

# 기어-시스템의 동특성에 대한 연구

이형우<sup>#</sup>, 박노길<sup>\*</sup>

## A Study on Dynamic Characteristics of Gear-System

Hyoung Woo Lee<sup>#</sup> and No Gill Park<sup>\*</sup>

### ABSTRACT

The vibration problems associated with gear coupled rotors have been the focus of much engineering work. These systems are complex and difficult to analyze in that they have the problems associated with conventional rotors plus those additional problems associated with the gear couplings. This paper examines the problems peculiar to the gear mesh. Because of the meshing action of gears, the elasticity of the gear teeth introduces time-varying stiffness coefficients into the governing equations of motion. This means that system response must be thought of in terms of Mathieu-type equations, where multiple-frequency response occur due to the periodic coefficients. The meshing action of the gears also couples the lateral and torsional gear motions. Gear errors, such as tooth profile and spacing errors, produce forces and torque that excite the system at multiple frequencies, some of which are much higher than shaft rotational speed. To investigate how the time-varying stiffness in the gear teeth and the gear errors act on the dynamic response of the gear coupled rotors, a three-dimensional dynamic model with lateral-torsional oscillation is developed. The harmonic balance technique is employed to solve this mathieu-type problem.

**Key Words** : Gear errors(기어오차), Tooth profile (기어 치형), Oscillation(진동), Harmonic Balance(조화균형법), Time varying stiffness(치형강성도의 시간적 변화)

### 1. 서론

기계가 대형화되고 운전속도가 고속화되며 설계의 최적화가 이루어짐에 따라 상대적으로 소음 및 피로파괴와 같은 진동에 의한 제반문제들이 증가하는 것은 필연적인 결과이다. 기어박스에서 소

음은 대부분 회전기계가 갖고 있는 문제들 중의 하나로서 오랫동안 관심을 가지고 연구되고 있다. 기어 감속기, 증속기 및 기어 전동기를 포함한 모든 기어장치를 지칭하는 기어-시스템(Gear-System)은 산업기계에서 차지하는 비중이 상당한 만큼, 발생하는 제반문제들은 시급히 규명되고 해결되어야

<sup>1)</sup> 접수일: 2005 4월 22일; 게재승인일: 2005년 9월 9일

<sup>#</sup> 교신저자: 부산대학교 기계기술연구소

E-mail rotor@dreamwiz.com Tel. (051) 510-1475

<sup>\*</sup> 부산대학교 기계공학부

할 것이다. 지금까지 많은 연구들이 기어-시스템의 진동해석을 위해 진행되어 왔으나, 대체로 부분적인 분야, 즉 기어치형강성도의 해석 혹은 치형전달오차 (gear transmission error)의 해석에 관한 연구에 치중하고 있다.<sup>14</sup> 이들의 연구결과는 기어-시스템에서의 진동문제 개선에 유용한 정보를 제공해 줌으로서, 연구 발전에 많은 기여를 해 왔다. 그러나 기어-시스템의 기능이 점점 다양해지고 구조가 복잡해짐에 따라 부분적인 해석으로는 진동의 제반문제들을 종합적으로 진단하는데 한계를 가지고 있다. 따라서 컴퓨터를 이용한 기어-시스템의 진동해석을 종합적으로 수행하려는 시도가 요구되고 있다.

기어-시스템은 회전축, 축을 지지하는 베어링 및 기어 쌍으로 구성됨으로 일종의 회전체-동역학 시스템에 속한다. 기어-시스템의 종합적 해석을 위해 가장 세심한 주의를 요하는 것은 치형 접촉부에서의 역학모형을 어떻게 선정하느냐에 있다. 연구초기에는 치형을 강체로 가정하여 치형 접촉부에서의 영향을 무시하거나 탄성성질을 고려한 역학모형을 선정할 경우가 많았다.<sup>5-8</sup> 실제 관측되는 치형강성도는 기어쌍의 물림위치에 따라 급격히 변하고, 탄성해석의 결과에 의하면 약 50%의 차이를 보이고 있다.<sup>9-12</sup> 치형강성도의 변화로 말미암아 기어시스템의 운동방정식은 시변계수 미분방정식이 되며, 곧 전형적인 Mathieu형 문제에 속한다.<sup>13</sup> 따라서 실제 실험결과에서 보여지는 소음스펙트럼은 Mathieu형 문제가 가지고 있는 불안정성으로 설명 가능할 것으로 예측된다. 또, 종래의 단순 모델은 치형 프로파일오차를 무시하고 있다.<sup>14</sup> 그러나 이러한 치형오차는 주기적으로 고주파 자려가진을 진동계에 가하는 결과가 되어 기어-시스템의 소음을 일으키게 되므로, 역학모델에서 치형오차의 영향을 무시할 수 없다.

