

초등학교 수학에서 평행과 평행선 지도에 관한 고찰

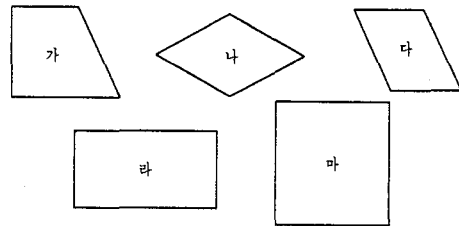
이 종 영*

초등학교 수학에서 지도하는 기하 내용 중 중요한 것 중의 하나가 도형을 시각적인 외양만을 가지고 바라보는 것이 아니라 도형의 구성요소와 성질을 가지고 파악하도록 지도하는 것이다. 따라서 본 연구에서는 초등학교에서 평행과 평행선에 관한 고찰하여 보았다. 학생들이 평행선에 관하여 잘못된 개념 이미지를 갖게 된 이유 중의 하나가 교과서에 제시된 예들로 보이며, 두 직선이나 선분이 평행한지 여부를 판단하는 방법에 대한 지도가 미흡하며, 이를 개선하기 위해서는 두 선분이나 직선이 평행한지를 판단하는 방법이 필요하며, 특히 초등학교 수학에서는 모눈종이 위에 그려진 두 직선의 평행여부를 판단하는 방법을 지도하는 것이 필수적으로 필요함을 살펴보았다. 이를 바탕으로 두 직선이나 선분이 평행한지 여부를 판단하는 방법을 지도하는 구체적인 방안을 제시하였다.

1. 서 론

우리나라 7차교육과정을 따른 4-나 단계 수학 익힘책을 보면 다음 [그림 1-1]과 같은 그림이 나온다. 이 익힘책에는 ‘도형을 보고 물음에 맞는 것을 모두 찾아보시오’라는 지시문과 함께, ‘직사각형은 어느 것입니까?’, ‘마름모는 어느 것입니까?’, ‘평행사변형은 어느 것입니까?’, ‘사다리꼴은 어느 것입니까?’라는 질문이 제시되어 있다. 직사각형이란 네 각이 모두 직각인 사각형을 말한다. 그림 [그림 1-1]에 주어진 라 도형은 직사각형이라고 볼 수 있을까? 각도기도 없이 어떻게 네 각이 직각임을 알 수 있을까? 더군다나 평행사변형 여부를 판단하려면 마주 보는 두 대변이 평행임을 판별할 수 있어야 한다. 학생들이 도형 마를 정사각형이

라고 한다면, 이 학생은 정사각형 개념을 제대로 이해하고 있는 것으로 볼 수 있을까?



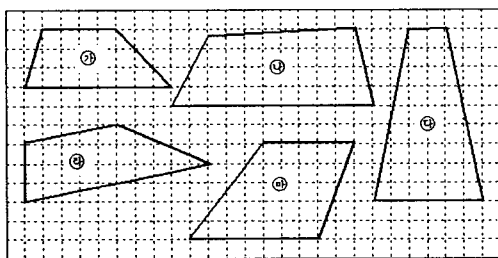
[그림 1-1]

일련의 기하 개념을 정의하는데 있어, 포함의 관점에서 정의할 것인가 분할의 관점에서 정의할 것인가는 중요한 쟁점의 하나인데, 현재 우리나라 학교수학에서 사각형에 대한 정의는 분할이 아닌 포함의 관점에서 지도되고 있다(박경미 외, 1998). 그래서 초등 학교수학에서 여러 기본 도형을 지도한 후, 도형 사이의 관

* 전주교대, goma@jnue.ac.kr

계를 지도하는 것이 중요한 지도 내용들이다. 그러나 많은 학생들이 위와 같은 문제 상황에서, 직사각형이 어느 것이냐는 질문에는 라 도형만 답하는 경향이 있다. 이는 학생들이 직사각형과 정사각형의 포함관계를 파악하지 못하거나 이해하지 못하는 수준으로, 반힐레의 기하학습수준 이론에서 2수준에 미치지 못하는 것이다. 이러한 도형 사이의 관계를 파악하기 위해서는 반힐레의 기하학습수준이론의 중요한 특성 중의 하나인 순차성에 의해 반드시 제1수준을 통과하여야 제2수준에 도달할 수 있다. 제1수준에서 사고할 수 있기 위해서는 도형을 그 구성요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악하여야 하는데, 도형의 변의 개수, 각의 크기, 두 변의 관계인 수직과 평행에 대한 이해는 필수적이다. 그러나 많은 학생들이 도형을 제1수준에서 파악하는 것이 아니라 그 도형의 시각적 외양에 의해 판단하는 경향이 있으며, 이는 초등학생뿐만 아니라 장차 초등학교에서 수학을 가르칠 교대에 재학중인 예비교사에게서도 관찰된다. 다음은 그 예이다.

다음 도형 중에서 사다리꼴을 모두 찾아 ○표하세요



[그림 1-2]

[그림 1-2]는 교육대학교에서 도형 영역 지도 방법에 관한 강의를 하면서 예비교사들의 기본 도형에 관한 이해 정도를 조사하여 강의에 이용할 목적으로 제작된 문항이다.

