韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 8. 제 44권, 제 3호, 435-456.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2005, Vol. 44, No. 3, 435-456.

고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육의 적용 효과[1)]

김 원 경 (한국교원대학교)
백 경 호 (수지고등학교)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

세계화, 지식화, 정보화로 특징 지워지는 21세기 사회는 세계가 하나의 열린 망을 통해 지식과 정보, 물류와 인적자원이 자유롭게 이동되는 사회이다. 이와 같은 사회에서의 개인 또는 국가 경쟁력은 고도의 정보처리 능력에 기초한 새로운 지적 부가가치의 생산능력에 의해 결정된다. 점차 심화되고 있는 무한경쟁 사회에서 경쟁우위를 확보하기 위해서는 먼저 국가 교육의 목표가 산업사회 인재양성 모형에서 지식기반사회 인재양성 모형으로 탈바꿈해야 한다. 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창출할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재의 양성이 필요하다(교육부, 1997).

그러나 우리나라의 학교 수학은 아직까지도 학생들의 능동적인 활동보다는 단편적인 지식 주입과 문제 풀이 기능 숙달에 치중하고 있고, 그 결과 학생들은 수학에 흥미를 느끼지 못하고 있으며 자신감도 결여되어 있는 것이 사실이다. 이를 극복하기 위해서는 학생들 스스로 탐구, 관찰, 조작, 분석, 종합하는 활동을 통해서 문제해결능력, 사고력, 추론 능력, 창의력, 의사소통능력을 길러주고 흥미와 자신감 고양, 지적 호기심을 유발하는 다양한 교수·학습 방법이 요구된다(교육부, 1997).

학교 수학이 이와 같은 측면을 강조하여 이루어져야 한다고 주장했던 사람 중의 하나가 네덜란드의 수학자 Freudenthal이다. 그는 수학을 인간의 활동이라는 관점에서 보고 '안내된 재발명'을 통해서 점진적인 '수학화'에 이르도록 해야 한다고 주장하였다. 여기서 '안내된 재발명'이란 교사의 적절한 안내를 받아 수학의 발생 과정을 되짚어 보는 경험을 통해서 학습자 스스로가 나름대로 재구성하는 것을 말하고, '수학화'란 현실 상황이나 수학 자체의 상황 속에 포함되어 있는 여러 가지 수학적인 요소를 탐구, 유추, 형식화, 모델링 등의 활동을 통해서 수학적으로 세련되게 조직해 나가는 과정을 말한다.

Freudenthal의 생각을 실천에 옮긴 것이 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education : RME)이다. 네덜란드에서는 1970년대 초부터 현실적 수학교육에 기초한 초등 수학교육과정을 개발하고 그에 따른 초등학교 수학교과서를 만들었고, 1985년에는 고등학교 수학교육과정, 1993년에는 중학교 수학교육과정을 새롭게 도입하였다(정영옥, 2000). 이들 교육과정의 가장 큰 특징은 수학의 실제적 응용이다. 현실 상황에 관한 문맥, 즉 어떤 구체적인 수업과정에서 학생들에게 열려있는 수학화되어야 할 현실세계의 상황을 탐구하여 수학적 개념을 추출하고, 추상화 및 형식화 과정을 통하여 다시 현실 세계로 피드백 하는 사이클이 그 교육과정의 핵심이라고 할 수 있다.

현실적 수학교육에서 가장 중요한 것은 수학화의 근원이자 실제적 응용의 근원인 문맥을 찾아내는 것이다. 학생들은 현실 세계의 상황에서뿐만 아니라 자연과학, 사회과학 등 여타 학문에서 활용되는 상황, 그리고 수학적 원리와 법칙이 발명된 역사적 상황 등 다양한 문맥상황을 경험함으로써 문제 속 변인 사이의 관계를 이해하고, 수학적 모델을 만들어 내며 자기 나름의 비형식적 수학 구성에서 이른바 형식적 수학으로 나아 갈 수 있기 때문이다(Streefland, 1990).

---

1) 이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2003-030-C00009)
* 2005년 4월 투고, 2005년 5월 심사 완료.
* ZDM분류 : D40
* MSC2000분류 : 97D90
* 주제어 : 자기 주도적 학습, 소집단협동 학습, 문제해결.

현실적 수학교육의 실제 문맥의 예로는 초등학교 1~3학년 학생들을 위한 Freudenthal의 '수중나라'와 초등학교 6학년 학생들을 위한 Treffers의 '걸리버 여행기'를 들 수 있다(정영옥, 2000, pp.297-306, 재인용). 이 문맥들은 우리가 살고 있는 실제 공간에서 공간 도형 탐구, 비와 측정 개념을 통합적으로 다루기 때문에 수학화 활동에 적합하나 우리나라의 학교 수업에 그대로 적용하기에는 교육과정의 차이, 문화적 차이 등으로 다소 어려움이 있다.

우리나라에서는 정영옥(1999)이 현실적 수학교육의 학습과정의 한 예로 초등학교 사칙연산 관련 문맥을 개발하고, 이를 바탕으로 표준 알고리듬으로의 수학화 과정, 교수학적 현상학, 수준 이론 등이 어떻게 구현되는지를 연구하였다. 또한, 김용성(2000)은 초등학교 5학년용 문맥을, 이승희 · 김수경(2002)은 중학교 함수와 기하 영역에서의 문맥을, 김원경 · 백경호(2004)는 고등학교 확률과 통계영역에서의 문맥을 개발하였다. 그러나 아직까지 초 · 중등학교의 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용하여 그 효과를 분석한 연구는 없다.

이에 본 연구에서는 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용해 그 효과를 분석해 보고자 한다.

2. 연구문제

본 연구에서는 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학 교육을 적용한 수업의 효과를 측정하기 위해서 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

(1) 현실적 수학교육을 적용한 집단이 기존의 수학 교과서 중심의 수업을 적용한 집단보다 성취도가 높은가?

(2) 현실적 수학교육을 적용한 집단이 기존의 수학 교과서 중심의 수업을 적용한 집단보다 수학화 활동이 잘 이루어지는가?

위의 연구 문제 (1), (2)를 해결하기 위해서 먼저 김원경 · 백경호(2004)에 의해 개발된 확률과 통계 문맥을 바탕으로 한 수업지도안과 수학 I 교과서에 의한 수업지도안을 각각 만든다. 그리고 이를 일반계 고등학교 2학년 학생 두 집단에 각각 투입하여 교수 실험을 한 후, 수학 학력 검사에 나타난 성취도 점수와 수학화 활동 점수를 분석하기로 한다.

II. 현실적 수학교육(RME)

1. 현실적 수학교육의 배경

20세기 중반 과학 기술의 발달, 수학 이론의 발달, 수학의 응용범위 확대등으로 일어난 수학교육 현대화 운동은 순수수학의 엄밀성과 추상수학의 학교 수학화를 지향하는 '새수학'이었다. 그러나 새수학은 급진적인 개혁, 학생들의 발달 단계에 부합하지 못한 조급한 추상화 등으로 비판을 받으면서 수학의 교육적 가치에 대한 근원적인 의문이 제기되었고, 그 결과 새수학은 쇠퇴하고 보다 인간 중심의 수학교육에 주목하게 되었다. 특히 네덜란드에서는 새수학에 대한 반발과 그 당시 네덜란드 수학교육을 지배하던 '기계적 수학교육'의 반작용으로 1970년에 초 · 중등학교 수학교육을 개혁하기 위한 'Wiscobas' 프로젝트를 착수하였고, 1971년에 수학교육개발국립연구소(IOWO)를 설립하였다. IOWO는 '인간활동으로서의 수학' 이라는 Freudenthal의 이론을 지지하면서 Wiscobas 프로젝트의 행 · 재정적 지원과 수학교육과정 개발, 전 · 현직 교사교육, 교육연구 등을 통합하는 폭넓은 개혁에 초점을 맞추었다(Gravemeijer, 1994). 그 후, 1992년에 IOWO는 Freudenthal의 뜻을 기려 그 명칭을 'Freudenthal 연구소'로 바꾸었는데 이들이 수십 년 동안 연구해 온 수학교육의 한 사조를 현실적 수학교육이라고 한다.

Freudenthal은 "수학은 인간의 활동이고, 인간이 배워야 하는 것은 닫힌 체계로서의 수학이 아니라 정신적인 활동으로서의 수학 즉, 현실을 수학화 하는 과정, 수학을 수학화 하는 과정"이라고 하였다(Freudenthal, 1968, p.7). 현실적 수학교육이라는 명칭은 Treffers(1987)가 수평적 수학화와 수직적 수학화에 대한 구분을 통하여 기존의 수학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학화를 중시하는 수학교육을 현실적이라고 부른데서 기인한다.

네덜란드의 수학교육 개혁이 현실적이라고 불리는 이유는 현실 세계와의 연결성 때문만이 아니라 학생들의 마음속에 무엇인가 그려내고 상상할 수 있는 문제 상황들을 제시하는 것과 관련이 있기 때문이다(정영옥, 2000). Van den Brink(1991)는 현실적이란 학생들이 그

상황을 상상하고 자신의 아이디어, 경험, 환상을 구현할 수 있다는 의미라고 하였다. 따라서 현실적이란 단순히 일상생활을 의미하기보다는 그것을 포함하는 더 넓은 세계에서 학생들이 체험하고 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미한다.