본 연구에서는 치형강성도의 시간적 변화와 치형 전달오차를 고려한 기어-시스템의 역학 모델을 설정하였고 조화균형법 (Harmonic Balance Method)을 이용하여 시스템응답 특성을 분석하였다. 분석결과, 기어-시스템에서 치형프로파일 오차 및 치형강성도의 시간적 변화가 크게 나타났으며, 이것이 소음의 직접적인 원인 이 됨을 알 수 있었다.

## 2. 기어시스템의 역학 모델

실제 기어시스템은 복잡하게 연쇄된 기어 메커

니즘을 이루고 있는 것이 대부분이나, 해석방법과 그 결과가 일반 기어시스템에로의 적용이 가능하다고 보고, 문제의 단순화를 위해 Fig. 1과 같은 단순 기어-회전체 시스템을 고려하였다.

기어시스템은 베어링, 축, 기어 쌍으로 구성되어 있다. 본 연구에서는 기어 쌍에서의 역학적 영향이 관심이 있으므로, 베어링과 축에 대해서는 가장 간단한 역학모델로 가정하였다. 즉, 베어링은 미끄럼저널 베어링으로 보고 그 역학 모델로서 수직, 수평강성도가 다른 단순스프링으로 보고, 축은 질량을 무시한 탄성체로 가정한다.

베어링의 수평, 수직 강성도를  $K_x, K_y$ , 탄성축에 대한 등가 강성도를  $K_s$ 라 하면, 두 회전축에서 등가강성도  $K_{xx}, K_{yy}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$K_{xx} = \frac{2K_x K_s}{2K_x + K_s} \quad (1)$$

$$K_{yy} = \frac{2K_y K_s}{2K_y + K_s} \quad (2)$$

기어시스템의 역학모델에서 세심한 주의를 요하는 부분은 치형과 치형이 맞물리는 곳이다. 그 이유는 이미 언급한 대로 기어시스템의 소음 발생이 주로 접촉부에서의 복잡한 진동거동에 의한 것으로 예측되고 있기 때문이다.<sup>13</sup>

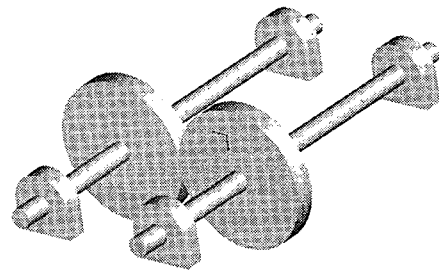


Fig.1 Simple geared rotor system

기어쌍의 역학 모델은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 스프링에 의해 어긋나게 연결된 기초원 크기의 한 쌍의 폴리트로 볼 수 있다. 여기서 치형강성도의 시간적 변화를 고려하기 위하여, Fig. 2의 스프링 강성도를 시간의 함수로 놓으면 하나의 치가 한 피치를 통과하는데 걸리는 시간을 한 주기로 하는 주기함수

임을 알 수 있다. 이 때의 주기를  $\tau$  라 하면 상응하는 주파수는  $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$  가 되며,  $\Omega$  는 치통과 주파수 (tooth-passing frequency)로 불리운다.<sup>15</sup> 여기서  $\Omega$  는 기어 회전체의 회전속도와 기어잇수의 곱으로 표시되며, 기어 잇수가 크고 고속일 경우에  $\Omega$  는 고주파에 속한다. 결국 치형 강성도를 시간의 함수로 표시하면 치통과 주파수를 기초 주파수로 하는 주기함수가 된다. 주기함수는 Fourier급수로 변환 할 수 있으므로 치형 강성도를  $K(t)$ 라 할 때

$$K(t) = K_0 + \sum_{i=1}^N [K_{ic} \cos(i\Omega t) + K_{is} \sin(i\Omega t)] \quad (3)$$

로 표시되며 여기서,  $K_0$ 은 평균 치형강성도,  $K_{ic}$ ,  $K_{is}$ 는 각각 Fourier급수의 계수,  $N$ 은 Fourier급수 부분합의 숫자, 그리고  $t$ 는 시간이다.

