大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 15 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.3, 287-313. Aug 2005

소수 개념의 교수학적 분석

우 정 호* · 변 희 현**

소수는 십진기수법의 완성을 통해 실수의 표준기호화를 가능하게 하며 실수의 본질을 이해하는데 핵심적 역할을 하는 기본 개념이다. 우리나라 학교수학에서는 소수 개념에 대하여 분수의 다른 이름이라는 측면이 강조되고 그 밖의 중요한 여러 측면이 소홀히 지도된 채 성급한 알고리즘화가 시도되고 있다. 그 결과 학생들은 소수 개념을 적절히 이해하지 못한 채 형식적인 계산 조작의 대상으로 파악하며, 이는 무한소수인 실수 개념 이해의 심각한 장애 요인으로 작용한다는 문제점이 제기된다. 이에 본 논문에서는 학교수학의 주요 개념의 하나인 소수 개념에 대하여 그 교수학적 분석을 시도하여 그 주요한 교육적 문제점의 근원을 드러내고 그 개선 방안을 제시하였다.

I. 서 론

수학적, 역사적으로 중요한 의미를 갖는 소수는 초등학교 수학에서부터 고등학교 수학에 이르는 오랜 기간에 걸쳐 다루어지며, 실수 개념의 이해에 핵심적 역할을 한다. 그러나 많은 교육적 노력에도 불구하고 학생들의 소수 개념 이해도가 낮다는 지적이 적지 않다. Hiebert와 Wearne(1985), Sackur-Grisvard와 Leonard(1985), Resnick(1989) 등은 적지 않은 학생들이 소수의 계산이나 대소 비교에 사용하는 절차는 이미 알고 있던 자연수나 분수의 지식을 과대 일반화한 것임을 보였다. Carpenter 등(1981)은 소수 개념과 관련된 학생들의 그릇된 이해가 소수 계산 문제에서 일어나는 오류의 원인이라고 하였다. Thompson과 Walker(1996)도 많은 학생들이 불충분한 소수 개념을 가지고 있어 수 감각이 부족하고 오개념을 갖게 된다고 지적하였다. 이들의 지적은 학생들로 하여금 소수 개념을 잘 이해하도록 지도하는 것이 쉬운 일이 아님을 보여준다.

그런데, 소수 개념을 충실히 이해하도록 지도하기 위해서는 무엇보다도 먼저 다양한 측면을 갖는 소수 개념의 본질을 분명히 밝힌 다음 그러한 제 측면이 지도 과정에서 어떻게 고려되어야 하는가의 문제를 다루지 않을 수 없을 것이다. 그러나 지금까지 이루어진 소수 개념 지도에 관한 연구들(Basso, Bonotto & Sorzio, 1996, 1998; Brousseau, 1997; d'Entremont, 1991; Hiebert, 1992; Thompson & Walker, 1996; Wearne & Hiebert, 1988)을 분석해 보면, 다양한 측면을 갖는 소수 개념의 본질을 명확히 밝히는 문제에서부터 뚜렷한 성과를 거두지 못하고 있으

* 서울대학교, wjh@plaza.snu.ac.kr
** 서울대대학원, bhhhss@dreamwiz.com

며, 그 결과 전체적으로 일관되고 연계성 있게 소수 개념 학습-지도 문제를 규명하지 못하고 있는 상태로 보인다.

소수 개념의 바람직한 학습 지도를 위해서는, 무엇보다도 먼저 다양한 측면을 갖는 소수 개념의 본질이 무엇이며 그 본질이 어떤 현상을 조직하는 과정에서 발생한 것이며 이들 현상에 대해 조직화의 수단으로 어떻게 작용하고 있는가에 대한 자세한 분석이 요구된다. 이에 본 연구에서는 학교수학에서 학생들이 이해하기를 기대하는 소수 개념의 본질을 여러 측면에서 분석하고, 그 분석 결과에 기초한 보다 바람직한 소수 개념 학습-지도 방법을 탐색하고자 한다.

Mari(1999)와 우정호(2004)의 견해에 따르면, 학교수학에 대한 교수학적 분석은 지도하고자 하는 수학적 지식의 본질에 대한 다양한 관점의 정보를 분석, 통합, 관련지어 학교수학을 교육적으로 의미 있는 '열린' 지식으로 이해하려는 시도이며, 이는 수학교육의 개선을 위한 실질적으로 의미 있는 수학교육 연구의 출발점이라고 생각된다. 이에 본 논문에서는 소수 개념의 교수학적 분석을 수행하여 닫힌 형식적 지식으로서의 소수를 '열어' 교육적으로 의미 있는 지식으로 파악하고자 한다. 이 논문에서는 이러한 분석적 논의의 틀로, Freudenthal(1983)의 교수학적 현상학, Vergnaud(1996)의 개념장 이론, Van Hiele(1986)의 학습 수준 이론을 원용할 것이다.

수학적 개념이 창안된 현상 및 인류의 학습 과정에서 확장되어 온 현상과 관련하여 그 본질을 기술하고 이를 학습-지도 과정과 관련하여 분석하는 Freudenthal의 교수학적 현상학은 닫힌 지식으로서의 학교수학을 열어 교육적으로 의미 있는 지식으로 이해하는 교수학적 분석의 주요한 방법론이 될 수 있다.

한편, 기호와 상징 체계에 의해 언어적 표현을 개선해 나아가는 과정, 곧 언어를 정돈하고, 조정하고, 변환하여 점차 세련시켜 가는 형식화의 과정은 중요한 수학화의 과정이다. 이에 본 논문에서는 수학적 개념을 현상과 본질이란 측면과 함께 언어적 측면을 포함시켜 상황, 불변자, 기표의 조합체로 파악하는 Vergnaud (1996)의 개념장 이론을 바탕으로 소수 개념의 분석을 시도할 것이다.

또한, 학교수학에서 소수 개념의 의미 있는 이해를 추구하는 학습-지도가 장기간에 걸쳐 일관되고 연계성 있게 이루어지려면, 먼저 수학화에 따른 소수 개념의 발달 과정을 분명히 할 필요가 있다. 이에 이 논문에서는 Freudenthal의 수학화 학습 이론과 Van Hieles의 학습 수준 이론을 기초로, 소수 개념의 발달 수준의 규명을 시도할 것이다.

이상에서 고찰한 소수 개념의 본질, 소수의 개념장, 소수 개념의 발달 수준에 대한 분석 결과를 도구로, 우리나라 학교수학에서의 소수 개념의 학습-지도 실태를 분석할 것이다. 이를 위해 현행 7차 교육과정에 따른 교과서에서의 소수 관련 내용과 기술 방식을 고찰하고, 학생들의 소수 개념에 대한 이해도를 검사지와 면담 조사를 통해 확인한다.

그리고, 이상의 논의를 기초로 우리나라 학교수학에서 소수 개념 지도의 개선 방향과 그에 따른 구체적인 지도 방안을 제시할 것이다.

II. 소수 개념의 현상학적 분석

Freudenthal이 제기한 현상학적 관점에서 소수 개념의 분석을 시도하였다. Freudenthal(1983)에 의하면, 수학적 개념의 현상학은 그것이 창안되고 발전되어 온 현상과 관련하여 그 본질

을 기술하는 것이며, 이를 위해서는 소수와 그 발생, 응용 및 역사에 대한 자료를 분석할 필요가 있다. 이에 본 장에서는 수학적, 역사-발생적, 심리학적 관점에서 소수 개념을 분석 고찰하고, 그러한 현상학적 분석을 통해 밝혀진 소수의 본질을 종합하여 소수의 개념 요소 추출을 시도한다.

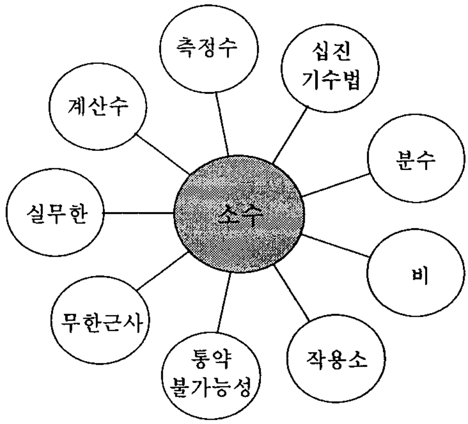
먼저, 수학적 분석의 결과 소수는 첫째, 자연수의 표기 원칙인 십진기수법을 소수점 아래까지 확장하여 완성시킨 기호 체계이며(Hiebert, 1992: 287-288) 둘째, 단위보다 작은 양을 측정할 때 실제적인 측정수는 분수가 아닌 소수임을 알 수 있다(Freudenthal, 1973: 202-204). 이 때, 측정수로서의 소수는 단위의 세분이 요구되는 크기의 측정에서 가분성에 기초하여 연속적인 단위의 10등분에 따라 측정의 과정과 결과를 원하는 만큼 정확하게 나타낼 수 있다는 본질을 지닌다. 셋째, 소수는 선형성을 갖는 작용소(operator)임을 알 수 있다. 이는 비가 발생하는 구체적인 상황과 연결할 때 그 의미상 차이를 갖는 스칼라 작용소와 함수 작용소로 구분할 수 있으나, 양의 영역이 陽의 유리수의 집합과 동일시되면서 이러한 서로 다른 의미가 유리수 개념으로 종합됨으로써 둘 모두를 순수한 수로 생각할 수 있게 된다(Vergnaud, 1988: 158). 넷째, 실수의 수학적인 여러 가지 정의 방법을 고찰함으로써 학교수학에서 무한소수로 정의하는 실수는 Cauchy 수열의 특별한 형태로 극한이 그 핵심 개념임을 알 수 있다.