2. 현실적 수학교육에서 수학화와 수학화 활동의 의미

Freudenthal은 수학을 현실과 상식을 출발점으로 하여 여러 수준을 거쳐 고도로 형식적이고 추상적으로 발전해 나가는 학문으로 생각하고, 수학화를 현실적 경험 또는 수학적 경험일 수도 있는 현상을 수학적 수단인 본질 - 수학적 개념, 아이디어, 구조 - 로 조직하는 것을 말하며, 수학화 과정은 이런 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 불연속 과정이라고 하였다 (우정호, 1994). 예를 들면 공간의 여러 가지 형상을 도형으로 파악하는 것, 실생활의 상황을 모델링하는 것, 우연 현상 속의 규칙을 발견하는 것, 사회 경제적 현상과 자연계의 양의 변화 관계를 함수로 파악하여 분석하는 것 등은 모두 현상을 본질로 수학화하는 것이다.

수학화 과정에서 이루어지는 모든 활동이 수학화 활동이다. 학교 수학에서 경험될 수 있는 수학화의 기본적인 활동에는 규칙과 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화하기, 단축화하기, 도식화하기, 형식화하기, 알고리듬화하기, 국소적 조직화하기 등이 있다(Treffers, 1987, pp. 51-52).

Freudenthal은 일상생활에서의 제재를 수학화하는 것과 수학적인 제재를 수학화하는 것을 모두 수학화라 하고, 현실 세계에서 추상화 된 기호의 세계로 넘어가는 과정을 수평적 수학화, 추상화 된 기호의 세계에서 좀 더 세련된 수학의 세계로 형성 발전되어 가는 것을 수직적 수학화라고 하였다(Gravemeijer, 1994). Treffers (1987)는 현실 문제 상황을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정을 수평적 수학화, 좀 더 세련된 높은 수준의 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정을 수직적 수학화라고 하였다. 따라서 수평적 수학화란 관찰, 실험, 귀납 추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학적으로 변형하는 과정을 말하고, 수직적 수학화란 수평적 수학화 이후에 구조화, 조직화, 일반화, 형식화를 통해 수학화하는 과정을 말한다. 그러나 Freudenthal은 두 수학화에는 근본적인 차이가 없다고 생각하고 학교 교육은 현실 세계의 상황으로부터 시작할 수 있다고 하였다.

Gravemeijer (1994)는 수학화 활동이 수학교육에서 중요한 이유로 다음과 같은 두 가지를 들고 있다.

첫째, 수학화 활동은 수학자의 주된 활동일 뿐 아니라 학생들로 하여금 실생활 상황에 대한 수학적 접근에 친숙하게 한다.

둘째, 수학에서 마지막 단계는 공리화의 방법으로 형식화되는데 이것이 우리가 수학을 가르치는 시작점이 되어서는 안된다. 학생들은 안내된 재발명의 과정을 통해 수학자들이 발명했던 과정과 유사한 과정을 경험할 수 있도록 해야 한다.

3. 현실적 수학교육의 학습 · 지도 원리

Freudenthal의 수학화 활동을 경험할 수 있도록 하는 현실적 수학교육의 학습 지도 원리에는 '인간 활동으로서의 수학'이라는 관점을 바탕으로 안내된 재발명, 교수학적 현상학, 수준 이론이 있다.

(가) 안내된 재발명

안내된 재발명은 수학의 역사-발생적인 과정에서 수학화의 소재가 되는 현상을 찾아 학습자로 하여금 그러한 현상에 직면하게 하여 이를 단축된 형태로 재현하는 방법이다. Freudenthal(1991)에 의하면 수학의 학습 · 지도는 기성수학을 부과하는 것이어서는 안되며 인류의 수학 학습과정, 수학의 발생과정, 수학화 과정을 학습자의 현재의 상황에서 재발명하도록 안내해야한다고 하면서 이를 위해서 수평적 수학화에 적합한 풍부한 문맥과 학습 상황을 선정하고, 수직적 수학화를 위한 수단과 도구를 제공하며 교사와 학생 사이의 상호 작용을 강조하고 여러 가지 학습 요소가 상호 연관되도록 지도할 것을 요구하고 있다.

따라서 Freudenthal의 안내된 재발명은 학생들의 활동을 중시하는 활동주의 교육관과 역사 발생적 원리와 맥을 같이 하는 지도방법이라 할 수 있다.

안내된 재발명의 방법을 지지하는 교육적 논의의 근거는 다음과 같다(Freudenthal, 1991, p. 47).

첫째, 학습자 자신에 의해 획득되는 능력과 지식은 다른 사람에 의해 부과되는 것보다 파지가 용이하고 전이가 잘 이루어진다.

둘째, 발명은 즐거운 것이므로 재발명에 의한 학습은 동기를 부여한다.

셋째, 재발명 과정은 인간 활동으로서의 수학, 즉 수학화 하는 태도를 길러준다.

(나) 교수학적 현상학

Freudenthal은 수학 교수학적 현상학을 다음과 같이 규정하였다.

"어떤 수학적 개념, 수학적 구조, 수학적 아이디어의 현상학이란 현상과 관련시켜 본질을 기술하는 것, 어떤 현상이 창안되고 어디로 확장되는지, 그리고 조직화의 한 수단으로 어떻게 작용하며 어떤 힘이 미치는지를 기술하는 것이다. 만일 본질과 현상과의 상호 관계가 학습지도 과정에서 어떻게 획득되는가에 주목하면 이것이 곧 본질에 대한 교수학적 현상학이다" (Freudenthal, 1983, pp. 28-29).

교수학적 현상학의 핵심 요소는 본질과 현상이다. 여기서 본질은 사회적, 물리적, 정신적 세계 및 수학적 현상을 조직하기 위한 도구로서 발명된 수학적 개념, 구조, 아이디어를 말하는 것으로, 이것은 한 수준에서는 본질이지만 다음 수준에서는 다시 현상의 일부가 된다. 수학화는 현상을 수학적인 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하고, 수학화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의한 과정이며, 교수학적 현상학은 이러한 현상과 본질의 상대적인 관계를 교수학적 측면에서 다루는 것이라 할 수 있다.

(다) 수준 이론

Freudenthal에 의하면 수학은 인간의 정신적인 활동이고 수학화 과정은 현상과 본질의 교대작용에 의해 수준 상승이 이루어지면서 조직화, 구조화되는 불연속 과정이며, 이런 수준의 상승을 가능하게 하는 것은 반성적 사고이다(정영옥, 1997, p 72, 재인용). 그의 수준 이론은 Van Hiele의 수준이론, 즉 수학의 학습과정을 한 수준에서 다음 수준으로의 사고의 비약으로 보고, 수학적 사고 활동을 한 수준에서의 경험을 정리하는 본질이 새롭게 경험의 대상이 되어 그것을 다시 본질로 조직화하려는 활동으로 파악하여 그 다음 수준으로의 비약을 하게 되는 불연속적인 과정이라고 보는 것과 일맥 상통한다(우정호, 1994).

Freudenthal의 수준 이론은 거시적인 수준의 비약을 위해서는 한 수준 내에서도 점진적이고 미시적인 수준의 상승이 이루어지도록 해야 함을 의미하고, 이와 같은 점진적인 수학화가 가능하도록 하기 위해서는 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하여 반성적 사고에 의한 수준 상승이 자연스럽게 이루어지도록 해야 한다는 것이다.

4. 현실적 수학교육의 수업이론

Treffers(1987)는 안내된 재발명 원리와 점진적인 수학화를 구현해 나가기 위한 좀 더 구체적인 원리로 현상학적 탐구, 수직적 도구에 의한 연결, 학생들 자신의 구성과 산물, 상호작용 수업, 학습 내용의 연결의 5가지를 현실적 수학 교육의 수업이론으로 제안하였다.

현상학적 탐구란 현실과 동 떨어진 문맥을 형식적이고 논리적으로 접근하는 것이 아니라 수학적 개념과 구조가 내포된 현상을 수학화를 염두에 두고 탐구하도록 하는 것이다.

수직적 도구에 의한 연결은 여러 가지 자료, 화살표, 상황, 도식, 다이어그램, 기호 등과 같은 다양한 도구들을 사용하여 문맥을 탐구하고 모델링하는 것을 말한다.

학생들 자신의 구성과 산물은 교수 · 학습과정에서 학생들 스스로가 문제를 설정하고 기호, 용어, 도식, 모델 등을 자유롭게 구성하는 활동을 통해서 수학화 과정을 경험하게 하는 것을 말한다.

상호작용수업은 학생과 학생 사이에, 학생과 교사 사이에 서로 상의하고 협동하며 토의하는 활동을 말한다. 학생 사이의 상호작용은 서로의 아이디어들을 비교, 교환하면서 인지적 갈등 상황을 초래하여 반성적 사고를 일으키게 하고, 교사와의 상호작용은 수학의 형식화, 구조화를 촉진시킨다.

학습내용의 연결은 수학의 다양한 영역들을 횡적, 종적으로 연결하고, 현실 세계와도 관련된 통합적인 문제 상황을 제공함으로써 학생들로 하여금 구조화된 지식과 기능을 구축할 수 있고 복합적인 상황에 응용할 수 있도

록 하는 것을 말한다.