모든 기계요소애 그렇듯이, 기어의 치형곡선은 완전한 인벌류터 곡선이 될 수 없다. 제작 또는 설치중에 생성되는 기구학적 오차는 기어 쌍의 속도비를 변화시키고 이러한 동적 변화는 기어 접촉부에서의 동적 접촉력을 유발하여 기어시스템의 고주파 진동을 일으키는 주원인으로 관찰되고 있다.<sup>16</sup> 그러므로 이러한 기어오차에 대한 정확한 측정 혹은 이론해석은 시스템의 진동해석에 직접적으로 영향을 준다. 지금까지 기어오차에 관하여 밝혀진 바에 의하면 기어오차는 치통과주파수를 기초주파수로 하는 주기함수와 유사한 변화를 하며, 또한 소위, “유령주파수 (Ghost Frequency)라 하는 특이한 주파수 응답을 일으키는 요인을 내포하고 있다고 본다.<sup>17</sup> 여기서, 유령주파수는 기어 제작과정에서 사용된 치절 기어의 치형곡선오차에 의하여 기인된 특이한 주파수이다. 따라서 기어오차를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N [e_{ic} \cos(i\Omega_g t) + e_{is} \sin(i\Omega_g t)] + e_{gc} \cos(\Omega_g t) + e_{gs} \sin(\Omega_g t) \quad (4)$$

여기서,  $\Omega_g$ 는 유령주파수이다. 기어 쌍에서의 각 기어들은 독립된 회전체로서 무게 중심의 편심에 의한 원심력이 생기므로 기어시스템의 진동을 유발시킨다.

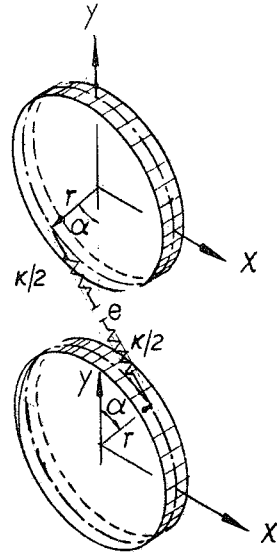


Fig. 2 Dynamic model for a gear pair

### 3. 운동방정식과 조화균형법

베어링, 축, 기어 쌍으로 구성되는 기어시스템의 역학모델을 Fig. 3과 같이 나타 낼 수 있다. Fig. 3의 운동방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$m \ddot{x}_1 + K_{xx} x_1 + F_t \cos \alpha = m e_1 \omega^2 \cos \omega t \quad (5)$$

$$m \ddot{y}_1 + K_{yy} y_1 - F_t \sin \alpha = m e_1 \omega^2 \sin \omega t \quad (6)$$

$$J \ddot{\theta}_1 + F_t r = 0 \quad (7)$$

$$m \ddot{x}_2 + K_{xx} x_2 - F_t \cos \alpha = m e_2 \omega^2 \cos \omega t \quad (8)$$

$$m \ddot{y}_2 + K_{yy} y_2 + F_t \sin \alpha = m e_2 \omega^2 \sin \omega t \quad (9)$$

$$J \ddot{\theta}_2 + F_t r = 0 \quad (10)$$

여기서, 두 기어를 같은 것으로 생각하면,  $m$ 은 기어의 질량,  $J$ 는 기어의 극관성 2차 모멘트,  $\alpha$ 는 기어의 압력각,  $r$ 는 기어의 기초원 반경이다. 기어에 대한 운동으로서  $x_1, x_2$ 는 각각 수평방향운동,  $y_1, y_2$ 는 각각 수직방향운동,  $\theta_1, \theta_2$ 는 각각 회전방향운동을 의미한다.  $\omega$ 는 기어의 회전속도이고,  $e_1, e_2$ 는 편심거리이다.  $F_t$ 는 기어접촉부에서의 전달력을 의미하며, 치형접촉의 기하학적 관계로부터 다음과 같이 정의된다.