역사-발생적 분석의 결과, 청동기 시대부터 필요성이 대두된 분수 개념과 표기법이 1585년 Stevin에 의한 최초의 소수 정의를 통해 비로소 정수 부분의 십진법 아이디어가 소수 부분까지 명확하게 확장되고 종합된 것임을 알 수 있다. 분수의 십진법화는 십진기수법의 완성으로 볼 수 있으며, 이때부터 소수의 대중적인 사용이 가능해졌다(Boyer & Merzbach, 2000; Sarton, 1935). 또한, Stevin의 소수 정의는 모든 크기를 수치화할 수 있게 할 뿐만 아니라, 무리수 아이디어 발생에 결정적인 역할을 하였음을 알 수 있다. 그리스 시대에 Pythagoras 학파에 의한 '통약불가능한(incommensurable)' 양의 발견은 '만물의 근원은 수(자연수)'라고 하는 Pythagoras 학파의 신념을 위협하게 되었다. 이러한 위기를 극복하기 위해 이산량과 연속량을 서로 다른 범주로 구분하여 각각 산술과 기하의 영역에서 수와 크기의 개념에 대응시켜 연구하였다. 이는 무리수 개념의 기원이 되는 통약불가능한 양을 수로 표현할 방법을 갖지 못했기 때문이다. 이산적인 것과 연속적인 것으로 구분되어 있던 양의 범주는 16세기 이후 Stevin의 소수 정의로 연속량을 수로 나타내고 수에 연속성을 부여하여 수와 크기를 동일시하는 계기를 마련한다(Moreno-Armella & Waldegg, 2000: 186-187). 그런데, Stevin은 임의의 크기를 측정하는 과정에서 이론상 무한소수가 나타난다는 것을 부인하지 않으나, 이는 경험적인 측정 활동으로부터 알 수 있는 것이 아니라고 보았다(Stevin, 1585: 215 ; MorenoArmella & Waldegg, 2000: 188에서 재인용). 그의 이러한 인식론적 입장은 수의 영역을 확장시키는 매우 중요한 단계는 수에 대한 산술적 조작의 결과가 임을 나타내는 것이다. 예를 들어, $\frac{4}{3}$ 는 나눗셈에 의하여 '몫이 무한히 많은 3을 나타낼 것'임을 인식하는 것이다(Hitchcock, 1996: 30). 또한, Klein(1924)에 의하면 무리수에 대한 일반적인 아이디어는 16세기 말 소수 도입의 결과로 생겨나게 되었다고 한다. 이는 나눗셈에 의하여 분수를 소수로 나타내는 과정에서 순환소수를 인식하게 되고, 이로부터 비순환소수를 자연스럽게 떠올리게 되는 과정에서 이루어지는 것이라고 한다.

심리학적 고찰 결과, 수를 측정이라는 인간 활동의 소산으로 본 Dewey(1901)의 생각을 소수에 확장 적용하면 소수 개념 발생의 심리적 기원 역시 단위의 세분에 의한 측정 활동에 있다고 볼 수 있다. 이는 계속적인 단위의 10등분에 의해 각 단계에서 생기는 나머지를 보다 정확하게 파악함으로써, 전체량에 점차 근사시켜 가는 것으로, 단위를 동일한 크기로 등분할 하여, 그 개수로 전체량을 파악하는 분수에 의한 측정 방법과는 구별된다. 그리고, 경험적이고 물리적인 측정에서 유한소수를 파악하는 것을 시작으로 이론적이고 관념적인 측정에서 무한소수를 파악한다면, 무한소수에 의한 실수 정의 역시 측정에 기초하여 이해할 수 있다.

또한, Brousseau(1983), Sierpinska(1990; 1994) 등은 인식론적 장애가 개인의 학습 과정이나 학문적 지식의 역사적 발달 과정에서 불가피하며, 훌륭한 이해는 인식론적 장애의 극복을 통하여 성취된다고 본다. 이에 소수 개념의 성공적인 학습 지도를 위해서는 먼저 소수 개념과 관련된 인식론적 장애를 분석해 볼 필요가 있다. 여기서는 선행연구(Sackur-Grisvard & Leonard, 1985; Nesher, 1987; Resnick et al., 1989; Brousseau, 1997; 조한혁, 최영기, 1999)를 토대로 소수 개념의 인식론적 장애 유형을 분석한 결과, 소수를 단위를 수반한 양의 표현 또는 소수점을 갖는 자연수로 이해하거나, 무한소수는 항상 유한소수로 대체될 수 있는 것으로 판단 또는 무한 과정에 대응하는 잠재적 무한 개념으로 이해하는 등을 알 수 있었다.

이상에서 소수 개념에 관한 수학적, 역사-발생적, 심리학적 관점의 분석 고찰을 통해 밝혀진 소수의 본질을 종합하여 소수 개념의 9가지 요소 즉, 측정수, 십진기수법, 분수, 비, 작용소, 통약불가능성, 무한 근사, 실무한, 계산수를 추출할 수 있고 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



이는 이후에 소수의 개념장과 발달 수준을 규명하고 소수 개념 학습-지도의 실태를 분석하는데 사용할 것이다.

III. 소수의 개념장과 발달 수준

수학적 개념은 그 개념이 태동하게 된 현상을 정리하는 수단으로서 기능하면서 현상과 관련을 맺고 있다. 또한 수학적 개념은 수학적 언어로 표현될 수 밖에 없으므로, 현상을 정리하여 표현하는 과정에서 사용되는 언어를 살펴보는 것은 수학화 과정과 관련하여 중요한 의미를 지닌다. 수학적 구조의 교수학적 현상학에 대하여 논의한 Freudenthal(1978) 역시 학습 과정에서 수학적 언어의 수준이 발견되고 있음을 언급한 바 있다. 그러므로, 수학적 개념에 관한 언어학적 분석은 교수학적 분석의 한 부분이 되지 않을 수 없다. 이에 제 1절에서는 개념을 상황, 조작적 불변자, 기표라는 세 가지 인자의 상호 관련체인 개념장으로 파악하고 여러 가지 수학적 개념의 개념장을 분석 제시하고 있는 Vergnaud의 이론에 따라 소수의 개념장을 규명함으로써 소수 개념의 본질에 대한 분석을 재차 시도한다. 또한, 소수 개념의 의미 있는 이

해를 추구하는 학습 지도를 장기간에 걸쳐 연계성 있게 추구하기 위해서는 수학화에 따른 소수 개념의 발달 수준을 명확히 규명할 필요가 있다. 이에 제 2절에서는 Freudenthal의 수학화 학습 이론과 이를 기하교육에서 구현하고자 한 Van Hieles의 기하 학습 수준 이론을 기초로, 소수 개념의 발달 수준의 규명을 시도한다.

1. 소수의 개념장

Vergnaud는 개념의 본질을 다음과 같이 파악한다.

> 개념은 세 집합의 세 순서쌍
> C=(S, I, S)
> 이다. 여기서 S는 개념을 의미 있게 만드는 상황의 집합이고, I는 주체가 이러한 상황을 분석하고 파악하기 위해 인식하고 사용할 수 있는 불변자(대상, 성질, 관계)의 집합이며, S는 이러한 불변자를 가리키고 표현하는데 사용될 수 있는 기호적 표현의 집합이다(Vergnaud, 1988: 141).

언어학적으로 (I, S)는 표현이며, 표현은 기의(the signified : I)와 기표(the signifier : S)라는 두 가지 측면이 상호작용하는 것으로 볼 수 있다. 그리고 어떤 개념의 의미와 범위는 단지 한 종류의 상황과 관련되는 것은 아니며, 또한 상황은 다양한 대상과 성질을 포함하므로 상황에 대한 인지적 분석에는 여러 가지 개념이 포함된다. 여기에 개념장을 연구해야 하는 이유가 있다고 하면서, Vergnaud는 개념장을 다음과 같이 정의한다.

> 개념장이란 여러 가지 상호 관련된 개념을 발생시키는 다양한 상황의 집합이며, 동시에 이러한 상황의 다양성으로부터 파생되는 여러 가지 성질을 갖는 개념의 집합이다(Vergnaud, 1996: 225).

하나의 개념은 성질, 절차 등 서로 측면을 달리하는 여러 요소로 구성되어 있다. 이런 제 요소는 각자 서로 다른 상황과 관련되므로 하나의 상황만으로는 그 개념을 설명할 수는 없으며, 관련된 다양한 상황을 분석할 때 비로소 그 개념의 의미가 보다 분명해질 수 있다. 개념장 이론은 이런 전제 하에 개념과 관련된 다양한 상황을 분석한다.

수학적 개념이나 정리에 대한 인지는 주로 그에 대한 개념화 과정을 의미한다. 그런데 개념화는 빙산과 같이 그 대부분의 과정이 표면 아래 놓인 채 드러나지 않는다. 먼저 그 수학적 개념이나 정리가, 인지 주체의 경험을 통해 그 개념이나 정리를 발생시킨 상황을 파악 분석하는데 사용되는 조작적 불변자로 발달한다. 조작적 불변자는 인지 주체의 세계에 대한 개념적, 전(前)-개념적 표상의 핵을 이룰 뿐만 아니라, 개념장 이론에서 매우 중요한 '인지양식(scheme)[1]'의 가장 본질적인 부분이다.

---

1) 인지양식은 특정한 상황의 부류에 대응하여 인지 주체가 취하는 불변의 행동 양식으로서, 인지 주체로 하여금 그 부류의 상황을 기능적으로 다룰 수 있도록 하는 역동적 총체이다. 이 인지양식은 아래 그림과 같이 조작적 불변자, 추론가능성, 행동법칙, 목적의 네 가지 요소로 이루어져 있는데, 그 중 특히 상황을 분석하고 파악하는 데 사용할 수 있는 '조작적 불변자'가 본질적인 부분이다. Vergnaud는 직관적이고 암묵적인 지식에 내재된 수학적 개념과 정리를 분석하기 위해 행동적 개념(concept-in-action)과 행동적 정리(theorem-in-action)라는 아이디어를 도입하는데, 이것은 수학적인 인지양식의 핵심인 조작적 불변자를 이룬다(Vergnaud, 1994: 53-54)

조작적 불변자 (행동적 개념과 행동적 정리) —추론 · 추측→ 행동 법칙 목표와 기대

Vergnaud의 개념장은 상황을 개념적 구조의 관점에서 분류할 뿐 아니라 상황을 분석하고 파악하기 위해 사용하는 조작적 불변자와 이들의 표현에 관한 분석을 토대로 구성된다. 이러한 개념장 이론을 소수에 적용하면, 소수 개념이 기능하는 상황과 그 상황의 분석을 통하여 도출되는 본질을 드러내고, 그 본질의 다양한 표현에 관한 분석으로부터 언어적인 관점에서 소수 개념을 보다 분명히 할 수 있을 것이다. II장의 현상학적 분석을 통해 도출한 소수의 개념 요소는 Vergnaud가 말하는 개념장에서 조작적 불변자에 해당하는 것으로 파악될 수 있다. 여기서는 소수의 본질을 보다 명확히 밝히기 위해 소수로 표현되는 서로 다른 측정 상황과 소수의 가법적 구조 및 승법적 구조를 살펴본 뒤, 마지막으로 실수로의 확장을 위한 무리수의 존재성에 관한 증명과 무한소수의 표현을 살펴봄으로서, 소수의 개념장을 규정해보고자 한다.