4. 선행연구의 고찰

Freudenthal(1968)의 수학 교육 인식론 - 수학의 교육적 가치를 수학의 유용성에 두고 인간이 배워야 하는 것은 닫힌 체계로서의 수학이 아니라 현실을 수학화 하는 과정 즉, 인간 활동으로서의 수학 - 에 그 바탕을 두고 탄생한 현실적 수학교육은 그 이후 많은 수학자들의 주목을 받았고, Treffers(1987)에 의해 그 이론적 틀이 체계화 되었다. Treffers(1987)는 그의 이론 틀을 바탕으로 걸리버 여행기, 주근깨 마을, 8의 나라, 세는 문제, 장기판 위의 곡식 등의 개발한 학습 자료를 개발하였다.

우리나라에서는 우정호(1994)가 처음으로 Freudenthal의 수학관, 수학교육 이념, 수학 학습지도 방법론, 수학교육론의 수학교육사적 위치 등을 기존의 수학교육자의 철학과 비교하여 연구하였다.

정영옥(1997)은 수학인식론적, 교수학적 분석을 통해 Freudenthal이 강조하는 수학화의 의미와 그의 수학화 학습지도론을 분석하였고, 수학화 학습지도론에 따르는 함수 개념의 지도 방법에 대하여 연구하였다.

정영옥(1999)은 현실적 수학교육의 핵심원리인 점진적인 수학화, 안내된 재발명, 수준이론, 교수학적 현상학과 수업이론인 현상학적 탐구, 수직적 도구에 의한 연결, 학생들 자신의 구성과 산물, 상호작용, 학습가닥의 연결을 이론적으로 분석하고, 이 원리들이 초등학교 사칙연산 알고리듬 학습과정에서 어떻게 구체적으로 구현되는지를 살펴보았다.

김용성(2000)은 수학의 발생 상황, 사회적 상황, 타 교과서의 활용 상황, 실세계의 상황 등에서 초등학교 5학년용 문맥 자료를 개발하고 수학화 경험을 하게 한 결과 학생들의 수학적 신념과 문제해결력에 긍정적 효과가 있음을 밝혔다.

이승희·김수경(2002)은 수학의 유용성을 인식시켜 흥미를 유발하고 함수적 사고와 기하학적 직관을 발달시킬 수 있는 학습자료를 Freudenthal의 수학화 과정을 도입하여 중학교 함수와 기하영역에서 개발하였다.

권오남·신경희·신은주·김영신·최효진(2002)은 현실적 수학교육의 이론적 틀을 대학교 미분방정식에 적용하여 대학교 수학 교수·학습에서의 새로운 방향을 모색하였다.

김원경·백경호(2004)는 고등학교 확률과 통계영역에서 현실적 수학교육을 실제로 교육 현장에 적용할 수 있는 다양한 문맥을 개발하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

현실적 수학교육을 고등학생에게 적용하기 위해서 교수실험이 가능한 경기도 성남시 분당구에 소재하는 B 고등학교를 실험 대상 학교로 선정하였다. B 고등학교 2학년 학급 중에서 인문계열 2학급을 임의로 선정하여 한 학급을 실험 집단으로, 다른 학급을 통제 집단으로 배치하였다. 2학급 모두 남녀 혼합으로 구성되어 있으며 학생들의 학력 수준은 우리나라 전체 고등학교에서 중위수준이다. 연구 대상으로 선정된 학생들은 <10-가, 나>를 모두 학습한 후 <수학 I>을 학습하고 있으나 실험 직전까지 정규수업에서 확률과 통계영역을 학습하지 않은 상태이고, <확률과 통계>교과서도 배우지 않은 상태이다. 실험집단, 통제 집단의 구성은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 실험, 통제 집단의 구성 (단위 : 명)

구 분	B 고등학교		계
	남	여	
실험집단	8	19	27
통제집단	21	14	35
계	29	33	62

2. 교수 실험

본 연구의 연구문제를 해결하기 위해서 먼저 김원경·백경호(2004)가 개발한 확률과 통계 문맥을 바탕으로 20차시의 수업지도안과 수학 I 교과서를 바탕으로 20차시의 수업지도안을 각각 만들었다. 각각의 수업지도안은 부록Ⅰ, 부록Ⅱ에 예시되어 있다. 교수 실험을 하기 전에 실험집단과 통제집단의 학생들이 수학 학력 면에서 어떤 차이가 있는지를 알아보기 위해서 사전 수학 학력 차이를 검사한 후, 실험집단에는 개발된 문맥에 의한 수업지도안으로, 통제집단에는 수학 I 교과서에 의한 수업 지도안으로 2003학년도 2학기 정규수업 시간에 교수실험을 하였다. 그리고, 실험집단의 학생들에게는 실험처치가

끝난 후 정규수업의 내용을 보충해 주어 수업 결손이 없도록 하였다. 실험 집단의 학생들에게는 교육 경력 4년의 여교사가 개발된 문맥에 의한 수업지도안을 충분히 숙지한 후 수업을 담당하도록 하였고, 통제 집단의 학생들에게는 교육경력 5년의 여교사가 수학 I 교과서에 의한 수업지도안을 충분히 숙지한 후 동일한 차시의 수업을 담당하도록 하여 교사 변인에 의한 수업 효과를 최소로 하였다. 두 집단에 대한 교수 실험이 모두 끝난 후, 사후 수학 학력 검사를 동시에 실시하였다. 구체적인 교수 실험 과정은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 교수 실험 과정

실험집단	O_1	X	O_2
통제집단	O_1	X'	O_2

(단, O_1 : 사전 수학 학력 차이 검사, O_2 : 사후 수학 학력 검사
X : 개발 문맥에 의한 수업지도안, X' : 수학 I 교과서에 의한 수업지도안)

3. 검사도구

사전 수학 학력 차이 검사는 B 고등학교의 2003학년도 1학기 기말고사 수학 I 성적을 사용하였다.

사후 수학 학력 검사지는 본 연구의 연구자인 현직교사를 포함해서 B고등학교의 4명의 수학 교사가 수학 I 교과서, 확률과 통계 교과서, 참고서의 문항을 기초로 각각 10문항을 개발한 후, 협의와 검토를 바탕으로 수정·보완하여 최종 20문항을 선정하였다. 선정된 사후 수학 학력 검사 문항은 수학 I 교과서를 집필한 통계 전공의 교수 1명과 현직교사 1명으로부터 그 타당성을 검증받았다. 검사소요 시간은 60분이고, 문항 내용은 <표 Ⅲ-3>과 같다. 사후 수학 학력 검사지는 부록 Ⅲ에 실었다.

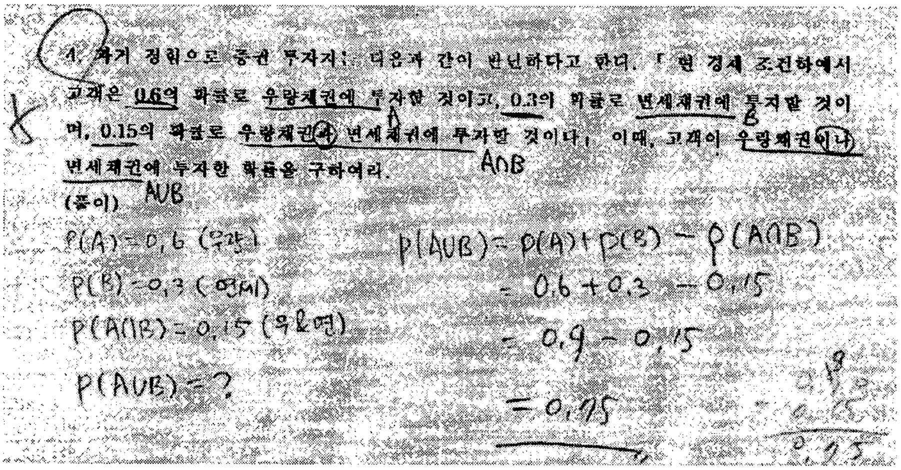
사후 수학 학력 검사지에서 성취도 점수와 수학화 활동 점수는 각각 다른 평가기준으로 채점되었다. 성취도 점수는 풀이 과정에서 정답에 초점을 두고 점수를 차등 부여한 반면에, 수학화 활동 점수는 각 문항의 풀이 과정에서 수직적 도구에 의한 탐구, 수학적 사고, 논리적 전개, 수학적 아이디어의 표현에 따라 점수를 차등 부여하였다. 5점 만점의 문항에서 성취도 점수와 수학화 점수의 채점기준은 <표 Ⅲ-4>과 같다.