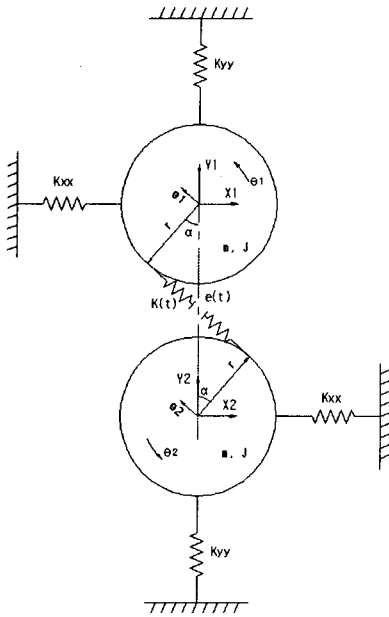


Fig. 3 Dynamic model for simple geared rotor system

$$F_t = K(t)[(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha + (\theta_1 + \theta_2)r - e(t)] \quad (11)$$

식(5)로부터 식(10)에 이르는 운동방정식은 식(11)에 의하여 연립된 선형미분방정식으로 기술된다. 식(11)에서, 치형 강성부에서의 접촉력  $F_t$ 가 기어시스템에 직접적으로 영향을 준다고 할 때,  $F_t$ 에 영향을 주는  $x_1 - x_2$ ,  $y_1 - y_2$ ,  $\theta_1 + \theta_2$ 에 대해서만 해석을 할 경우에도 기어시스템내의 소음을 규명할 수 있다. 식(5) ~ (10) 으로부터,  $x_1 - x_2$ ,  $y_1 - y_2$ ,  $\theta_1 + \theta_2$ 에 대한 기술을 다시  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ 에 대한 미분방정식으로 나타 낼 수 있다.

$$m\ddot{x} + (K_{xx} + 2K(t)c^2\alpha)x - (2K(t)ca)y + (2K(t)rca)\theta = me\omega^2c(\omega t) + 2K(t)e(t)ca \quad (12)$$

$$m\ddot{y} - (2K(t)casa)x + (K_{yy} + 2K(t)s^2\alpha)y - (2K(t)rsa)\theta = me\omega^2s(\omega t) - 2K(t)e(t)sa \quad (13)$$

$$m\ddot{\theta} + (2K(t)rca)\theta - (2K(t)rsa)y + 2K(t)r^2\theta = 2K(t)e(t) \quad (14)$$

여기서,  $x = x_1 - x_2$ ,  $y = y_1 - y_2$ ,  
 $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ,  $e = e_1 - e_2$ ,  $ca = \cos \alpha$ ,  
 $sa = \sin \alpha$ ,  $c(\omega t) = \cos(\omega t)$ ,  
 $s(\omega t) = \sin(\omega t)$  이다.

식(12), (13), (14)는 Matieu형 미분방정식의 형태를 갖추고 있다. 이런 형태의 미분방정식을 해석하는 방법으로는 조화 균형법이 효과적인 것으로 알려져 있다.<sup>16</sup> 식(12), (13), (14)에서, 조화균형법을 적용하기 위하여, 응답에 나타나는 주파수를 살펴보면 다음과 같다. 첫째로, 기어 회전체의 불평형으로 인한 자극이 주파수  $\omega$ 로 하는 조화함수로 주어진다. 따라서 기어 시스템의 응답 주파수로서  $\omega$ 는 기본적으로 포함되어야 할 것이다. 둘째로, 기어치형의 오차로 말미암아 발생하는 고주파 자극이 주기함수로서 주어진다. x방향 운동방정식에서는  $2K(t)e(t)\cos\alpha$ 로 표시되는데 이 항에서 생성되는 주파수는  $\omega$ ,  $\Omega_g$ ,  $i\Omega$ ,  $i=1,2,\dots,2N$  및  $|i\Omega \pm \Omega_g|$ ,  $i=1,2,\dots,N$  이다. 따라서 응답주파수로서 위의 주파수들이 포함되어야 할 것이다. 첫째로, 치형강성의 시간적 변화로 말미암아 생성되는 응답주파수를 포함시켜야 한다. 치형강성도에 대한 수식에는  $i\Omega$ ,  $i=1,2,\dots,N$ 의 주파수를 가지고 있고, 이미 언급한 응답주파수가  $\omega$ ,  $\Omega_g$ ,  $i\Omega$ ,  $i=1,2,\dots,3N$  및  $|i\Omega \pm \Omega_g|$ ,  $i=1,2,\dots,N$ 이므로 이 두 주파수 그룹이 합성되면 각각의 측대주파수(side band frequency)들을 얻게 되며, 이미 얻은 주파수 이외 새로 생성된 측대 주파수는 다음과 같다.