동일한 종류의 양과 단위가 주어졌을 때, 소수로 표현되는 측정 상황으로 단위의 10등분을 통한 측정 상황과 미터 단위의 변환에 의한 측정 상황을 생각할 수 있다.

첫 번째 단위의 10등분을 통한 측정 상황은 단위보다 작은 양의 측정을 위해 단위를 세분하는 활동을 전제로 한다. 이러한 측정 상황에서 주체가 고려하는 행동적 정리는 '단위보다 작은 양의 측정은 단위의 10등분을 통하여 할 수 있다'는 것이다. 측정대상인 양 a의 크기를 주어진 단위 u로 측정하는 경우 예컨대, a의 크기가 1개의 u, 2개의 $\frac{1}{10}-u$, 3개의 $\frac{1}{100}-u$로 측정될 수 있다면, 이 측정 상황은 다음과 같이 세 가지로 표현될 수 있다.

① 일상적인 언어

a의 크기는 u가 한 번 포함되고 조금 남는다. 나머지를 측정하기 위해 u를 10등분 하니 10등분한 것 2개가 포함되고 또 조금 남는다. 이 때, 그 나머지에는 10등분한 u를 다시 10등분하여 얻은 것 3개가 포함된다.

② 도표

크기 a를 구성하는 단위 및 세분단위와 그 개수를 다음과 같이 도표로 나타낼 수 있다.

단위 및 세분단위	u	$\frac{1}{10}-u$	$\frac{1}{100}-u$
개수	1	2	3

③ 수식

$$a = 1\times u + 2\times\frac{1}{10}u + 3\times\frac{1}{100}u$$
$$= (1 + 2\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{100})u$$
$$= \frac{123}{100}u = 1.23u$$

위의 세 가지 표현 방법 중 ②와 ③은 소수 개념의 요소 중 십진기수법을 잘 드러낸다. 특히 ③은 소수가 십진 분수임을 드러내며, 단위(u)와 주어진 양(a)사이의 관계를 나타내는 '측정수'는 '내적비' 및 단위 u에 크기 a를 대응시키는 함수인 '작용소'로 해석되므로, 이러한 측정 상황을 통해 비 및 작용소로서의 소수 개념에 대한 이해도 가능하다. 즉, 단위의 세분에 의한 측정 상황에는 소수 개념의 요소 중 측정수, 십진기수법, 분수, 비, 작용소 등이 내포되어 있다. 나아가 정확성에 제한을 두지 않는 관념적이고 이론적인 측정 상황으로 전이한다면 무한소수까지 측정수의 범위를 확장할 수도 있다.

두 번째로, 미터 단위의 변환 과정에서 소수로 표현되는 상황은, 예를 들어, ㎝로 표현된 크기를 m로 변환함에 있어 1㎝가 $\frac{1}{100}$ m임을

전제로 하여, 예컨대 25㎝를 기본단위 $\frac{1}{100}$ m의 개수가 25개인 것으로, 즉, 25 $\times \frac{1}{100}$ m로 표현하여 이로부터 다시 0.25m라는 소수 표현을 도출해내는 상황이다. 이와 같은 미터 단위의 변환과정은 소수 0.25를 100을 단위로 한 25라고 파악하는 것과 같은, 즉, 소수를 자연수와 동일한 차원으로 이해하는 방식을 전제로 하고 있다.

위와 같은 접근방식을 취하는 경우 소수는 소수점을 갖는 자연수로 생각되어, 소수 개념 이해에 장애로 작용할 수 있다. 뿐만 아니라, 이와 같은 측정 상황에서 소수는 항상 단위를 수반하는 크기의 표현이 되므로, 비나 작용소로서 의미를 가질 수 없다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 소수로 표현될 수 있는 서로 다른 두 측정 상황에서 학생들이 사용하는 행동적 정리와 그 상황에서 기술될 수 있는 소수 개념의 특성은 서로 다르다. 즉, 위의 두 측정 상황으로부터 지도될 수 있는 내용은 같지 않다.

한편, 소수는 대수적으로 체의 구조를 이루므로 가법적 구조와 승법적 구조를 지닌다. 여기서는 Vergnaud가 밝힌 일반적인 가법적 구조와 승법적 구조에 관한 논의를 소수에 적용하여 소수의 가법적 구조와 승법적 구조를 살펴봄으로서 소수의 개념장을 보다 명확히 할 것이다. 먼저 Vergnaud(1982)가 밝힌 덧셈의 6가지 기본적인 관계를 기초로 소수의 덧셈이 발생하는 상황을 분류하고, 이러한 상황의 가법적 구조에 관한 도식적 표현을 통해 소수 덧셈에 관한 등식의 의미를 명확히 할 수 있으며, 이러한 의미를 기반으로 소수의 덧셈을 형식화하고 추상화할 수 있다. 또한, Vergnaud(1983)는 승법적 구조를 규명하면서 곱셈, 나눗셈, 또는 그러한 연산의 결합을 포함하는 상황은 단순 또는 다중 비례 관계에 의해 생성됨을 밝히었다. 이는 소수를 비례문제의 도구로 사용하지 않으면서, 학생들에게 소수의 승법적 구조에 대한 포괄적인 관점을 제공하는 것은 불가능함을 시사한다. 승법적 구조는 부분적으로는 가법적 구조이나, 가법적 측면에서 유도될 수 없는 고유한 조직을 가진다. 다시 말해, 소수의 승법적 구조는 다양한 비례관계의 인식과 여기서 드러나는 비나 작용소로서의 소수 개념을 토대로 하여 점진적으로 형식화되는 것이다.

마지막으로, 무한소수로서 실수로의 확장을 위해 비순환무한소수 곧, 무리수의 존재성을 보이는 대수적 증명과 기하학적 증명, 무한소수의 다양한 표현에 대해 살펴봄으로서 소수의 개념장을 보다 분명히 해 보고자 한다. 먼저 현재 학교수학에서 다루어지는, 귀류법을 사용하여 $\sqrt{2}$ 와 같은 수는 분수로 나타낼 수 없음을 보이는 대수적 방법에 의한 무리수의 존재 증명은 분수 꼴로 나타낼 수 없는 수가 있음은 보여주지만, 무리수 개념 발생의 핵심적 아이디어인 통약불가능성은 드러내지 못한다. 이에 비해, Toeplitz의 ≪The Calculus≫(1963: 4-6)에서와 같이, 정사각형의 변과 대각선의 길이 사이에 공통 측정단위가 존재한다고 가정하면 (곧, $\sqrt{2}$ 가 유리수라면) 모순이 생김을 보이는 기하학적 증명은 두 길이 사이에 존재하는 통약불가능성을 드러낸다. 무리수의 존재성을 보이는 대수적 증명과 기하학적 증명의 핵심적 차이는 통약불가능성의 기술 여부이며, 이 차이는 무리수 및 실수 개념의 이해의 차이로 연결된다. 또한 무한소수를 단위의 세분에 의한 측정수로 표현한다면 무한 근사의 개념이 두드러지고, 수직선에서 위치하는 구간이나 대응하는 무한수열의 극한으로 표현한다면 무한소수를 하나의 대

상인 실무한으로 파악하는 것을 도와준다.

이상의 분석을 종합하여 소수의 개념장을 다음과 같이 규정할 수 있다.

소수의 개념장은 유한소수 및 무한소수의 표현과 그 연산에 의해 생성될 수 있는 제 상황의 집합, 물리적인 또는 이론적인 측정에서 발생하고, 가법적 관계와 승법적 관계 및 순서 등의 관계로 생성될 수 있는 상황의 집합이다. 또한, 등분할, 단위, 측정수, 십진기수법, 분수, 비, 작용소, 선형성, 통약불가능성, 무한 근사, 실무한, 계산수, 유리수, 실수 등의 상호 관련된 개념의 집합이다.

2. 소수 개념의 발달 수준

여기서는 학생들의 학습 과정을 염두에 두면서 소수 개념의 수학적, 역사적, 심리학적 분석 결과를 재조직하고, 소수에 내재된 질서 및 연산이 드러나는 과정에 초점을 맞추어 소수 개념의 발달 수준을 규명하고자 한다.

Freudenthal이 지적한 바와 같이, 개념 발달은 밑바탕을 이루는 초기 수준의 활동을 대상화하고 반성하여 보다 높은 수준의 개념을 의미 있게 경험하게 되는 것이므로, 초기 수준이 매우 중요한 의미를 지닌다. 소수 개념의 발달은 어떠한 활동에서 시작되어야 할 것인가?

유한소수에서 무한소수까지 일관적이고 연계성 있는 개념의 발달을 꾀하려면 유한소수의 도입은 측정 활동에 바탕을 두어야 할 것이다. 역사적으로, 중국에서 발생한 최초의 소수는 도량형의 단위가 십진법인 데에서 기인하였고, Stevin 역시 단위의 세분에 의한 측정에 소수의 기원을 두고 그러한 실제적 측정활동의 체계화에 기초하는 소수의 이론적인 구조를 제안하였다.

또한, 심리학적 고찰 결과 소수의 심리적 기원은 측정 활동이며, 측정 활동에서 시작되는 소수 개념 지도 방법은 내재적이고 본질적인 수 연산이 점차 명확하게 드러난다는 장점이 있다. 그리고, 경험적이고 물리적인 측정에서 이론적이고 관념적인 측정으로 이행함에 따라 개념의 단절 없이 유한소수에서 무한소수로 자연스러운 확장이 가능하므로 유리수에서 실수로의 확장에서 개념적 단절을 피할 수 있을 것이다.

이상을 종합해 볼 때, 소수 개념 발달의 밑바탕을 이루는 제 1수준은 단위의 세분을 통한 측정 활동이 유한소수로 정리되는 수준으로 설정할 수 있다.