<표 Ⅲ-3> 사후 수학 학력 검사지의 문항 내용

문항 번호	문항 내용	배점	문항 번호	문항 내용	배점
1	수학적 확률	5	11	확률의 곱셈정리	5
2	수학적 확률	6	12	사건의 독립과 종속	5
3	통계적 확률	4	13	조건부 확률	5
4	확률의 덧셈정리	5	14	이산확률분포	6
5	독립시행의 확률	4	15	이산확률분포의 평균	4
6	확률의 덧셈정리, 여사건의 확률	7	16	이항분포의 확률	5
7	조건부확률과 확률의 곱셈정리	5	17	연속확률변수와 확률밀도함수	4
8	조건부 확률	6	18	정규분포	6
9	조건부 확률	3	19	정규분포의 표준화	5
10	확률의 곱셈정리	5	20	정규분포의 표준화	5

<표 Ⅲ-4> 성취도 점수와 수학화 활동 점수의 채점 기준

채점 기준	성취도 점수	수학화 활동 점수
식의 전개와 기호의 표현이 모두 맞고, 답도 맞음	5	5
식의 전개와 기호의 표현은 일부 틀리나 답은 맞음	5	3~4 (틀린 정도에 따라)
식의 전개와 기호의 표현은 거의 맞으나 답이 틀림	1~4 (맞은 정도에 따라)	3~4 (맞은 정도에 따라)
답만 맞고 문제 해결과정에서 아무런 수학적 활동이 없음	5	0
답이 틀려도 문제 해결과정에서 약간의 수학적 활동이 있음	0	1~2 (활동 정도에 따라)
답도 틀리고 아무런 수학적 활동도 없음	0	0



4. 과거 경험으로 증권 투자자는 다음과 같이 판단하다고 한다. 「현 경제 조건하에서 고객은 0.6의 확률로 우량채권에 투자할 것이고, 0.3의 확률로 면세채권에 투자할 것이며, 0.15의 확률로 우량채권과 면세채권에 투자할 것이다」 이때, 고객이 우량채권이나 면세채권에 투자할 확률을 구하여라.

(풀이)

$P(A)=0.6$ (우량)

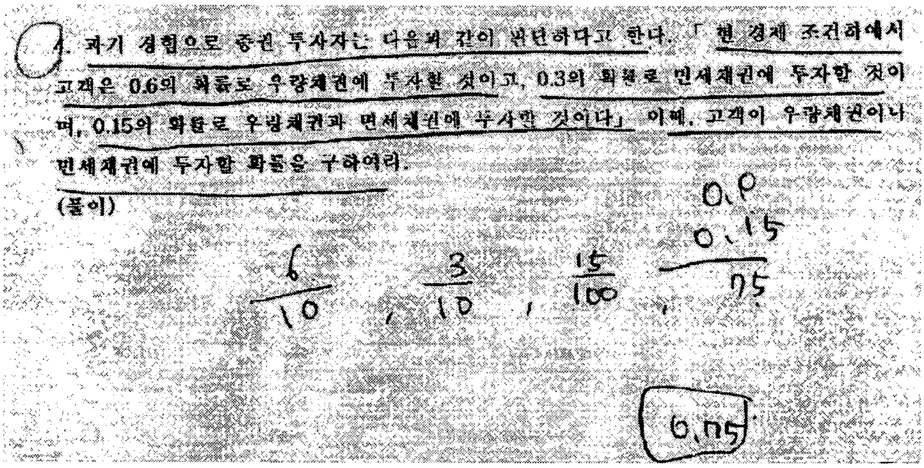
$P(B)=0.3$ (면세)

$P(A\cap B)=0.15$ (우&면)

$P(A\cup B)=?$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0.6+0.3-0.15 = 0.9-0.15 = 0.75$$

<그림 III-5> 수학 학력 검사 문항 4번의 채점



4. 과거 경험으로 증권 투자자는 다음과 같이 판단하다고 한다. 「현 경제 조건하에서 고객은 0.6의 확률로 우량채권에 투자할 것이고, 0.3의 확률로 면세채권에 투자할 것이며, 0.15의 확률로 우량채권과 면세채권에 투자할 것이다」 이때, 고객이 우량채권이나 면세채권에 투자할 확률을 구하여라.

(풀이)

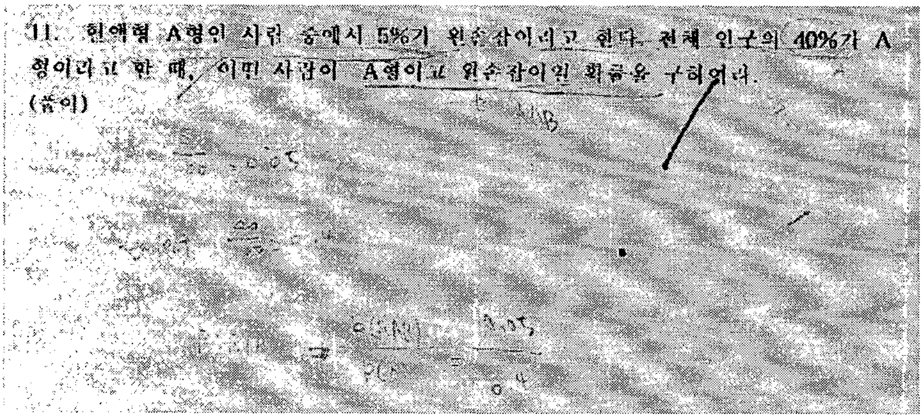
$\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{15}{100}$, 0.9 − 0.15 = 75

0.75

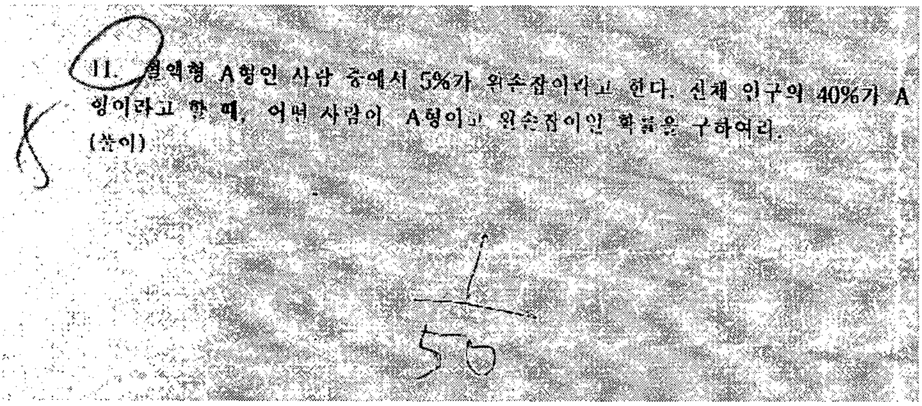
<그림 III-6> 수학 학력 검사 문항 4번의 채점

예를 들면, 사후 수학 학력 검사의 문항 4번의 경우, <그림 III-5>와 같이 식의 전개와 기호의 표현이 모두 옳고, 답도 맞으면 성취도 점수와 수학화 활동 점수를 5점 만점으로 채점하였고, <그림 III-6>과 같이 답은 맞으나 식의 전개와 기호의 표현을 이해하기 어려우면 성취도 점수를 5점, 수학화 활동 점수를 3점으로 채점하였다.

또, 사후 학력검사의 문항 11번의 경우, <그림III-7>과 같이 답은 틀리나 식의 전개와 기호의 표현은 거의 옳으면 성취도 점수를 2점, 수학화 활동점수를 4점으로 채점하였고, <그림 III-8>과 같이 답만 맞고 문제 해결 과정에서 아무런 수학적 활동이 없으면 성취도 점수를 5점, 수학화 활동 점수를 0점으로 채점하였다.



<그림 Ⅲ-7> 수학 학력 검사 문항 11번의 채점



<그림 Ⅲ-8> 수학 학력 검사 문항 11번의 채점

4. 교수 실험 결과 분석

(가) 사전 수학 학력 검사

사전 수학 학력 차이를 비교한 결과, <표Ⅲ-9>에서와 같이 유의 수준 0.05에서 두 집단 간 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다. 따라서 두 집단은 수학 학력 면에서 동질집단이라고 할 수 있다.

<표 Ⅲ-9> 사전 수학 학력 차이 비교

집단	학생 수	평균	표준편차	t-값	자유도	p-값
실험집단	27	83.3	19.86	0.37	61	0.712
통제집단	35	81.7	23.05			

(나) 사후 수학 학력 검사

교수 실험 후, 사후 수학 학력 검사를 실시하여 실험집단과 통제집단의 성취도 점수를 분석한 결과는 <표Ⅲ-10>과 같다.

<표 Ⅲ-10> 사후 수학 학력 검사 결과의 성취도 점수

집단	학생 수	평균	표준편차	t-값	자유도	p-값
실험집단	27	32.5185	15.4207	-4.4545	49.90	0.0000
통제집단	35	16.2000	12.7066			

사후 수학 학력 검사의 성취도 점수를 t-검정한 결과, 유의 수준 0.05에서 실험집단의 평균이 통제집단의 평균보다 높다고 할 수 있다. 따라서 현실적 수학교육을 적용하여 수업한 집단이 기존의 교과서를 중심으로 하여 수업한 집단보다 학생들의 성취도 향상에 효과가 있다고 할 수 있다. 그러나 실험집단의 평균 점수가 통제집단의 평균점수보다 16점 이상 높게 나타난 것은 실험 집단이 현실적 수학교육의 적용을 받은 효과이기도 하지만 사후 수학 학력 검사 문항지의 난이도가 높고, 높은 난이도의 문항을 푼 경험 때문인 것으로도 생각된다.