$$i\Omega \pm \omega, i=1,2,\dots,N$$

$$i\Omega, i=2N+1,\dots,3N$$

$$|i\Omega \pm \Omega_g|, i=N+1, N+2, \dots, 2N$$

그러므로 종합하면 식(12) ~ 식(14)에서의 응답 주파수는  $\omega$ ,  $\Omega_g$ ,  $i\Omega$ ,  $i=1,2,\dots,3N$  및  $|i\Omega \pm \Omega_g|$ ,  $i=1,2,\dots,N$ 이 되며 합은  $9N+2$ 가 된다. 따라서 언급된 주파수를  $\gamma_i$ ,  $i=1,2,\dots,N_g$ 라 표현 할 때 조화균형법에 의한 기어 시스템 응답의 근사 해는

$$x = \sum_{i=1}^{N_g} (x_{ic} \cos \gamma_i t + x_{is} \sin \gamma_i t) \quad (15)$$

$$y = \sum_{i=1}^{N_g} (y_{ic} \cos \gamma_i t + y_{is} \sin \gamma_i t) \quad (16)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{N_g} (\theta_{ic} \cos \gamma_i t + \theta_{is} \sin \gamma_i t) \quad (17)$$

로 기술된다. 여기서  $N_g$ 는 응답주파수의 갯수로서  $9N+2$ 이다. 식 (15)~ (17)을 각각 식 (12)~ (14)에 대입하여 조화균형법을 적용하면 미지수  $x_{ic}$ ,  $x_{is}$ ,  $y_{ic}$ ,  $y_{is}$ ,  $\theta_{ic}$  및  $\theta_{is}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_g$ 에 대한 대수 방정식을 얻는다.

#### 4. 기어 시스템의 진동/소음 특성 고찰

치형강성의 변화 및 치형오차가 기어시스템의 진동응답에 미치는 영향을 규명하기 위해 Fig. 1과 같은 단순 기어시스템을 설정하였다.

기어오차의 유효주파수는 회전축속도의 134배로 놓았다. 이때 응답주파수,  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_g$ ,  $N = 3$ ,  $N_g = 29$ ,  $\Omega = 50\omega$ ,  $\Omega_g = 134\omega$ 이므로 다음과 같이 정의된다. 즉,  $\{\gamma_i / \omega, i = 1, 2, \dots, 29\} = \{1, 16, 34, 49, 50, 51, 66, 84, 99, 100, 101, 116, 134, 149, 150, 151, 166, 184, 200, 234, 250, 284, 300, 334, 350, 384, 400, 434, 450\}$ 이다. 회전속도 10Hz ~ 1000 Hz에 대하여 계산된 기어 시스템의 스펙트럼은 Fig. 4 ~ Fig. 6에 도시되었다.