소수 개념 발달의 제 2 수준은 물리적이고 경험적인 수준의 측정 활동에 기초한 측정수로서의 유한소수에 내재한 성질과 연산을 인식하는 수준으로 설정될 수 있다. Dewey에 따르면, 측정 활동에 기초한 수 개념 지도 방법은 수에 내재된 질서와 연산을 자연스럽게 단계적으로 드러낼 수 있다. 이를 소수에 적용하면, Dewey가 구분한 제 2단계의 측정, 즉 측정되는 양과 같은 종류의 양으로 정의된 단위를 통한 측정에서 파악되는 측정수로서의 소수 개념에는 비, 작용소, 십진기수법, 분수 등의 개념이 내재해 있으며, 측정 활동을 기초로 이러한 개념들이 드러난다. 이에 비해, Dewey가 측정의 마지막 단계로 구분한, 서로 다른 척도를 가진 양의 비교를 통한 제 3단계의 측정에서는 외적 비 및 작용소로서의 소수 개념이 드러난다. 그리고 측정의 과정에서 필요한 집성과 인수의 관점이 소수의 합과 곱의 관계로 드러나는 것이다.

소수 개념 발달의 제 3 수준은 제 2 수준에서 파악한 유한소수의 성질과 연산 등이 기계적인 습관에 의해 탈맥락화됨에 따라 점차 형

식적 조작의 대상이 되어 소수의 사칙 계산의 알고리즘화가 일어나는 단계로 설정할 수 있다. 이 수준에서는 나눗셈 알고리즘의 산물로서 순환무한소수를 인식하게 된다. 제 2 수준에서는 구체적인 맥락에서 유한소수와 분수 사이의 관련성을 인식했다면, 이 수준에서는 알고리즘의 실행에 따라 분수와 소수 사이의 형식적인 관계 즉 '분수는 유한소수 또는 순환소수로 표현되고, 역으로 유한소수와 순환소수는 모두 분수로 표현 가능함'을 알게 된다. 요약하면, 제 3 수준은 유리수 범위의 소수를 형식적으로 조작하는 단계로, 제 2 수준의 물리적 측정을 기초로 구체적인 맥락에서 파악된 유한소수의 성질과 조작이 점차 알고리즘에 따른 기계적인 수치적 조작으로 변화되는 단계이다.

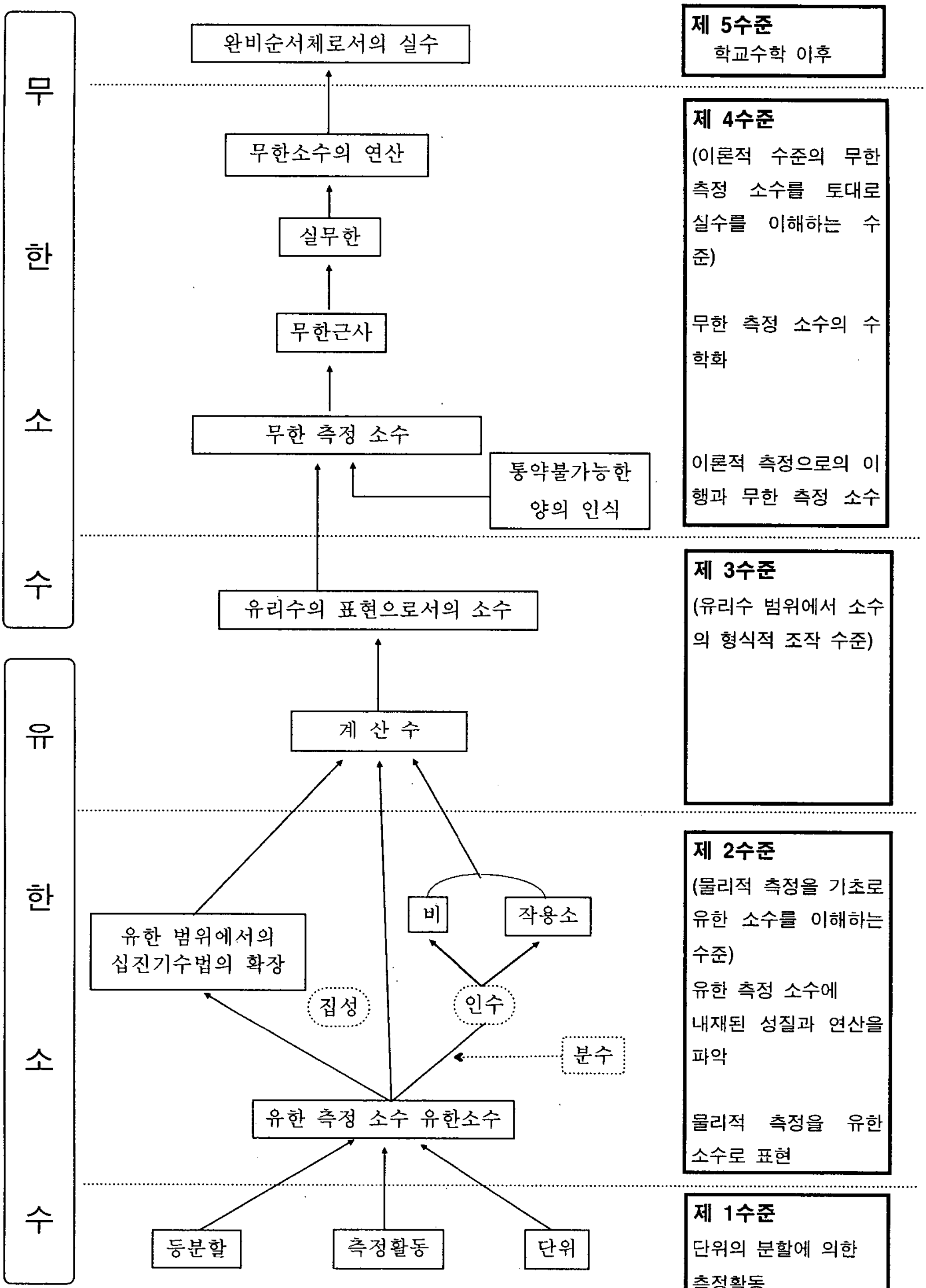
소수 개념 발달의 제 4 수준은 관념적이고 이론적인 수준에서 파악하는 측정수로서의 무한소수를 토대로 실수를 이해하는 단계로 설정할 수 있다. 역사적으로 무리수의 발생은 1585년 Stevin에 의한 소수 정의로 Pythagoras 학파에 의해 발견되었던 통약불가능한 양의 수치화가 가능해짐에 따라 이루어진 것이다. Stevin은 임의의 크기를 측정하는 과정에서 이론적으로 무한소수가 나타날 수 있음을 인정하였으나, 통약불가능성과 측정수로서의 무한소수는 경험적인 측정에서 알 수 있는 것이 아니라고 하면서, 수 영역의 확장을 위해서는 산술적 조작의 결과를 수로 받아들이는 것이 중요하다는 입장을 취하였다. 이는 측정수로서의 무한소수는 경험적이고 물리적인 측정의 맥락에서는 파악할 수 없으므로, 제 3 수준에서 나눗셈의 결과로 순환소수를 인식하고 나눗셈 연산을 단위의 세분에 의한 측정과 연결시킴으로써, 무한의 측정과정을 드러내는 이론적이고 관념적인 측정을 이해할 수 있음을 의미하는 것이다. 그리고 제 3 수준에서 파악된 유리수의 소수 표현을 이론적인 측정의 관점에서 재조망함에 따라, 유한소수와 순환소수는 단위와 통약가능한 양의 측정값의 표현이며 통약불가능한 양의 측정값은 순환하지 않는 무한소수로 정리됨을 알 수 있다. 이로부터 이론적인 수준에서 모든 크기의 측정을 다루는 무한소수를 기초로 실수를 이해할 수 있다.

마지막으로 제 5 수준은, 학교수학의 범위를 넘어서는 것으로서, 실수 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 수학적으로 실수계를 정의하는 여러 가지 공리적 정의 방법과 구성적 정의 방법을 비교, 분석할 수 있는 단계로 설정될 수 있을 것이다. 이는 역사적으로 Stevin의 소수 정의로 인해 일반적인 무리수 개념이 발생하고, 무한에 관한 혼란을 정리하기 위해 19세기 말 형식적인 실수계의 정의가 나타나는 것에 대응한다.

이상에서 논의한 소수 개념의 발달 수준을 정리하면 다음과 같다. 먼저 물리적이고 경험적인 수준에서 단위의 세분에 의한 측정 활동이 유한소수로 정리되며, 이러한 맥락에서 유한소수에 내재된 성질과 본질적인 연산들이 점차 드러나고 알고리즘화의 과정을 거쳐 형식화된다.

그리고 물리적인 측정에서 관념적인 측정으로 인식이 이행함에 따라 유한소수에서 무한소수, 유리수에서 실수로 확장, 발전한다. 이때 관념적인 측정으로 인식의 이행을 위해서는 산술적 조작의 결과로 파악한 무한소수를 측정의 관점에서 재해석하는 것이 매우 중요하다.

이러한 소수 개념의 발달 수준과 이를 바탕으로 한 소수 개념 요소의 위계적 관계 구조를 도식화하면 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 소수 개념의 발달 수준과 위계적 구조

IV. 소수 개념 학습-지도의 실태 분석

이 장에서는 제 Ⅱ장 및 제 Ⅲ장에서 고찰한 소수 개념의 요소, 소수의 개념장, 소수 개념의 발달 수준 등을 기초로 학교수학에서의 소수 개념 학습-지도 실태를 분석하고자 한다. 먼저 학교수학에서 학생들의 소수 개념 학습에 기본적인 방향을 제시해 주는 교과서를 분석하고, 이러한 교과서로 학습한 학생들의 소수 개념에 대한 이해도가 어느 정도인지를 알아볼 것이다.

1. 제 7차 교육과정에 따른 교과서 분석

제 7차 교육과정에 따른 교과서는 3단계에서 처음으로 유한소수를 다루기 시작하여 11단계에서 무한소수인 실수와 극한의 개념을 다룬다. 따라서, 3단계에서 11단계에 걸쳐 다루는 내용을 차례로 분석한다. 이 때, 그 초점은 소수 개념이 어떠한 지도 계열 아래, 어떤 방법으로 도입되고 있는가를 살피는 것이다. 즉, 학생들로 하여금 소수 개념의 본질을 정확히 인식할 수 있도록 그 내용이 조직 전개되고 있는가를 알아보고, 소수 개념의 어떠한 측면을 강조하여 지도하고 있는가를 분석하는 것이다. 교과서의 분석 결과, 현행 교과서의 소수 개념 지도 방식은 크게 다음의 두가지 특징을 가지는 것을 알 수 있다.