한편, 실험집단과 통제집단의 성취도 점수의 분포를 줄기와 잎 그림으로 비교해 보면 <그림 Ⅲ-11>과 같이 실험집단의 분포가 통제 집단의 분포보다 오른쪽에 치우쳐져 있어 중하위 수준의 학생들의 성취도가 많이 향상되었다고 할 수 있다.

```
◈ 분석변수: 사후성취도(통제)          N  = 35
   줄기단위 = 10  /  잎단위 = 1

---------------------------------------------
 도수 |  줄기 : 잎
------+--------------------------------------
   9  |  0    : 000224578
  21  |  10   : 012234557777777888999
   2  |  30   : 02
   2  |  40   : 15
   1  |  50   : 9
------+--------------------------------------
  35  |

◈ 분석변수: 사후성취도(실험)          N  = 27
   줄기단위 = 10  /  잎단위 = 1

---------------------------------------------
 도수 |  줄기 : 잎
------+--------------------------------------
   1  |  0    : 5
   5  |  10   : 15568
   7  |  20   : 3357779
   7  |  30   : 0136788
   3  |  40   : 799
   2  |  50   : 00
   2  |  60   : 27
------+--------------------------------------
  27  |
```

<그림 Ⅲ-11> 사후 수학 학력 검사의 성취도 점수에 대한 줄기와 잎 그림

사후 수학 학력 검사의 실험집단과 통제집단의 수학화 활동 점수를 분석한 결과는 <표 Ⅲ-12>와 같다.

<표 Ⅲ-12> 사후 수학 학력 검사 결과의 수학화 활동 점수

집단	학생수	평균	표준편차	t-값	자유도	p-값
실험집단	27	24.4444	12.5463	-7.6128	34.25	0.0000
통제집단	35	4.6571	5.6928			

사후 수학 학력 검사의 수학화 활동 점수를 t-검정한 결과, 유의수준 0.05에서 실험집단의 평균이 통제집단의 평균보다 높다고 할 수 있다. 따라서 현실적 수학교육을 적용하여 수업을 한 집단이 기존의 교과서를 중심으로 하여 수업을 한 집단보다 학생들의 수학화 활동이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다.

한편, 실험집단과 통제집단의 수학화 활동 점수의 분포를 줄기와 잎 그림으로 비교해 보면 <그림 Ⅲ-13>과 같이 실험집단의 분포가 통제 집단의 분포보다 오른쪽으로 치우쳐져 있어 학생들의 수학화 활동이 전체적으로 잘 이루어졌다고 할 수 있다.

```
◈ 분석변수: 사후수학화(통제)          N  = 35
   줄기단위 = 10  /  잎단위 = 1

--------------------------------------------------
 도수 |  줄기: 잎
------+-------------------------------------------
  32  |  0   : 00000000000022223334555566999999
   2  |  10  : 28
   1  |  20  : 6
------+-------------------------------------------
  35  |

◈ 분석변수: 사후수학화(실험)          N  = 27
   줄기단위 = 10  /  잎단위 = 1

---------------------------------------------
 도수 |  줄기 : 잎
------+--------------------------------------
   2  |  0    : 07
   7  |  10   : 0124567
  10  |  20   : 0122455779
   5  |  30   : 01489
   2  |  40   : 58
   1  |  50   : 1
------+--------------------------------------
  27  |
```

<그림 Ⅲ-13> 사후 수학 학력 검사의 수학화 활동 점수에 대한 줄기와 잎 그림

<표 Ⅲ-14> 학생 면담 발췌문

질문 / 학생	수학 문제를 풀 때, 이전보다 식, 그래프, 그림, 기호 등을 더 많이 사용하는가?	수학 문제를 풀 때, 이전보다 풀이과정이나, 방법에서 수학적인 사고를 더 많이 한다고 생각하는가?	응용문제를 풀 때, 중요하다고 생각하는 것은? 문제의 이해, 풀이과정, 답 어느 것이지?
미숙(하 수준)	그러려고 하는데 맞는지를 모르겠어요.	하긴 하는데요. 생각이 잘 안 떠올라요.	문제의 뜻을 이해하는 것이 중요해요
성호(중 수준)	식을 더 많이 써요.	전에는 금방 포기한 것도 많았는데 지금은 한 번 더 생각해요.	전에는 답이 중요하다고 생각했는데, 지금은 과정이 더 중요한 것 같아요.
자영(상 수준)	그림이나 그래프를 그리면 이해가 빨리 되는 것 같아요, 그래서 많이 써요.	확률문제를 풀 때, 여러 가지 경우를 많이 생각해요.	세 단계가 모두 중요해요.

그러나 통제 집단의 학생 중 수학화 활동 점수가 0점인 학생이 많은데 그 원인을 분석하기 위해서 사후 수학 학력 검사의 성취도 점수가 각각 17점, 15점, 11점이지만 풀이과정이 전혀 없어 수학화 활동 점수가 0점인 3명의 학생을 면담하였다. 그 결과, 그들은 학교 시험에서 객관식 문항에 익숙하여 습관적으로 답만 맞으면 된다는 생각으로 문제 풀이과정은 별로 중요시 하지 않았다고 응답하였다. 따라서 문제 풀이과정을 안 썼다고 해서 수학화 활동이 전혀 이루어지지 않았다고 볼 수는 없다. 그렇다고 정답만을 쓴 것에 대해 수학화 활동을 했다고 점수를 줄 수도 없다. 왜냐하면 우연의 일치, 컨닝 등에 의한 것 일 수도 있기 때문이다. 마찬가지로 오답만을 쓴 것에 대해서도 수학화 활동이 전혀 이루어지지 않았다고 볼 수 없다. 이와 같은 수학화 활동 점수 배점의 약점을 보완하기 위해 수학화 활동 점수가 하, 중, 상 수준의 3명의 학생 미숙, 성호, 자영이를 면담하여 수학화 활동 과정을 질문하였다. 그 결과, <표 Ⅲ-14>의 발췌문에서와 같이 현실적 수학교육을 적용한 수업에서 학생들의 수학화 활동이 전체적으로 잘 이루어졌다고 할 수 있다.

또한, 어떤 수준의 학생들의 수학화 활동이 향상되었는지를 알아보기 위하여 사후 수학 학력 검사에서 정답률이 높은 두 문항 4번, 11번의 수학화 활동 점수의 분포를 분석해 보았다. 그 결과, <표 Ⅲ-15>와 같이 정답을 맞춘 학생들 중에서 통제집단 학생들 거의 대부분이 3점 이하의 수학화 활동 점수를 받았는데 반하여 실험집단 학생들의 약 50%가 4점 이상의 수학화 활동 점수를 받았다. 이는 곧 학생들의 수준에 관계없이 실험집단 학생들의 수학화 활동이 전체적으로 향상되었음을 뜻한다.

<표 Ⅲ-15> 사후 수학 학력 검사 문항 4, 11번의 수학화 활동 점수 분포

점수 / 문항	문항 4		문항 11	
	통제집단	실험집단	통제집단	실험집단
0~1	8명(50%)	1명(4.1%)	10명(50.0%)	1명(5.3%)
2~3	8명(50%)	10명(41.7%)	9명(453%)	9명(47.4%)
4~5	0명(0%)	13명(54.2%)	1명(5%)	9명(47.4%)
계	16명(100%)	24명(100%)	20명	19명

Ⅳ. 결 론

최근의 수학교육은 인간 활동으로서의 수학을 강조하는 활동주의적 교수・학습에 주목하고 있다. 활동주의적 교수・학습의 주된 목표는 도구적 지식으로서의 수학을 발견하고 경험하게 하여 수학을 응용하는 능력과 태도를 기르는 것이다. 학교 수학이 이와 같은 측면을 강조하여 이루어져야 한다고 주장했던 사람 중의 하나가 Freudenthal이다. 그는 수학의 가치를 수학의 유용성에 두고 수학의 학습은 이미 만들어진 수학을 부과하는 것이어서는 안 되고, 인류의 수학 학습 과정, 수학의 발생 과정을 학습자의 현재 상황에서 재발명하도록 해야 하며 현실 상황을 수학화하는 경험을 통해서 이루어져야 한다고 하였다.

이에 본 연구에서는 안내된 재발명을 통해서 점진적인 수학화에 이르도록 해야 한다는 현실적 수학교육의 이론을 우리나라 고등학교에 적용해 그 효과를 측정해 보고자 하였다.

김원경・백경호(2004)가 개발한 고등학교 확률과 통계 영역의 문맥을 바탕으로 20차시의 수업지도안과 수학 I 교과서에 의한 20차시의 수업지도안을 만들어 경기도 성남시 분당구에 소재한 B고등학교 인문계 2학년 임의의 2개 반에 각각 투입하여 교수실험을 한 결과는 다음과 같았다.

첫째, 현실적 수학교육을 적용하여 수업을 한 집단이 기존의 수학 I 교과서중심의 수업을 적용한 집단보다 수학 성취도 향상에 효과가 있었다. 특히, 실험집단과 통제집단의 성취도 점수의 분포를 비교해 본 결과 중하위 수준의 학생들의 성취도가 많이 향상되었다.

둘째, 현실적 수학교육을 적용하여 수업을 한 집단이 기존의 수학 I 교과서중심의 수업을 적용한 집단보다 수학화 활동이 더 잘 이루어졌다. 특히, 실험집단과 통제집단의 수학화 활동 점수의 분포를 비교해 본 결과 학생들의 수준에 관계없이 수학화 활동이 전체적으로 향상되었다.