Fig. 4, Fig. 5에서,  $y$ ,  $\theta$  방향 변위 응답은  $\Omega$ 가 가장 크게 나타났고 50.3 Hz에서 피크를 나타낸다. 응답스펙트럼에 영향을 주는 요인은 회전체의 회전 불평형( $\omega$ ), 기어 치형 프로파일의 오차( $\Omega$ ) 및 치형강성도의 시간적 변화( $\Omega \mp \omega$ )임을 알 수 있다. 또, Fig. 6에서  $x$ 방향 힘에 대한 스펙트럼도  $\Omega$ 가 가장 크게 나타났다. Fig. 7, Fig. 8은 50.3Hz에 대한  $y$ ,  $\theta$  방향 order에 대한 응답을 나타낸다. 응답의 크기는 치형 프로파일 오차에 대한 영향( $\Omega$ )이 제일 크고, 회전체의 회전 불평형( $\omega$ ), 치형강성도의 시간적 변화( $\Omega \mp \omega$ )가 크게 나타났다. 또, 치형 프로파일 오차의 주기적 특성( $2\Omega$ ,  $2\Omega \mp \omega$ ,  $3\Omega$ ,  $3\Omega \mp \omega$ )과 치절기어의 치형곡선오차  $\Omega_g$ 가 뚜렷하게 나타났다.