첫째, 유리수 범위에서의 소수 개념 지도 단계에서 분수 개념을 지나치게 강조하고 있다는 점이다. 현재 교과서에서는 3-나 및 4-나 단계에서 소수를 십진 분수의 다른 이름으로 정의하여 도입하고(교육인적자원부, 2001a; 2001b), 소수의 대소 비교나 사칙 계산의 원리를 분수에 기초하여 설명하며(교육인적자원부, 2001c; 2002), 자연수 계산 방법과의 유사성에 지나치게 의존하여 내용을 전개한다. 역사적으로 소수는 분수를 십진법화 하려는 노력의 결과로서 도입된 것이므로, '분수'로서의 소수 개념을 다루어야 하나 분수 이외의 다양한 개념 요소들도 분수로서의 소수와 더불어 균형 있게 다루어져야 한다. 그런데, 현행 교과서의 전개 방식은 다양한 소수 개념의 본질을 충분히 이해하기보다는 분수에 기초하여 소수의 사칙계산을 형식적이고 기계적으로 능숙하게 해결하는 데 중점을 두고 있는 것으로 볼 수 있다. 이는 앞에서 분석 제시한 소수 개념 발달의 1, 2 수준을 소홀히 한 채 소수를 형식적 조작의 대상으로 다루는 3 수준에 치중하는 것으로 분석될 수 있다.

둘째, 실수 개념을 도입하는 단계에서 측정수로서의 무한소수 개념과 유리수에서 실수로의 확장의 필요성을 제기하는 통약불가능성의 문제를 적절히 고려하지 않는다는 것이다. 측정수로서의 무한소수 개념이 의미 있게 다루어지지 않는다면 실무한으로서의 실수에 대한 이해를 기대하기는 어려울 것이다. 또한 현재 교과서에서는 분수 개념을 중심으로 유리수를 다룬 후, 제곱근 곧, 방정식 $x^2-2=0$ 의 근의 첨가 방식으로 무리수를 도입한다. 그러한 유리수가 아닌 수 곧, 분수로 나타낼 수 없는 수, 따라서 소수로 나타내면 유한소수이거나 순환무한소수가 되지 않는 수를 무리수로 정의하고 다루고 있다(고성은 외 5인, 2003; 이준열 외 4인, 2003). 이러한 접근 방식은 방정식의 근의 첨가라는 형식적인 접근과 논리적 범주화 과정으로서는 문제가 없지만, 비순환무한소수로의 수 개념의 확장이 왜 필요하며 그것은 개념적으로 무엇인가 라는 근본적인 의문을 적절히 다루지 않고 있다는 점에서 실수 개념에의 의미 있는 접근을 기대하기는 어려울 것으로 판

단된다.

2. 학생들의 소수 개념 이해 상태 분석

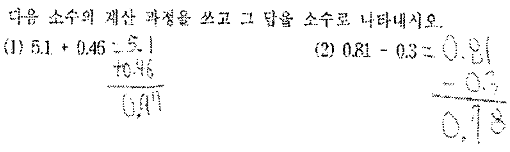
소수 개념 이해 상태에 관한 조사는 중학교 1학년과 고등학교 3학년생을 대상으로 2004년 4월에 지필검사를 실시하였다. 중학교 1학년과 고등학교 3학년 대상의 지필검사의 문항은 [부록1, 2] 에 수록하였고, 각 문항에서 조사하려고 하는 소수 개념의 요소는 [부록 3]에 수록하였다. [부록 3]에서 보여지듯이, 같은 개념 요소가 여러 문항에서 다루어지며 한 문항에 내포된 개념 요소 또한 여러 가지이다. 이에 개념 요소의 범주를 4개로 구분한 후, 각 범주에 속하는 문항의 정답률과 반응 유형을 비교 분석하였다. 4개의 범주는 각각 측정수, 비 또는 작용소, 무한 근사 및 실무한, 계산수로서의 소수 개념 이해도에 관한 것으로, 각 범주에 속하는 문항의 정답률은 [부록4]에 차례대로 수록하였다. 그리고 나서, 지필 검사 결과 드러나는 정답률과 학생들의 응답 유형만으로는 학생들이 어떤 생각을 통하여 그러한 답에 이르렀는지 파악하기 어려운 부분을 보다 분명하게 파악하기 위해 면담 조사를 실시하였다. 조사 결과, 다음과 같은 특징을 확인할 수 있었다.

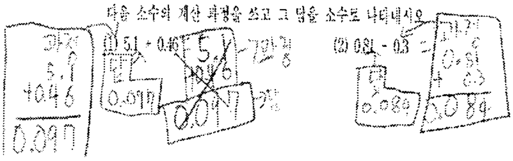
첫째, 학생들은 '분수'의 다른 표현으로서 소수를 이해하는 정도는 상당히 높으나, 상대적으로 소수를 측정수로 이해하는데 어려움을 겪고 있음을 알 수 있다. 특히, 무한소수를 단위의 무한 세분에 의한 측정수로서 이해하지 못함을 확인할 수 있다. 비순환 무한소수에 의한 무리수 정의를 통약불가능한 양의 측정과 관련지어 이해하지 못한 채 무한소수인 실수와 수직선 사이의 관계를 측정수와는 동떨어져서 이해하거나, 기억해야 할 수학적 사실 정도로 파악하고 있음을 확인할 수 있었다.

둘째, 대부분의 학생들은 비례관계의 인식을 바탕으로 한 비나 작용소로서의 소수 개념과 그 안에 내재한 선형성을 거의 이해하지 못한 채 소수 곱셈과 나눗셈을 수행함을 알 수 있었다. 이는 소수의 곱셈, 나눗셈과 관련된 절차적 지식이 적절한 개념적 지식과 관련되지 못한 채 학습되었다고 볼 수 있다.

셋째, 모든 무한소수에 내재된 무한 근사 현상을 적절하게 이해하고 표현하는 학생들은 매우 드물었으며, 이는 무한근사의 최종 결과를 인식함으로써 무한소수를 하나의 대상, 즉 실무한으로 이해하는 학생이 전혀 없었던 결과와도 직결된다.

넷째, 학생들은 소수를 알고리즘적인 측면에서 규칙에 따라 조작되는 대상으로 잘 처리하였으나, 학생들이 보인 오류의 대부분은 다음과 같은 소수점의 위치를 잘못 정하는 것임을 보임으로써 계산 기저에 있는 아이디어 또는 개념을 충분히 이해하지는 못함을 알 수 있었다.





Ⅴ. 소수 개념 지도의 개선 방향 탐색

Ⅳ장에서 논의한 바와 같이 본 연구에서 수

행한 조사 결과, 우리나라 학생들의 소수 개념 학습이 매우 만족스럽지 못하다는 것을 확인할 수 있었다. 학생들은 소수를 분수나 제곱근 등의 다른 표현 정도로 인식한 채 소수를 단지 형식적 조작의 대상으로 다루는 경향을 보였다.

이러한 결과는 학생들에게 소수 개념이 의미 있게 이해되지 않았다는 근거가 된다. 이는 소수 개념이 그 자체로 충분하게 탐구 대상으로 다루어지지 않으면서, 분수나 제곱근 등의 개념에 지나치게 의존하여 전개되는 현행 교과서의 내용 전개 방식과 무관하지 않은 것으로 판단된다. 이에 이 장에서는 지금까지의 논의를 바탕으로 소수 개념 지도의 다섯 가지 개선 방향을 탐색하고 이에 대한 구체적인 방안을 제시하고자 한다. 지도 방향을 다섯 가지로 정돈한 것은 본고에서 추출한 소수 개념의 요소가 분리될 수 있는 것이라기보다는 단위의 세분에 의한 측정활동에 복합적으로 내재되어 있는 것이므로 소수 개념을 지도하는 상황 역시 개념 요소를 분리하여 반영하기보다는 여러 개념 요소가 밀착되면서 상호 연결되어 발전될 수 있도록 구성하는 것이 필요했기 때문이다.

첫째, 소수 개념의 도입시 소수 중심의 접근이 되어야 한다. 이는 분수의 다른 이름이 아닌, 측정수로서의 소수의 본질과 그 의미를 보다 분명하고 적극적으로 다루는 것으로 구체화될 수 있다. 이를 위해 단위의 세분에 의한 실제적인 측정과정에 대응하는 측정수로서 소수의 본질을 드러내는 상황에서 소수를 도입하는 방식을 취할 수 있다.

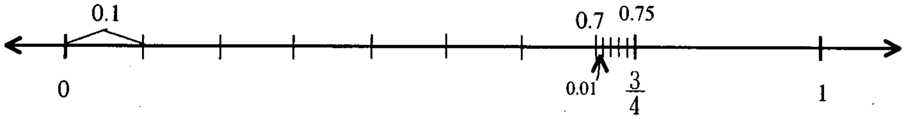
이러한 방식은 십진기수법, 분수, 비, 작용소 등의 소수 개념이 드러나도록 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 정확성의 제한이 없는 관념적이고 이론적인 수준의 측정으로 전이할 때 무한소수를 측정수로 파악하게 함으로써 일관되고 연계성있는 소수의 이해를 가능하게 한다.

둘째, 소수 계산을 의미있게 수학화하는 알고리즘화를 위해서는 소수 계산의 의미를 풍부히 경험하게 하는 것이 필요하다. 특별히 학생들의 이해도가 현저히 떨어지는 소수의 곱셈, 나눗셈에서 그 기초가 되는 배 작용소로서의 소수 개념의 파악을 위한 지도 방안을 구체화하면, 소수배의 구체적인 의미를 파악할 수 있고, 소수 곱셈의 장애로 작용하는 자연수 범위에서의 동수누가에 의한 곱셈을 극복하는 기회를 제공할 수 있다. 또한 소수배하는 것을 선형성을 갖는 함수로 파악할 수 있게 함에 따라 함수적 관점에서 '0.2=0.20=0.200=…'와 같은 동치관계를 이해하게 할 수 있다.

