative errors of the Pipkin-Rogers model to the experimental results

time(sec.) displacement(mm)	$T^* = 1$	$T^* = 2$	$T^* = 4$	$T^* = 8$
d = 3	1.83%	1.65%	1.67%	1.90%
d = 4	1.50%	2.03%	2.11%	2.06%
d = 5	3.11%	3.63%	3.85%	3.90%
d = 6	4.39%	5.12%	5.62%	5.80%
d = 7	2.01%	2.36%	3.38%	3.62%

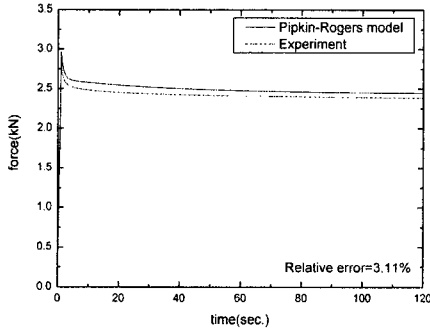


Fig. 12 Comparison of force output for $d_i=5\text{mm}$, $T_j^*=1\text{sec}$.

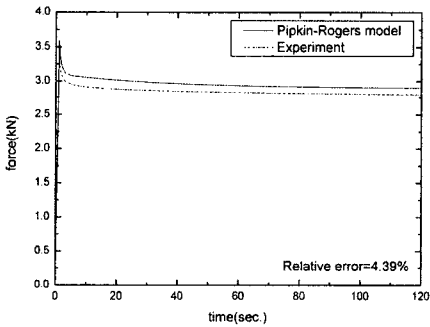


Fig. 13 Comparison of force output for $d_i=6\text{mm}$, $T_j^*=1\text{sec}$.

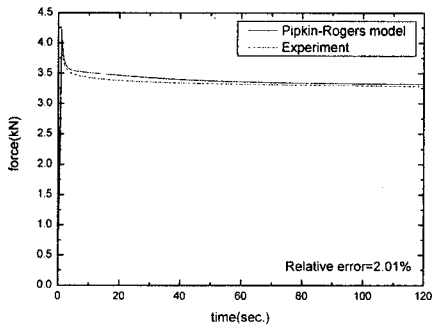


Fig. 14 Comparison of force output for $d_i=7\text{mm}$, $T_j^*=1\text{sec}$.

따라서, Pipkin-Rogers 모델의 변위제어 모의실험 결과는 실제실험결과에 대하여 6%미만의 상대 오차를 보였다. 오차원인으로는 장비를 이용한 실험 수행 시, 정확한 ramp-to-constant displacement input 이 불가능하였으며, 이로 인하여 발생한 force output 의 overshoot 현상을 생각할 수 있다. 또한, 정확한 힘 완화함수를 얻기 위해서는 step displacement control test 를 수행하여야 하나, 이는 장비 자체의 초기 관성력 등 여러 가지 실험조건에 의하여 수행이 불가능하고, 이에 의한 오차가 발생할 수 있으며, force extrapolation method 로 정확한 값을 얻기 위해서는 rise time 이 1 sec.미만의 실험 데이터가 필요하지만, 장비의 실험적인 한계성 때문에 실험데이터의 부족으로 인한 오차가 거론될 수 있다. 그리고 부상 실험시편 형상과 치수의 일관성 문제와 실험시의 온도와 습도에서 발생하는 오차가 예상된다.

4. 결론

본 연구에서는 자동차 부상의 축 방향 모드에 대하여 실제 차량에 장착되고 있는 부상을 이용하여 ramp-to-constant displacement control test 를 수행하였으며, 실험 데이터를 바탕으로 force extrapolation method 를 이용하여 displacement-dependent force relaxation function 을 완성하였고, 이로부터 힘과 변위와의 직접관계식인 Pipkin-Rogers 모델을 얻었다. 이렇게 완성된 힘과 변위의 직접 관계식인 Pipkin-Rogers 모델은 실제 실험과 동일한 변위 제어 모의실험을 통하여 그 결과를 실험에 의한 결과와 비교하였으며, 이는 Table 1 과 같이 상대오차 6%미만으로 본 비선형 점탄성 모델이 신뢰도를 가지고 있음을 알 수 있다.

본 연구는 실험적 연구로 자동차 부상에 대하여 비선형 점탄성 모델링을 실험을 바탕으로 수행하였으며, 완성된 Pipkin-Rogers 모델은 동일한 부상에 대해서 실험을 통하지 않고도 사용될 수 있다. 또한, 구하여진 Pipkin-Rogers 모델은 부상의 기본 모드인 축 방향 모드에서 잘 적용되는 것이 증명되었다. 추후 본 연구에 사용된 부상을 사용하여 반경방향에 대하여 실험을 수행할 예정이며, 축 방향과 반경방향을 고려한 Pipkin-Rogers 모델을 차량 동역학 해석에 적용할 수 있는 방안에 대하여 연구할 계획이다.

후 기

이 논문은 2004 년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-002-D00017).

참고문헌

1. Ford Durability Center at The University of Michigan Project Review, 1995.
2. Boltzmann, L., "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkungen," Sitzungsber. Kai-serlich Akad. Wissen Math. Naturwissen, Vol. 70, pp. 275, 1874.
3. Adkins, J. E. and Gent, A. N., "Load-deflection relations of rubber bush mountings," British Journal of Applied Physics, Vol. 5, pp. 354, 1954.
4. Coleman, B. D. and Noll, W., "Foundations of Linear Viscoelasticity," Reviews of Modern Physics, Vol. 33, pp. 239, 1961.
5. McGuiert, C. W. and Lianis, G., "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations," Transactions of the Society of Rheology, Vol. 14:2, pp. 117, 1970.
6. Morman, K. N., Kao, B. G. and Nagtegaal, J. C., "Finite Element Analysis of Viscoelastic Elastomeric Structures Vibrating About Nonlinear Statically Stressed Configurations," Fourthe International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Society of Automotive Engineers, Detroit, Michigan, pp. 83, 1981.
7. Wineman, A. S., VanDyke, T. and Shi, S., "A nonlinear viscoelastic model for one dimensional response of elastomeric bushings," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 40, pp. 1295, 1998.
8. Lee, S., "A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response," Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1997.
9. Lee, S., "A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model for Elastomeric Bushing in Torsional Mode," J. of the KSPE, Vol. 16, No. 2, pp. 194-200, 1999.
10. Lee, S., Choi, J. and Min, J., "A Study of A nonlinear Viscoelastic Model for Elastomeric Bushing in Radial Mode," J. of the KSPE, Vol. 20, No. 5, pp. 204-209, 2003.
11. Pipkin, A. C. and Rogers, T. G., "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior," J. of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 59, 1968.
12. Dennis, J. E., "Nonlinear Least Squares and Equations," The State of the Art in Numerical Analysis, Academic Press, New York, 1977.