위의 연구 결과로부터 고등학교 수학의 다른 영역에서도 학습 성취 수준의 향상과 활발한 수학화 활동을 위해서는 현실적 수학교육을 적용한 문맥의 개발이 필요하고 그에 따른 학습지도가 권장된다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서 주식회사.

권오남・신경희・신은주・김영신・최효진 (2002). 대학 미분방정식 교수・학습의 새로운 방향 : RME 접근, 대한수학교육학회지 E <수학교육학연구>, 12(3), pp. 389-408, 서울: 한국수학교육학회.

김용성 (2000). 문제상황을 기초로 한 수학화 경험이 수학적 신념과 문제해결력에 미치는 효과, 한국교원대학교 석사학위 논문.

김원경・백경호 (2004). 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육의 적용을 위한 문맥 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **18(1)**, pp. 137-155, 서울: 한국수학교육학회.

우정호 (1994). H. Freudenthal의 수학화 학습지도론 연구, 대한수학교육학회 논문집, 4(2), pp.93-128.

이승희・김수경 (2002). 중학교 함수・기하 영역에서 Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 학습자료 개발, 청람수학교육 **10**, pp.65-90.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 교육학 박사학위 논문.

정영옥 (1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰-초등학교의 알고리듬 학습을 중심으로, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> **9(1)**, pp.81-110.

정영옥 (2000). 수학교육 연구동향 - 네델란드의 현실적 수학교육, 대한수학교육학회지 <학교수학>, **2(1)**, pp. 283-310.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics* 1, pp.3-8.

__________ (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht: Reidel Publishing Company.

__________ (1991). *Revisiting mathematics education, China Lectures,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: Cd- β Press, Freudenthal Institute.

Streefland, L. (1990). Realistic mathematics education: What does it mean? In K. Gravemeijer(Eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education.* Culemborg: Techini Press.

Treffers, A. (1987). *Three dimensin, a model of goal and theory description in mathematics instruction: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Van den Brink, J. (1991). Realistic arithmetic education for young children. In R. Streefland(ed.), *Realistic mathematics education in primary school*, Utrecht: CD- β Press.

Implementation effects of the Realistic Mathematics Education in High School Probability and Statistics

Kim, Won Kyung
Korea National University of Education, Chungwon,
Chungbuk, 363-791, Korea
wonkim@knue.ac.kr

Peck, Kyung Ho
Suji High School, Yongin, Kyungki, 449-171, Korea
neokhwhite@yahoo.co.kr

This research aims to analyse implementation effects of the Real mathematics Education(RME) in the high school probability and statistics

For this aim, two research questions are estabilished as follows.

(1) Is there any improvement of mathematical achievement in the class by RME's lecture than in the class by the mathematics text's lecture ?

(2) Is there any improvement of mathematisation level in the class by RME's lecture than in the class by the mathematics text's lecture ?

Before answering the above research questions, RME.'s lecture notes and ordinary lecture notes are developed based on the learning principles of the RME and mathematics textbook respectively.

Two classes are randomly chosen from a high school located at midium size city and assigned as the experimental group and the control group respectively. The 20 hours of the RME's lecture notes is administerd to the experimental group and the 20 hours of the odinary lecture notes is administerd to the control group. It is shown that the class by RME's lecture is more effective in both of the mathematical achievement and the mathematisation activity than the class by the ordinary lecture.

Hence, it is urged from the result of this research that RME's context will be developed and the RME's lecture will be implemented in the other field of high school mathematics.

2) This work was supported by Korea Research Foundation Grant(KRF-2003- 030-C00009)
* ZDM classification : D14
* MSC2000 Classification : 97D40.
* Key words: realistic mathematics education, mathematical achievement,mathematisation

<부록 I> 개발 문맥에 의한 수업지도안 예시

<table>
<tr><td colspan="2">학습소재</td><td>주사위 문제</td><td>차시</td><td>5/20</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습목표</td><td colspan="3">*여사건의 확률을 이용하여 확률의 역사에 등장하는 주사위 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">학습
단계</td><td rowspan="2">수업의
흐름도</td><td colspan="2">교수- 학습 활동</td><td rowspan="2">수학화
과정</td></tr>
<tr><td>교사의 안내과정</td><td>학생의 문맥해결과정</td></tr>
<tr><td>도입
(15분)</td><td>교사
학생간
인사
↓
전시
학습
↓
예제
풀이
↓
본시
학습
목표
제시</td><td>*교사는 학생들이 전시학습을 통하여 여사건의 확률을 이해하도록 한다.

*전시학습
-여사건의 확률
임의의 사건 A에 대하여 사건 A와 그 여사건 A^c는 서로 배반사건이므로
$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
그런데 $A \cup A^c = S$이고, $P(S) = 1$ 이므로
$P(A) + p(A^c) = 1$
따라서, 사건 A가 일어날 확률이 $P(A)$일 때, A의 여사건이 일어날 확률은
$P(A^c) = 1 - P(A)$

예) 한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 적어도 한번 뒷면이 나올 확률을 구하여라.

*본시학습목표 제시</td><td>*학생들은 여사건의 확률을 이해한다.

*학생들은 전시학습의 예제를 풀어본다.

풀이) 모두 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 $P(A) = \frac{1}{8}$. 따라서 적어도 한번 뒷면이 나올 사건은 A의 여사건이므로 구하는 확률은
$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

*학습목표 인지</td><td></td></tr>
<tr><td>전개
(30분)</td><td>주사위
문맥에
관한
역사적
배경
설명</td><td>*교사는 확률의 역사적 배경에서 나오는 주사위 문제에 관한 다음 이야기를 학생들에게 들려준다.
「확률은 Pascal과 Fermat가 1654년 7월부터 10월까지 7번의 서신을 왕래한 것이 기원이 되었다고 전해진다. 그 당시의 도박사이었던 de Mere는 다음과 같은 주사위 문제를 Pascal에게 물었다. “한 개의 주사위를 4번 던져서 적어도 한 번 이상 6의 눈이 나오면 물주가 이기고, 그렇지 않으면 도박사가 이기는 게임이 있다. 이 게임은 승률은 0.518로 물주에게 유리하다고 한다.</td><td>* 학생들은 교사의 말을 청취한다.</td><td></td></tr>
</table>

학습 단계	수업의 흐름도	교수- 학습 활동		수학화과정
		교사의 안내과정	학생의 문맥해결과정	
전개 (30분)	문맥 상황 제시 ↓ 질의 응답	그렇다면, 두 개의 주사위 24번을 던져서 적어도 (6, 6) 눈이 한 번 이상 나오면 물주가 이기고, 한 번도 나오지 않으면 도박사가 이기는 게임에서는 승률이 도박사들에게 유리하다. 왜 그런가? ” de Mere로부터 질문 받은 Pascal은 답을 구하였고, 동료 수학자인 Fermat와 서신 왕래를 통하여 자신의 답이 옳다는 것을 확인하였다. * 주사위문제 문맥 상황을 학생들에게 제시한다. 「한 개의 주사위를 여러 번 던져 적어도 한 번 이상 6의 눈이 나오면 갑이 이기고 그렇지 않으면 을이 이긴다고 할 때, 갑은 몇 번을 던져야 유리한가? 또, 두 개의 주사위를 여러 번 던져 적어도 한번 이상 (6, 6)의 눈이 나오면 갑이 이긴다고 할 때, 갑은 몇 번을 던져야 유리한가?」 *교사는 다음 물음을 통하여 학생들이 주사위문제 문맥 상황을 수학화하도록 안내한다. ①한 개의 주사위를 1번 던질 때, 갑이 이길 확률은? ②한 개의 주사위를 2번 던질 때, 갑이 이길 확률은? ③한 개의 주사위를 3번 던질 때, 갑이 이길 확률은?	* 학생들은 문맥상황을 이해한다. * 학생들은 교사의 안내에 따라 수학화 활동을 한다. ①한 개의 주사위를 1번 던지면 6의 눈이 1번 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 갑이 이길 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 따라서 갑이 불리하다. ②한 개의 주사위를 2번 던지면, 적어도 1번 이상 6의 눈이 나올 확률은 2번 모두 6의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{5}{6})^2=0.305$이다. 따라서 갑이 불리하다. ③한 개의 주사위를 3번 던지면, 적어도 1번 이상 6의 눈이 나올 확률은 3번 모두 6의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{5}{6})^3=0.421$이다. 따라서 갑이 불리하다.	학생들은 확률의 역사에서 등장하는 주사위문제 문맥 상황을 이해하고 이를 학생들의 과거 경험을 통하여 문제 해결한 뒤 교사의 안내에 의하여 여사건의 확률을 이용한 수평적 수학화를 통하여 문맥을 해결해 본다.