셋째, 무한소수에 의한 실수 지도를 모든 수의 십진법화 과정으로 지도하는 것이 필요하다. 현재 교과서에서는 모든 수의 소수화가 십진법에 따른 표준기호화의 의미임을 명시적으로 설명하지는 않고 있다. 실수지도를 위해 수직선을 토대로 이를 완벽하게 분석해내는 과정은 단위의 세분에 의한 측정의 관점에서 접근하되, 이 과정에서 자연수, 분수, 정수, 유한소수, 무한소수의 십진법화로 지도한다면, 실수의 소수 표현은 표준기호화라는 소수의 본질을 경험하고 실수의 가장 실제적인 기호체계로 소수를 인정하게 되는 기회를 제공할 것이다.

이를 위해 분수의 소수 표현을 현재의 교과서에서와 같이 분모를 10의 거듭제곱의 형태로 만드는 방법이나 나눗셈과 같은 형식적 조작의 결과로 다루는 것 이외에 다음과 같이 수직선 위에서 측정의 관점에서 접근하는 것으로 보강하는 것이 필요하다.

< $\frac{3}{4}$ 의 소수화>



<table>
<tr><th>일상적인 표현</th><th colspan="2">수치적 계산</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. 주어진 길이에 포함되는 $\frac{1}{10}$ -단위의 회수 즉 소수 첫째 자리 수를 찾는다.</td><td>$\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{30}{40}-\frac{4}{40}=\frac{26}{40}$
$\frac{26}{40}-\frac{4}{40}=\frac{22}{40}$
$\frac{22}{40}-\frac{4}{40}=\frac{18}{40}$
…
$\frac{6}{40}-\frac{4}{40}=\frac{2}{40}$</td><td>$\frac{1}{10}\times\square\leq\frac{3}{4}<\frac{1}{10}\times(\square+1)$
$\frac{4}{40}\times\square\leq\frac{30}{40}<\frac{4}{40}\times(\square+1)$
$\therefore\ \square=7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">따라서, 주어진 길이에 $\frac{1}{10}$ -단위는 7번 포함된다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. $\frac{1}{10}$ -단위로 측정하고 난 나머지 길이($\frac{2}{40}$)에 포함되는 $\frac{1}{100}$ -단위의 회수 즉 소수 둘째 자리수를 찾는다.</td><td>$\frac{2}{40}-\frac{1}{100}=\frac{20}{400}-\frac{4}{400}=\frac{16}{400}$
$\frac{16}{400}-\frac{4}{400}=\frac{12}{400}$
…
$\frac{4}{400}-\frac{4}{400}=0$</td><td>$\frac{1}{100}\times\square\leq\frac{2}{40}<\frac{1}{100}\times(\square+1)$
$\frac{4}{400}\times\square\leq\frac{20}{400}<\frac{4}{400}\times(\square+1)$
$\therefore\ \square=5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">따라서, 1의 과정에서 생긴 나머지 길이에 $\frac{1}{100}$ -단위는 5번 포함되고, 더 이상 나머지가 생기지 않는다.</td></tr>
</table>

무한소수로 표현되는 $\frac{1}{6}$ 의 소수화 역시 같은 방법으로 접근할 수 있다. 이와 같이 측정의 관점에서 수직선 위의 분수에 대응하는 점을 소수로 수치화하는 것을 계속해서 경험한다면 학생들은 분수의 소수 표현을 십진법화의 과정으로 이해하고, 이러한 과정이 나눗셈 알고리즘으로 압축된다는 것을 파악하게 될 것이다. 또한, $\frac{1}{6}$ 에서와 같이 소수화의 과정이 끝이 나지 않는 경우를 통해 단위의 무한 세분에 의한 이론적인 측정수로서의 소수 개념의 인식을 가능하게 할 것이다. 또한, 이러한 방식의 분수의 소수화는 일관된 방식으로 수직선위의 모든 점의 소수화를 파악하게 하므로 모든 수의 십진법화의 과정으로 실수 지도를 가능하게 할 것이다.

넷째, 무리수 발생의 핵심적 아이디어인 통약불가능성의 문제를 보다 구체적으로 드러내는 것이 필요하다. 이는 무리수의 존재성에 관한 대수적 증명 이외에 기하학적 증명(Toeplitz, 1963: 4-6)을 통해 임의의 두 선분 사이에는 공통의 측정단위가 존재하지 않을 수 있음을 인

식하는 것이 필요하다. 이로부터 측정수로서 유리수의 부족을 인식하게 되고, 통약불가능한 양의 측정이 순환하지 않는 무한소수로 정리됨을 인식하여 순환하지 않는 무한소수로 정의되는 무리수 개념의 본질을 이해할 수 있다.

다섯째, 무한소수를 실무한인 하나의 대상으로 인식하게 하는 것이 필요하다. 무한소수는 무한 근사 과정에 대응할 뿐만 아니라 무한 근사 과정의 최종 결과로서 그것을 하나의 대상으로 파악하는 실무한의 개념이기도 하다. 그러나, 무한소수를 하나의 대상으로 받아들이는 것은 무한소수가 갖는 무한성과 인간의 인식의 유한성에서 비롯되는 극복하기 매우 어려운 인식론적 장애임을 확인할 수 있다. 이에 이러한 불가피한 장애를 극복하도록 도와주는 두 가지 방안으로 구체화할 수 있을 것이다. 하나는 '0.999⋯=1' 임을 논리적으로 증명하는 것이다.

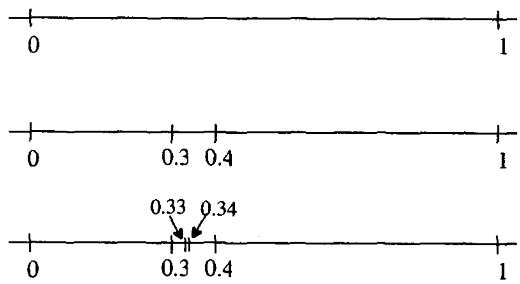
만약 0.999⋯가 1보다 작다고 하면, 둘 사이에 차 $h>0$가 존재할 것이다. 이 때, $0<\frac{1}{10^n}<h$를 만족시키는 충분히 큰 n이 존재한다. 그러므로,

$$1-0.999\cdots = h > \frac{1}{10^n}$$

$$1-\frac{1}{10^n} > 0.999\cdots$$

그런데, 좌변의 $1-\frac{1}{10^n}=0.999\cdots9$은 소수 n자리의 유한소수이므로, 이는 모순이다. 그러므로, 0.999⋯와 1은 같다고 볼 수밖에 없다.

이러한 논리적 증명은 자생적인 직관에 의한 소박한 해석만으로는 이해할 수 없는 실무한의 개념을 반성을 통하여 깨닫고 재구성하고, 이를 통해 논리적 근거와 보다 높은 내적인 일관성을 갖는 '이차적 직관'을 구성하는 효과를 가질 것이다. 또 다른 하나는, 수직선에서 무한소수에 대응하는 위치를 축소구간열로부터 파악하게 하는 것이다. 예를 들어, 순환소수 0.333⋯가 위치하는 축소구간열을 다음과 같이 수직선에 나타내보게 한다.



이와 같이 순환소수의 수직선에서의 위치는 이러한 축소구간열에 대응시켜 생각할 수 있고, 이러한 구간열의 모든 구간에 공통인 점은 정확하게 하나[2)]라는 유클리드 직선의 공준으로부터 수직선에서 무한소수에 대응하는 점의 존재를 인정하는 것은 무한소수를 하나의 대상으로 인식하는데 도움이 될 것이다.

이상은 소수 개념을 보다 의미 있게 파악하도록 하기 위한 지도 방향을 탐색하고 이에 근거한 소수 개념 지도의 구체화 방안을 제시한 것이나, 이에 대한 보다 상세하고 구체적인 교재화와 실제적인 지도를 통한 발전적인 개선이 요구된다.

VI. 요약 및 결론

이 논문의 연구 문제는 크게 두 가지이다. 하나는 소수 개념의 본질은 무엇인가라는 점

2) 만약에 모든 구간에 속하는 점이 한 개 이상이라고 가정하면, 서로 다른 두 점 사이의 거리보다 더 작은 길이의 구간이 존재하므로 모순이 된다.

이고, 다른 하나는 이는 어떻게 지도되고 있으며 어떻게 지도되어야 하는가 라는 점이다. 전자에 대해서는 소수 개념의 수학적, 역사적, 심리학적 고찰과 분석을 시도하여 소수 개념의 본질을 드러내고 그 본질을 개념 요소로 추출한 후에 이를 보다 명확히 하기 위해 소수의 개념장과 발달수준을 규명하는 것으로 접근하였다. 그리고 후자에 대해서는 현행 초중고 교과서의 분석과 학생들의 소수 개념에 대한 이해도 조사를 실시하여 소수 개념 학습 지도의 실태에 대한 평가와 반성을 통해 소수 개념 지도의 개선 방향을 탐색하고 그 구체적인 방안을 제시하는 것으로 접근하였다. 위와 같은 일련의 과정은 학교수학에서 다루어지는 '닫힌' 형식적 지식으로서의 소수를 교육적으로 의미 있는 '열린' 지식으로 만들기 위한 것이었다. 본 논문은 소수 개념의 학습-지도에 관한 기초 연구에 해당한다. 소수 개념의 본질에 관한 적절한 분석이 선행되지 않은 채 의미 있는 소수 교육이 이루어지기 어렵다는 문제의식에서 출발하여, 소수 개념의 본질에 관한 분석을 시도하였고 이를 바탕으로 현재 우리나라 학교수학에서의 소수 개념의 학습-지도에 관한 실태를 조사 분석하고 그 개선을 위한 방향과 구체적인 대안 탐색을 시도하였다.

본 연구의 이러한 결과가 학교에서 수학을 가르치는 교사 및 교육과정 입안자들의 소수 개념에 관한 교수학적 안목을 높이는 데, 그리고 수학 교사교육과 수학교육 연구에 기여할 수 있기를 기대한다. 그리고 본 연구의 결과가 교육과정을 비롯한 소수 지도 전반의 개선에 보다 실제적인 기여를 하기 위해서는 현실적인 지도 방안에 관한 보다 구체적인 연구와 이들을 실천적으로 계속 보완하는 개발적 연구가 후속 연구로 뒤따라야 할 것이다.

참고문헌

고성은 외 5인 (2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 블랙박스

교육인적자원부.(2001a). **초등학교 수학 3-나**. 대한교과서주식회사.