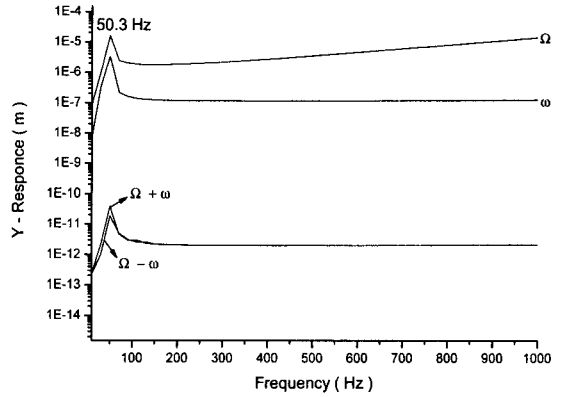


Fig. 4 Y-Response spectrum

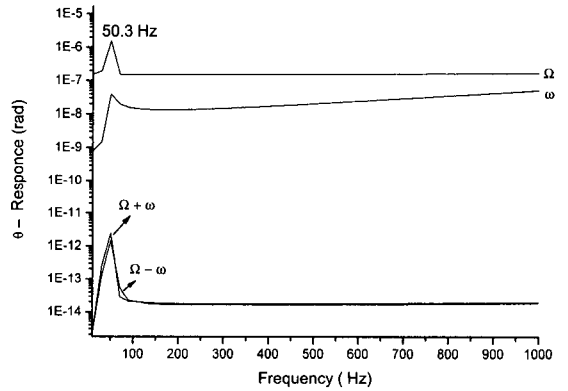


Fig. 5  $\theta$ -Response spectrum

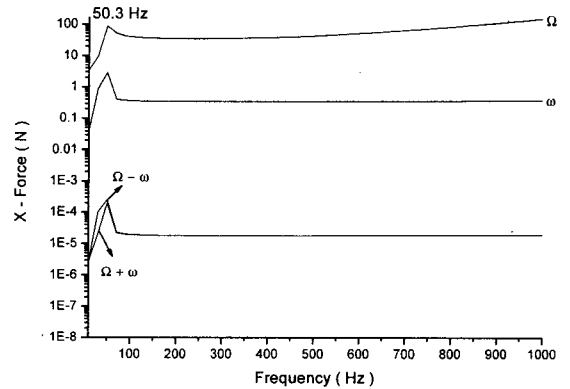


Fig. 6 X-Force spectrum

참고문헌

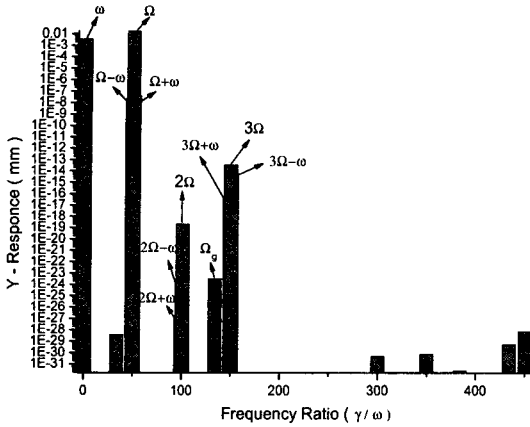


Fig. 7 y-Response spectrum at  $\omega = 50.3\text{Hz}$

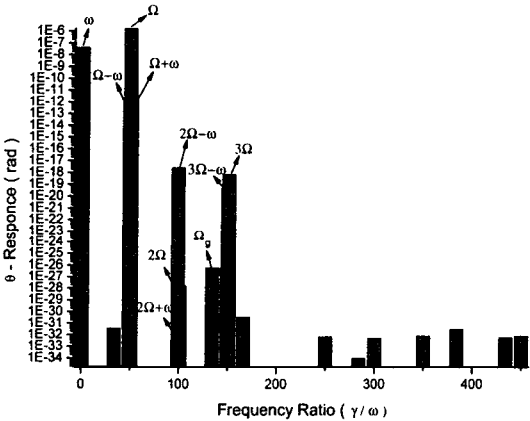


Fig. 8  $\theta$  -Response spectrum at  $\omega = 50.3\text{Hz}$

5. 결론

- (1) 치형강성도의 시간적 변화와 치형 전달오차를 고려한 기어-시스템의 역학 모델을 설정하였고 조화균형법을 이용하여 시스템응답 특성을 분석하였다.
- (2) 기어-시스템에서 치형 프로파일 오차 및 치형 강성도의 시간적 변화는 소음의 직접적 원인이 됨을 알 수 있었다.
- (3) 설정한 역학 모델에서, 응답스펙트럼은 치형프로파일오차에 의한 영향이 가장 큰 것으로 나타났다.

1. Kasuba, R., August, R. "gear Mesh Stiffness and LoadShearing in Planetary Gearing," ASME paper DET-229, 1984.
2. Toda, A., Tordion, G.V., "Approximation of Gear Transmission Error by Standard Gear Errors," ASME Paper C2/Det-71, 1980.
3. Ishida, K., Matsuda, T., "Effect of Tooth Surface Roughness on Gear Noise and Gear Noise transmission Path," ASME Paper C2/Det-70, 1980.
4. Cornell, R.W., "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth," ASME Paper C2/DET-24, 1980.
5. Neriya, S.V., Bhat, R.B., Sanka, T.S., "Vibration of A Geared Train of Rotors with Torsional-Flexural Coupling," ASME Paper DET-209, 1984.
6. Inoute, Y., Seireg, A., "Simulation of Dual Drive branched Gear Systems during selective Engagement of the Prime movers," ASME Paper DET-209, 1984.
7. Albrecht, C., "developments in Gear Analysis and Test Techniques for Helicopter Drive Systems," ASME Paper DET-15, 1979.
8. Mitchell, L.D., Mellen, D.M., "Torsional-Lateral Coupling in A Geared, High Speed Rotor System," ASME Paper DET-75, 1975.
9. Lynch, G.A., Mitchell, L.D., "Origin of Noise," Machine Design, Vol. 41, No. 10, pp. 174-178, 1969.
10. Chakraborty J., Hunashikatti, H.G., "Determination of the Combined Mesh Stiffness of a Spur Gear Pair under Load," ASME Paper DET-39, 1974.
11. Choi, M.J., "The Combined Mesh Stiffness Characteristics of Spur and Helical Gears," M.S Thesis, Mech. Eng. Dept., North Carolina State University, Raleigh, N.C, pp. 59~60, 1987.
12. Lee, H.W, Park, N.G, "A Study on Development of Railway Reducer for Low Noise/Vibration," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 21, No. 2, pp. 130-137, 2004.
13. Rao, J.S., Rotor Dynamics, John Wiley & Sons, pp. 141-156, 1983.
14. Lee, Hyoung Woo and Park, No Gill, " A Study

on Development of Railway Reducer for Low Noise/Vibration," Journal of the Korean Society of Precision engineering, Vol. 21. No. 2, pp. 130-137, 2004.

15. Coy, J.J., "Identification and Proposed Control of Helicopter Transmission Noise at the Source," USAAVSCOM-TR-87-C-2, 1987.
16. Mitchell, L.D., Daws, J.W., "A Basic Approach to Gearbox Noise Prediction," Transactions of SAE, Vol. 91, pp. 3366-3379, 1983.
17. Mitchell, L.D., David, J.W., "Proposed Solution Methodology for the Dynamically Coupled Nonlinear Geared Rotor Mechanics Equations," ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, pp. 112-116, 1985.