학습 단계	수업의 흐름도	교수- 학습 활동		수학화과정
		교사의 안내과정	학생의 문맥해결과정	
		④한 개의 주사위를 4번 던지면 갑에게 유리한가?	④한 개의 주사위를 4번 던지면, 적어도 1번 이상 6의 눈이 나올 확률은 4번 모두 6의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{5}{6})^4 \fallingdotseq 0.517$이다. 따라서 갑이 유리하다.	교사의 안내에 의하여 여사건의 확률을 이용한 일반적인 수평적 수학화를 통하여 문맥을 해결해 본다.
		⑤두 개의 주사위를 1번 던질 때, 갑이 이길 확률은?	⑤ 두 개의 주사위를 1번 던지면 (6,6)의 눈이 1번 나올 확률은 $\frac{1}{36}$ 이므로 갑이 이길 확률은 $\frac{1}{36}$이다. 따라서 갑이 불리하다.	
전개 (30분)	질의 응답	⑥ 두 개의 주사위를 2번 던질 때, 갑이 이길 확률은? * 교사는 다음 물음을 통하여 학생들이 위의 문제 해결에 관하여 일반적인 수평적 수학화과정을 하도록 한다.	⑥두 개의 주사위를 2번 던지면, 적어도 1번 이상 (6,6)의 눈이 나올 확률은 2번 모두 (6,6)의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{35}{36})^2 \fallingdotseq 0.055$이다. 따라서 갑이 불리하다. * 학생들은 교사의 물음에 답하기 위한 사고활동을 한다.	
		⑦한 개의 주사위를 n번 던질 때, 한번도 6의 눈이 나오지 않을 확률은?	⑦ 한 개의 주사위를 한번 던질 때, 6의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 n번을 던질때의 확률은 $\left(\frac{5}{6}\right)^n$이다.	
		⑧한 개의 주사위를 n번 던질 때, 적어도 한번 이상 6의 눈이 나올 확률은?	⑧ 적어도 한번 이상 6의 눈이 나올 사건은 한번도 6의 눈이 나오지 않을 사건의 여사건이므로 구하는 확률은 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$이다.	
		⑨ ⑧의 확률이 0.5보다 크게 되는 n의 범위는?	⑨ $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0.5$을 만족하는 n의 최소값은 4이다. 따라서 $n\geq4$이다.	

학습 단계	수업의 흐름도	교수- 학습 활동		수학화과정
		교사의 안내과정	학생의 문맥해결과정	
전개 (30분)	질의 응답	⑩ 주사위를 최소한 몇 번 던져야 갑에게 유리한가? ⑪두 개의 주사위를 n번 던질 때, 한번도 (6,6)의 눈이 나오지 않을 확률은? ⑫두 개의 주사위를 n번 던질 때, 적어도 한번 이상 (6,6)의 눈이 나올 확률은? ⑬ ⑫의 확률이 0.5보다 크게 되는 n의 범위는? ⑭ 주사위를 최소한 몇 번 던져야 갑에게 유리한가?	⑩ 주사위를 최소한 4번은 던져야 갑이 유리하다. ⑪ 두 개의 주사위를 한번 던질 때, (6,6)의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{35}{36}$ 이므로 n번을 던질때의 확률은 $\left(\frac{35}{36}\right)^n$ 이다. ⑫ 적어도 한번 이상 (6,6)의 눈이 나올 사건은 한번도 (6,6)의 눈이 나오지 않을 사건의 여사건이므로 구하는 확률은 $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$이다. ⑬ $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n>0.5$을 만족하는 n의 최소값은 25이다. 따라서 $n\geq25$이다. ⑭ 주사위를 최소한 25번은 던져야 갑이 유리하다.	
정리 (5분)	본시 학습 정리 ↓ 과제 제시 ↓ 차시 예고	*교사는 다음과 같이 요약 정리해 준다 「어떤 시행에서 어떤 사건 A가 일어날 확률이 p라고 할때, 이 시행을 n번 시행에서 사건 A가 적어도 한번 이상 일어날 사건의 확률은 사건 A의 여사건의 확률 즉, n번 시행에서 사건 A가 모두 일어나지 않을 사건의 확률을 이용한다. 이 확률이 0.5보다 크게 되게끔 하는 시행 횟수만큼 시행을 했을 때 게임에 유리하다고 할 수 있다.」 * 교사는 학생들에게 과제를 제시한다. - 성공의 확률이 p인 어떤 시행을 계속한다고 하자. 이 시행에서 적어도 한 번 이상 성공이 나오면 갑이 이기고 그렇지 않으면 을이 이긴다고 할 때, 갑은 몇 번의 시행을 해야 유리한가? * 교사는 차시예고를 한다.	*학생들은 교사의 말을 청취한다. * 학생들은 과제를 해결해 온다. * 학생들은 차시예고를 청취한다	학생들은 과제를 통하여 일반적인 상황으로 확장하여 수직적 수학화를 할 수 있도록 한다.

<부록 Ⅱ> 수학Ⅰ교과서에 의한 수업지도안 예시

대단원명	Ⅶ. 확률	교과서 쪽수	274쪽~275쪽	차시	5/20
소단원명	확률의 기본성질				
학습목표	여사건의 확률의 의미를 알고 이를 활용할 수 있다.				
준비물	연습장, 교과서, 학생활동지	선수 학습	수학적확률		

학습 단계	학습 과정	교수- 학습 활동: 교사	교수- 학습 활동: 학생	학습 형태
도입 (5분)	동기 유발 및 학습 목표 제시	*인사 및 출결확인 *전시학습 확인을 통해 동기유발 (멀티 TV로 제시) 예) 세 명이 가위바위보를 할 때, 세 명이 모두 똑같이 낼 확률은? * 본시 학습목표 제시	* 바른자세로 인사 * 전시학습의 예를 풀어본다. - 모든 경우의 수는 27가지이고 3명이 똑같이 내미는 경우는 3가지이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$이다. * 학습목표를 숙지한다.	문답법
전개 (40분)	탐구 활동	* 교과서를 각자 속으로 읽게 한다. (2분)	* 교과서를 읽는다.	강의법
	↓	* 여사건의 확률에 대하여 설명한다.		
	교사 설명 ↓	「임의의 사건 A에 대하여 P(A)을 알 때, $A \cup A^c = S$ 이므로 다음이 성립한다. $P(A)+P(A^c)=P(A \cup A^c)=P(S)=1$ 따라서 $P(A^c)=1-P(A)$」		
	예제 풀이 ↓	* 예제2(교과서 275쪽)을 풀어준다.	*교사의 설명을 듣는다.	
	문제 풀이	*문제3(교과서 275쪽)를 학생 스스로 풀게 한 후 지명하여 발표하게 한다.	* 각자 문제를 풀고 지명 받은 학생은 칠판에 문제를 푼 다음 설명한다.	

학습 단계	학습 과정	교수- 학습 활동		학습 형태
		교사	학생	
전개 (40분)	교사 설명 ↓ 형성 평가	* 교사는 참고로 다음을 설명한다. 「"적어도 하나가 ....일 확률을 구하여라"라는 표현이 있으면 여사건의 확률을 이용하면 그 계산이 편리할 때가 많다.」 *형성평가 문제를 제시한다. - 흰공 3개, 검은 공 2개가 들어있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 모두 같은 색일 확률은? * 형성평가문제를 풀어준다. - 2개의 공이 모두 같은 색일 경우는 2개 모두 검은 공이거나 흰공인 경우이다. 이때 2개 모두 검은 공일 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$ 이고, 2개 모두 흰공일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$ 이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 한편, 다른 방법으로, 2개가 모두 서로 다른 색일 사건을 A라고 하면 A^c은 2개 모두 같은 색일 확률이므로 구하는 확률은 $P(A^c)=1-P(A)$ $=1-\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$ $P(A^c)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	*교사의 설명을 듣는다. *형성평가 문제를 푼다. * 각자 자신이 해결한 것과 비교해 보고 오답 노트를 정리한다.	강의법
정리 (5분)	학습 내용 정리 및 차시 예고	* 본시 학습 내용을 정리해 준다. (멀티 TV 사용) 「 여사건 확률의 의미」 * 차시예고를 한다.	* 멀티 TV를 보며 학습한 내용을 숙지 한다. * 차시예고를 듣는다.	

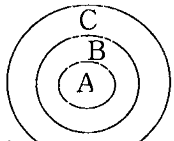
<부록 Ⅲ> 사후 수학 학력 검사지

2학년 (　)반 (　)번　성명 :

※ 풀이과정을 쓰시오

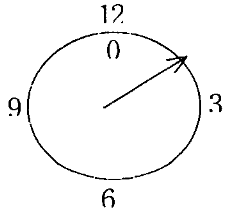
1. 어떤 가방에 지폐 한 장이 들어 있다. 이 지폐는 오천원권일수도 만원권일수도 있다. 여기서 오천원권 지폐 한 장을 가방에 넣은 후 잘 섞는다. 그리고 나서 임의로 한 장의 지폐를 꺼냈더니 오천원권 지폐가 나왔다고 한다. 그럼 나머지 한 장의 지폐를 꺼낼 때, 오천원권 지폐가 나올 확률을 구하여라.

2. 오른쪽 그림과 같은 과녁판에 3개의 화살을 쏠 때, 다음을 구하여라. (단, 모든 화살은 과녁판 안에 같은 정도로 맞춘다.)



(1) 표본공간
(2) 두 번째 쏜 화살이 첫 번째 쏜 화살보다 중심에서 더 벗어났을 사건
(3) 세 번째 쏜 화살이 첫 번째 쏜 화살보다 중심에서 더 벗어날 확률

3. 오른쪽 그림과 같은 시계판에 자유롭게 움직이는 초침이 있다. 이 초침을 회전시킨 후 스스로 정지했을 때, 초침이 가리키는 숫자를 x라고 하자. 다음을 구하여라.