교육인적자원부.(2001b). **초등학교 수학 4-나**. 대한교과서주식회사.

교육인적자원부.(2001c). **초등학교 교사용지도서 수학 4-나**. 대한교과서주식회사.

교육인적자원부.(2002). **초등학교 수학 6-나**. 대한교과서 주식회사.

우정호(2004). '人間敎育' 을 위한 主要 敎科로서의 學校數學. **대한수학교육학회 수학교육학논총, 26**, 1-20

이준열 외 4인 (2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 도서출판 디딤돌.

조한혁·최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. **학교수학, 1**(2), 605-615.

Basso, M. , Bonotto, C. & Sorzio, P. (1996). Understanding decimal numbers: From measurement towards the number line. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 20) (20th, Valencia, Spain, July 8-12, 1996), 1, 155

Basso, M. , Bonotto, C. & Sorzio, P. (1998). Children's understanding of the decimal numbers through the use of the ruler. *Proceedings of the conference of the international group for the psychology of mathematics education* (22nd, Stellen-bosch, South Africa, July 12-17, 1998), 2, 72-79

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). *A history of mathematics*, 『수학의 역사』,

양영오 · 조윤동 (공역), 서울: 경문사.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T. P. , Corbit , M. K. , Kepner, H. S. , Lindquist , M. M. & Reys, R. E. (1981). Decimals: results and implications from the second NAEP mathematics assessment. *Arithmetic Teacher*, 28(8), 34-37

d'Entremont, Y. M. (1991). *The reconstruction of decimal knowledge in young adults*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

________________(1978). *Weeding and sowing : preface to a science of mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

________________(1983). *Didactical phenomenology of matematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gonzalez Mari, J. L. (1999). Didactical analysis : a non empirical qualitative method for research in mathematics education. In I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics education : Proceedings of the first Conference of the European Society for Research in Mathematics*. (pp. 245-256). Osnabruck : Germany.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1985). A model of students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction*, 2(3-4), 175-205.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putman, & R. A. Hattrp (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. (pp. 283-322). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hitchcock, G. (1996). Dramatizing the birth and adventures of mathematical concepts: two dialogues. In R. Calinger (Ed.), *VITA MATHEMATICA : Historical research and integration with teaching*. Washington : The Mathematical Association of America.

Klein, F. (1924). *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. New York: Dover Publications.

Mclellan, J. A. & Dewey, J. (1901). *The psychology of number and its applications to methods oh teaching arithmetic*. New York: D. Appleton and company.

Moreno-Armella, L. E. & Waldeg, G. C. (2000). An Epistemological history of number and variation. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective*. Washington : Mathematical Association of America.

Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory : the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 33-40

Resnick, L. B. , Nesher, P. , Leonard, F. , Magone, M. , Omanson, S. & Peled, I. (19 89). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Educa-*

tional Studies in Mathematics, 20, 8-27.

Sackur-Grisvard, C. & Leonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept : the order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, 2(2), 157-174.

Sarton, G. (1935). *The first explanation of decimal fractions and measures.* Isis, 23.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 10, 3.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: The Falmer Press.

Thompson, C. S. & Walker, V. (1996, April). Connecting decimals and other mathematical content. *Teaching Children Mathematics,* 496-502.

Toeplitz, O. (1963). *The calculus: A genetic approach.* Chicago: The University of Chicago Press.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight.* Orlando : Academic Press.

Vergnaud, G. (1982). A classification of dognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In Hiebert, J. & Behr, M. (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston : Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field : what and why? In G. Harel & H. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany : SUNY.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. P. Steffe, & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning.* New Jersey : Lawrence Erlbaum.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction : testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(5), 371-384.

A Didactical Analysis of the Decimal Fraction Concept

Woo, Jeong Ho (Seoul National University)
Byun, Hee Hyun (Seoul National University, Graduate school)

The decimal fraction concept plays an important role in understanding the real number which is one of the major concepts in school mathematics. In the school mathematics of Korea, the decimal fraction is treated merely as a sort of name of the common fraction, while many other important aspects of the decimal fraction concept are ignored. In consequence students fail to understand the decimal fraction concept properly, and merely consider it as a kind of number for formal computation. Preceding studies also identified students' narrow understanding of the decimal fraction concept. But none of them succeeded in clarifying the essences of the decimal fraction concept, which are crucial for discussing the didactical problems of it.

In this study we attempted a didactical analysis of the decimal fraction concept and disclosed the roots of didactical problems and presented measures for its improvement.

First, we attempted a phenomenological analysis of the decimal fraction concept and extracted 9 elements of the decimal fraction concept. Second, we has analyzed of the essence of the decimal fraction concept more clearly by relating it to the situations where it functions and its representations. For this we tried to construct the conceptual field of the decimal fraction. Third, we categorized the developmental levels of the decimal fraction concept from the aspect of external manifestation of the internal order. On the basis of these results, we attempted hierarchical structuring of the elements of the decimal fraction concept.

And using the results of such a didactical analysis on the decimal number concept we analyzed the mathematics curriculum and textbooks of our country, investigated levels of students' understanding of the decimal fraction concept, and disclosed related problems. Finally we suggested directions and measures for the improvement of teaching decimal fraction concept.

* **Key words** : decimal fraction(소수), didactical analysis(교수학적 분석), elements of decimal fraction concept(소수의 개념 요소), conceptual field(개념장), levels of development(발달 수준)

논문접수 : 2005. 5. 23
심사완료 : 2008. 8. 1

[부록 1]

<중학교 1학년 대상 조사 문항 : 검사 I >

* 본 문제지는 수학에 대한 여러분의 이해 및 생각을 확인하기 위한 것입니다. 각 문제에 대해 가능한 성심껏 자세히 답변해 주시면 감사하겠습니다.

* 문제를 해결하기 위해 계산이 필요한 경우 계산 과정 역시 문제지에 써 주시기 부탁드립니다.

* 풀이가 틀렸다고 생각되는 경우에도 풀이를 지우지 말고 ×표를 한 후 여백에 다시 풀이해 주시기 바랍니다. 감사합니다.

학교 : 학년 : 반 :

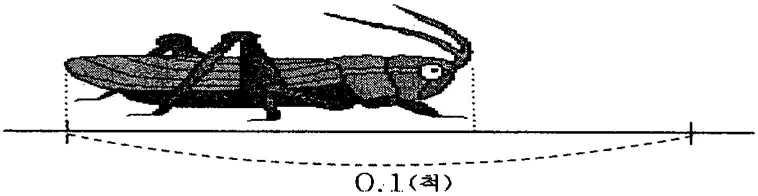
번호: 이름:

1. 다음 중 분수는 소수로, 소수는 분수로 나타내시오.

(1) $\frac{25}{100}$ (2) $\frac{1}{8}$

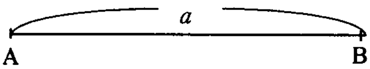
(3) 1.9 (4) 0.320

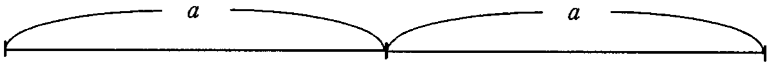
2. 아래의 그림에서 메뚜기의 길이는 다음 중 어느 것과 가장 가깝습니까?
(여기서 '척'은 길이의 단위입니다.)



① 0.700 (척) ② 0.05 (척) ③ 0.065 (척) ④ 0.63 (척)

3. 선분 $\overline{AB}$ 의 길이의 2배는 아래의 그림과 같이 나타낼 수 있다.





이는 선분 $\overline{AB}$ 와 같은 길이의 선분 2개를 붙여서 얻은 선분이다. 선분 $\overline{AB}$ 를 정확히 1.53 배한 선분을 얻는 과정을 위의 그림과 같이 나타내고, 그 방법을 설명하시오.

4. 다음 소수의 계산 과정을 쓰고 그 답을 소수로 나타내시오.

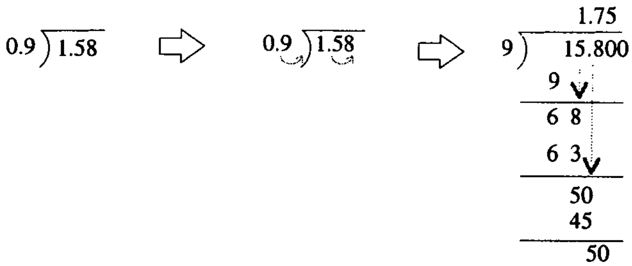
(1) 5.1 + 0.46 (2) 0.81 - 0.3

5. 자연수의 곱셈 '3×4=12'는 바둑알을 3개씩 4번 세면 12개가 된다고 설명할 수 있습니다.

(1) 0.4×0.3 는 얼마입니까?

(2) 이 때 이 곱셈의 의미를 어떻게 설명할 수 있을까요?

6. 높이 1.58m인 나무는 높이가 0.9m인 나무의 몇 배인가를 알기 위해 나눗셈 1.58÷0.9 를 하고자 한다. 그런데, 나눗셈 1.58÷0.9를 하는 과정을 보면 아래와 같이 나누는 수 0.9를 자연수로 만들어 15.8÷9를 계산한다.



이와 같이 나누는 수를 자연수가 되도록 소수점의 위치를 바꾼 후에 계산할 수 있는 이유를 설명하시오.

[부록 2]

<고등학교 3학년 대상 조사 문항 : 검사 II>

* 본 문제지는 수학에 대한 여러분의 이해 및 생각을 확인하기 위한 것입니다. 각 문제에 대해 가능한 성심껏 자세히 답변해 주시면 감사하겠습니다. * 문제를 해결하기 위해 계산이 필요한 경우 계산 과정 역시 문제지에 써 주시기 부탁드립니다. * 풀이가 틀렸다고 생각되는 경우에도 풀이를 지우지 말고 ×표를 한 후 여백에 다시 풀이해 주시기 바랍니다. 감사합니다.

학교 : 학년 : 반 :

번호 : 이름 :

1. $\sqrt{2}$ 는 다음의 과정을 통해 소수로 나타낼 수 있다.