(1) 표본공간
(2) 초침을 회전시키는 시행을 50번, 100번, 200번 500번, 1000번 했을 때, 초침이 영역 A={x| 0≤x≤3}}에 속한 비율은 다음과 같다. 사건 A의 확률을 구하여라.

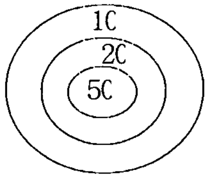
시행 횟수	50	100	200	500	1000
영역 A에 속한 비율	0.26	0.23	0.255	0.248	0.251

4. 과거 경험으로 증권 투자자는 다음과 같이 판단한다고 한다. 「 현 경제 조건하에서 고객은 0.6의 확률로 우량채권에 투자할 것이고, 0.3의 확률로 면세채권에 투자할 것이며, 0.15의 확률로 우량채권과 면세채권에 투자할 것이다」 이때, 고객이 우량채권이나 면세채권에 투자할 확률을 구하여라.

5. 친구 7명 중에서 어느 한 명의 생일 만 월요일일 확률을 구하여라.

6. 오른쪽 그림과 같이 10점, 20점, 50점의 세 개 영역으로 나눠져 있는 동그란 원판이 있다. 어떤 사람이 화살을 쏘았을 때, 10점 영역을 맞출 확률은 0.7, 20점 영역을 맞출 확률은 0.2, 50점 영역을 맞출 확률은 0.1이라고 한다. 화살을 두 번 쏠 때, 다음 확률을 구하여라. (단, 2개의 화살은 모두 과녁판을 맞춘다.)

(1) 두 번 던진 점수의 합이 30점이 될 확률
(2) 두 번 던진 점수의 합이 적어도 40점이 될 확률
(3) 두 번 중 적어도 한번은 50점 영역을 맞출 확률



7. 52장의 트럼프 카드에서 3장의 카드를 다시 넣지 않고 차례로 꺼낼 때, 첫째 카드는 빨간색 A, 둘째 카드는 Q나 K 카드, 셋째 카드는 3보다 크고 7보다 작은 숫자가 나올 확률을 구하여라. (트럼프 카드에는 4가지의 무늬가 있고, 2가지 무늬는 빨간색, 다른 2가지 무늬는 검정색이다. 그리고 각 무늬에는 A, 2,, 3, ⋯, 10, J, Q, K 의 숫자 또는 문자가 쓰여져 있다.

8. 영선이는 길을 가다가 우연히 초등학교 동창생 숙희와 은희를 만나 반갑게 대화를 하였다. 다음은 그들의 대화 내용이다.

영선: 자식이 모두 몇 명이니?
숙희: 2명
은희: 나도 2명
영선: 숙희야. 큰애가 딸이니?
숙희: 응 그래
영선: 은희야. 적어도 한 명은 딸이겠네?
은희: 당연하지

위의 대화 내용에 대하여 다음 확률을 구하여라.
(1) 숙희의 두 번째 대답에서 숙희의 2명의 자녀가 모두 딸일 확률.
(2) 은희의 두 번째 대답에서 은희의 2명의 자녀가 모두 딸일 확률.

9. 어느 상자에 양면이 모두 검정색인 딱지 1 장, 양면이 모두 흰색인 딱지 1장, 한면은 흰색, 다른 면은 검정색인 딱지 1장이 들어 있다. 이 3장의 딱지 중에서 한 장을 임의로 꺼냈을 때, 한 면이 흰색이었고 한다. 이 때, 다른 면도 흰색일 확률을 구하는 방법은 다음과 같이 두 가지로 생각할 수 있다. 어느 것이 옳은지 말하여라.
(1) 꺼낸 딱지는 양면이 모두 검정색이 아닌 딱지 2장중의 하나이다. 이 2장의 딱지 중에서 양면이 흰색인 것은 한 장뿐이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(2) 꺼낸 딱지의 한 면이 흰색일 확률은 $\frac{1}{2}$, 두 면 모두 흰색일 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$이다.

10. 어떤 병원에서 한 의사가 어느 특별한 병을 정확하게 진찰할 확률은 0.8, 만일 의사가 오진을 한다면 환자가 법적 소송을 할 확률이 0.9라면 의사가 오진을 해서, 환자가 법적 소송을 할 확률을 구하여라.

11. 혈액형 A형인 사람 중에서 5%가 왼손잡이라고 한다. 전체 인구의 40%가 A형이라고 할 때, 어떤 사람이 A형이고 왼손잡이일 확률을 구하여라.

12. 두 명의 궁수가 있다. A라는 궁수는 100번 쏘아서 80번 과녁을 맞추고, B라는 궁수는 100번 쏘아서 90번을 맞춘다고 한다. 두 궁수 A, B가 한 번씩 쏘았을 때, 과녁을 맞힐 확률을 구하여라.

13. A 도시에서 한 밤중에 택시가 교통사고를 내고 뺑소니 친 사건이 발생하였다. A 도시에서 운행되는 택시는 노란색 택시가 70%, 녹색 택시가 30% 라고 한다. 어느 목격자는 그 날밤 사고를 내고 뺑소니 친 택시가 녹색이라고 진

술하였다. 그러나 그 목격자는 색각이상자이어서 한 밤중에 택시의 색깔을 바르게 맞출 확률이 80%이라고 한다. 그 날 밤 교통사고를 내고 뺑소니 친 택시가 목격자의 진술대로 녹색일 확률을 구하여라.(단, 뺑소니 택시는 A도시에서 운행되는 택시라고 한다.)

14. 프로농구 참피온 결정전에서 A, B 두 팀이 맞붙게 되었다. 참피온 결정전은 7전 4선승제이고, 그 동안의 전적을 조사한 결과, A팀이 B팀에 대한 승률은 0.6이라고 한다. (단, 비기는 경우는 없다.) 참피온 결정전에서 그 동안의 승률이 그대로 유지된다고 할 때, A팀이 우승할 때까지의 경기 수를 확률변수 X라 하고 다음을 구하여라.
(1) X의 확률질량함수.
(2) A팀이 5번째 경기 이내에서 우승할 확률.

15. 도스토예프스키가 깊이 빠져들었다는 룰렛이라는 도박 게임은 38등분된 원판이 그 도구가 된다. 이 원판 위의 각 등분에는 1부터 36까지의 숫자와 0, 00이 각각 쓰여 있고, 도박하는 사람은 일정한 금액을 지불하고 자신이 원하는 숫자(0, 00은 제외)를 선택한다. 원판을 회전시키고 구슬을 임의로 던져 선택한 숫자에 멈추면, 처음 지불한 금액의 36배를 받고, 그렇지 않으면(0, 00에 멈출 경우 포함)돈을 잃게 된다. 1000원을 내고 룰렛을 한 게임 했을 때, 받을 수 있는 돈은 평균 얼마인가?

16. 다섯 개의 보기 중에서 하나를 택하는 오지 선다형 4문제가 있다. 어느 학생이 4문제의 보기를 모두 임의로 답할 때, 한 문제를 맞출 확률을 구하여라.

17. 어느 학교에서는 오전 10시부터 오후 3시 사이에 불시에 소방훈련을 실시하려고 한다. 훈련이 시작될 확률은 모든 시간대에 일정하다고 할 때, 다음을 구하여라.
(1) 훈련이 시작되는 시간을 X라 할 때, 확률밀도함수 f(x)를 구하여라.
(2) 12시 이전에 훈련이 실시될 확률을 구하여라.

18. 입학정원이 476명인 어떤 대학의 입학시험은 1000점 만점이고 지원자 3000명의 득점분포는 평균 450점, 표준편차 75점인 정규분포를 따른다고 조사되었다. 합격자의 최저점수를 구하여라.
(단, $\frac{476}{3000} \fallingdotseq 0.1587,\ P(0 \le Z \le 1) \fallingdotseq 0.3413$).

19. 지능(I.Q.)검사는 개인의 지적발달 수준을 나타내주는 척도로써, 처음에는 정신지체아를 구별하기 위한 목적으로 만들어졌다고 한다. 지능검사의 점수는 평균 100점, 표준편차가 16점인 정규분포를 따른다. 다음 물음에 답하여라.
(1) 지능검사의 점수가 68점 이하이면 정신지체자라고 한다. 정신 지체자는 전체의 몇 %인가? (단, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$)
(2) 어느 학자는 지능검사의 점수가 상위 5% 이내에 드는 사람을 영재라고 한다. 영재집단의 최저 지능 검사의 점수를 구하여라. (단, $P(0 \le Z \le 1.65) \fallingdotseq 0.45$)

20. 주말 오후 5시 제주도행 항공 노선은 항상 매진이지만, 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우가 5%가 된다고 한다. 항공사 측에서는 사전 통보 없이 탑승하지 않을 경우를 대비하여 좌석수 80에 대하여 82명이 좌석을 예약 받았다고 하자. 승환이는 급한 일이 생겨 토요일 오후 5시 비행기를 타고 제주도를 가야만 한다. 좌석이 매진이기 때문에 대기자 명단에 올려놓았다. 대기자 순번이 3번일 때, 그 비행기를 타고 제주도에 갈 확률을 구하여라. (단,
$\sqrt{3.895} = 1.98 P(0 \le Z \le 0.46) = 0.1772\ P(0 \le Z \le 0.5) = 0.1915$