1. $1^2 = 1$ 이고 $2^2 = 4$ 이므로,

   $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} = 1.\cdots$

2. $1.4^2 = 1.96$ 이고 $1.5^2 = 2.25$ 이므로,

   $1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = 1.4\cdots$

3. $1.41^2 = 1.9881$ 이고 $1.42^2 = 2.0164$ 이므로,

   $1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = 1.41\cdots$

4. $1.414^2 = 1.999396$ 이고 $1.415^2 = 2.002225$ 이므로,

   $1.414 < \sqrt{2} < 1.415 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = 1.414\cdots$

(1) 이 과정에서 생기는 다음 수열의 수렴, 발산을 판정하고 그 이유를 쓰시오.

1 , 1.4 , 1.41 , 1.414 , … (수렴 / 발산)

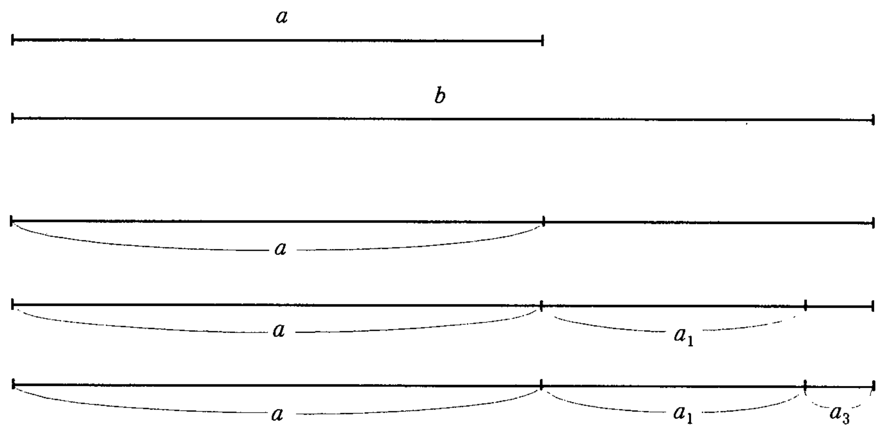
(2) 무한소수 $1.414\cdots$ 는 $\sqrt{2}$ 와 같은 수입니까? 아니면 단지 $\sqrt{2}$ 에 가까이 가는 수입니까? (답하고 그 이유를 밝히시오.)

2. 아래 그림과 같이 길이가 다른 두 개의 선분 a, b가 있다. 여기서 성은이는 선분 a를 기준으로 선분 b를 측정하기 위해 다음의 방법을 사용하였다.

선분 b에는 a가 1번 포함되고 a보다 짧은 나머지가 생겼다.

이때 생긴 나머지에는 a를 이등분한 선분 a_1이 1번 포함되고 a_1보다 짧은 나머지가 또 생겼으며,

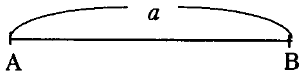
이 나머지는 a_1을 이등분한 a_2보다도 짧으므로, 다시 a_2를 이등분하여 얻은 a_3 과 비교해보니 나머지와 a_3의 크기가 정확하게 같았다.

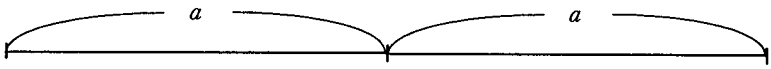


즉, 성은이는 선분 a를 기준으로 선분 b를 측정할 때, a로 측정하고 남은 선분을 선분 a를 이등분하여 얻은 a_1 및 a_1을 다시 이등분하여 얻은 a_2 등을 사용하여 나머지를 줄여나갔다. 그리고, 이 경우에는 점차 줄어드는 나머지가 a를 세 차례 이등분해서 얻은 a_3와 정확하게 같아서 측정이 끝이 났다.

당신이 성은이와 같은 방법으로 임의의 두 선분 c, d에 대하여 선분 c를 기준으로 하여 선분 d의 길이를 측정한다고 하자. 즉, 선분 d를 c로 측정하고 남은 선분은 c를 이등분하여 얻는 선분 및 이를 다시 이등분하여 얻은 선분 등을 차례로 사용하여 나머지를 줄여나간다고 할 때, 위의 경우처럼 선분 c를 여러번 이등분하여 얻은 선분 중에 나머지와 정확하게 같은 것이 언제나 존재하겠습니까? ('예 / 아니오'로 답하고 그 이유를 쓰시오.)

3. 선분 $\overline{AB}$를 2배한 길이의 선분은 아래의 그림과 같이 나타낼 수 있는데, 이는 선분 $\overline{AB}$와 같은 길이의 선분 2개를 붙여서 얻을 수 있음을 뜻한다.





선분 $\overline{AB}$를 순환하지 않는 무한소수 1.1234567891011121314…배한 길이의 선분이 존재합니까? ('예 / 아니오'로 답하고 그 이유를 쓰시오. 특별히 예로 답한 경우 그러한 선분은 어떤 선분인지 구체적으로 밝히시오.)

4. 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음 설명의 참과 거짓을 밝히시오. (참 / 거짓)

무한 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다는 것은 n이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값이 일정한 값에 한없이 가까워지면, 무한 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다고 한다.

(2) 다음 무한수열의 수렴과 발산을 판정하고, 그 이유를 쓰시오.
(단, 수렴하는 경우는 극한값을 밝히시오.)

① 0.3 , 0.33 , 0.333 , 0.3333 , 0.33333 , 0.333333 , 0.3333333 , … (수렴 / 발산)
이유:

② 1.2 , 1.24 , 1.247 , 1.2471 , 1.24715 , 1.247158 , 1.2471589 , … (수렴 / 발산)
이유:

5. 다음 무한급수의 수렴, 발산을 판정하고 그 이유를 간단히 쓰시오.

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$ (수렴 / 발산)
이유:

(2) 0.1 + 0.03 + 0.007 + 0.0002 + 0.00005 + 0.000004 + … (수렴 / 발산)
이유:

6. 다음 물음에 답하시오.

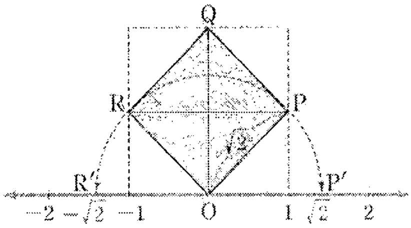
(1) 다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.

무리수는 순환하지 않는 무한소수이다. (참 / 거짓)

(2) 서진이는 다음과 같은 의문을 가지고 있습니다.

수직선 위에는 정수가 아닌 분수들 즉, 유리수에 대응하는 점을 찾을 수 있다. 그리고 유리수는 소수로 나타내면 유한소수 또는 순환소수가 된다.

또, 수직선에는 아래 그림과 같이 유리수가 아닌 수 $\sqrt{2}$ 와 $-\sqrt{2}$ 에 대응하는 점이 있고, 이를 소수로 표현하면 순환하지 않는 무한소수가 된다.



그리고, 교과서에서 '수직선은 유리수와 무리수에 대응하는 점으로 채워져 있고 그 이외의 수에 대응하는 점은 없다'고 한다.

그런데, 수직선 위의 점 중에는 유리수나 순환하지 않는 무한소수에 대응하지 않는 점이 존재할 수도 있지 않을까? 그러한 점이 존재하지 않는다는 사실을 어떻게 알 수 있을까?

① 여러분도 이러한 의문을 가진 적이 있습니까? (예 / 아니오)

② '수직선 위의 모든 점은 유리수나 순환하지 않는 무한소수에 대응한다' 라는 사실은 어떻게 알 수 있습니까?

[부록 3]

<검사 Ⅰ, Ⅱ의 문항에 내포된 소수 개념의 요소>

<검사Ⅰ에 내포된 소수 개념의 요소>

문항	소수 개념의 요소
1	'분수'의 개념을 이해하는가?
2	'측정수' 또는 '분수'의 개념을 이해하는가?
3	'작용소'인 소수배의 의미를 이해하는가? 소수 표기의 형식인 '십진기수법'을 적절히 이해하는가?
4	'계산수'로서 소수의 덧·뺄셈을 어느 정도 수행하는가?
5	'계산수'로서 소수의 곱셈을 어느 정도 수행하는가? '비'나 '작용소'의 개념으로 소수 곱셈의 구체적 의미를 구성하는가?
6	'비'나 '작용소'에 내재한 선형성을 기초로 소수의 나눗셈 방법을 정당화하는가?

<검사 Ⅱ에 내포된 소수 개념의 요소>

문항	소수 개념의 요소
1	무리수 $\sqrt{2}$ 의 소수화 과정에서 (1)'무한 근사' 현상을 이해하는가? (2)무한소수로 정의되는 실수를 '실무한'으로 이해하는가?
2	무한소수를 '측정수'로 이해하는가? 두 크기 사이의 관계를 분수로 나타낼 수 없는 상황, 곧 '통약불가능성'을 인식하는가?
3	분수적 관점으로 접근할 수 없는 무한소수배를 '십진기수법'의 관점에서 이해하는가? 무한소수를 '실무한'으로 이해하는가?
4	임의의 무한소수에서 '무한 근사' 현상을 이해하는가? (1) 무한 근사 현상을 바탕으로 한 교과서의 무한수열의 수렴성 정의를 알고 있는가? (2) 순환 및 비순환 무한소수에 대응하는 수열에서 수렴성을 이해하는가?
5	무한소수에서 '무한 근사' 현상을 이해하고, 이를 기초로 수렴성을 판단하는가?
6	무한소수에 의한 무리수 정의를 '통약불가능한 양'의 측정으로 이해하는가? 수직선위의 모든 점을 소수의 관점에서 이해하고 표현하는가?

[부록 4]

<범주화한 검사 문항의 정답률>

<범주 1의 정답률>

문항 번호	I -1				I -2	II -2	II -6	
	(1)	(2)	(3)	(4)			(1)	(2)
정답률 (%)	89.9	78.3	86.5	84.5	49.3	35.9	61.4	0.5

<범주 2의 정답율>

문항 번호	I -3	I -5 -(2)	I -6
정답률 (%)	8.2	1.4	1.5

<범주 3의 정답율>

문항 번호	II -1		II -3	II -4			II -5	
					(2)			
	(1)	(2)		(1)	①	②	(1)	(2)
정답률(%)	65.8	19.0	10.3	71.7	72.8	28.8	17.4	34.2

<범주 4의 정답율>

문항 번호	I -4		I -5
	(1)	(2)	(1)
정답률(%)	82.1	80.7	76.8