이 문항에서 사다리꼴에 해당하는 도형은 ㉑,

㉒, ㉔, ㉕이다. 검사지에 의한 예비교사 32명 중 사다리꼴을 모두 찾은 사람은 17명이었고, 도형 ㉓에 ○표를 하지 않은 예비교사는 14명이었다. 나머지 1명은 도형 ㉓에는 ○표를 하였지만, 도형 ㉒에는 ○표를 하지 않았다. 도형 ㉓에 ○표를 하지 않은 학생 14명 중 2명은 도형 ㉔에도 ○표를 하지 않았다. 도형 ㉒가 사다리꼴이라고 답하지 않은 예비교사들이 왜 많았을까? 이에 대한 대답은 그들이 두 대변이 평행한지를 판단하는 방법을 모르고 있거나, 전형적인 모양의 사다리꼴만을 사다리꼴로 생각하는 사다리꼴에 관한 잘못된 개념 이미지를 갖고 있어서 그렇게 답했다고 볼 수 있다. 도형 ㉓의 평행한 두 변이 왜 평행한지에 대한 후속 질문에 쉽게 대답하지 못하고 한참 시간이 지나서 한 학생이 기울기 개념으로 설명하는 것으로 보아 학생들이 주어진 도형의 두 변이 평행한지를 판단하는데 어려움이 있는 것으로 보인다. 초등학생들의 경우에는 그 정도가 더 심할 것이다.

우리나라 교육과정 4나 단계에서 지도하는 평행 개념은 학생들이 기본 도형을 판단할 때 사용하는 주요한 성질들로, 이 개념에 대한 이해가 충분히 이루어져야 이후의 기본 도형 학습과 도형 사이의 관계, 그리고 도형의 성질에 대한 학습이 제대로 이루어질 수 있다. 본 고에서는 이러한 생각으로 평행과 평행선에 관하여 학생들은 어떤 잘못된 개념 이미지를 가지고 있으며, 초등학교 교과서에는 수직과 평행이 어떻게 다루어지고 있는지를 살펴보고 한다.

II. 이론적 배경

1. 개념의 이해와 적용

Skemp(1989)는 개념을 공통성질에 대한 상징

적 표현으로 규정하면서, 개념을 형성하는 대표적인 조작으로 추상화와 분류를 들고 있다. 추상화는 공통 성질을 인식하는 활동이고, 분류는 이러한 공통 성질에 근거하여 경험들을 모으는 활동을 의미한다. 그리하여 Skemp는 개념 형성을, 일상생활에서 경험과 다루고자 하는 대상에서 공통 성질을 추상화하고 분류하는 정신 작용으로 받아들였다.

김승호(1987)는 학습자가 개념 A를 획득했다는 것은 개념 A속성을 언어적으로 표현할 수 있을 뿐만 아니라 현실적 경험 세계에서 그러한 속성을 가진 대상들을 대할 때마다 개념 A를 통해 그것을 볼 수 있는 능력을 의미한다고 주장하였다. 그러므로 학습자가 A라는 개념을 갖기 위해서는 'A란 무엇인가?'에 관한, 즉 형식적 정의에 관해 이해를 해야 할 뿐만 아니라 '어떤 대상이 A로 간주될 수 있는가'에 관한, 즉 A가 적용되는 대상에 관한 지식도 함께 가져야 한다는 것이다. 즉 학습자가 개념을 갖는다는 것은 개념을 언어적 수준에서 추상적 수준으로 이해할 뿐만 아니라 그 개념을 통해서 그 개념이 실제로 적용될 수 있는 사례들을 볼 수 있는 능력을 의미한다.

개념의 이해와 개념의 적용은 불가분의 관계를 맺는다. 개념을 이해했다는 것은 개념을 적용할 수 있는 것을 의미한다. 따라서 개념을 이용할 수 없다는 것은 개념을 제대로 이해하기 못한 때문이라고 생각할 수 있다(Mehchiskaya, 1969).

수학에서 모든 영역이 그렇듯이 기하도 하나의 개념뿐만 아니라 개념의 체계를 이용할 것을 요구한다. 개념의 체계란 여러 개념들이 관련되어 있는 체계를 말한다. 개념들을 일종 모형의 체계로 파악한다는 것은 개념들 사이의 관련성을 구축한다는 것으로서, 이는 효율적인 개념 이해뿐만 아니라 학생들의 논리적 사고

능력의 발달을 촉진한다(Zykova, 1969).

평행사변형 개념을 이해하려면 평행사변형을 구성하고 있는 여러 구성 요소와 그 구성요소 사이의 성질을 알아야 하는데, 그것의 바탕이 되는 개념이 평행 개념이다. 이 평행 개념은 학교에서 학습하는 여러 도형을 분류하고 판별하게 해주는 핵심 개념이 된다.

2. 반힐레의 기하학습수준 이론에서 수직과 평행 개념의 중요성

반힐레에 따르면 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로 비약을 하게 되는 과정을 반복하는 바, 수학의 학습-지도는 그러한 불연속적인 사고 수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명하여 가도록 되어 있다. 반힐레는 기하학적 사고를 다음과 같이 5수준으로 구분하고 있다. 이러한 수준 모델은 수학의 지도가 아동의 학습 수준에 적합하지 못하면 극도의 부조화를 이룰 수 있음을 드러내 주는 것이다. 각 수준의 특징은 다음과 같다(우정호, 2000).

제0수준: 주변 대상을 형이란 인식수단에 의해 파악하는 단계로, 기본적인 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다. 세모 모양, 네모 모양, 상자 모양 등으로 도형의 이름을 말할 수 있으나 그 성질을 명확히 알지 못한다.

제1수준: 주변 대상이 정리수단이었던 형이 연구의 대상이 되어 도형의 구성요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 직사각형의 대각선의 길이가 같다는가 마름모의 네 변은 길이가 같다는 등의 성질을 말

할 수 있지만, 도형이나 그 성질을 명확히 관련지을 수 없다.

제2수준: 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리수단이 된다. 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 이를테면, 모든 정사각형은 직사각형임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지 못한다.

제3수준: 명제가 연구의 대상이 되어 명제 사이의 논리적 관계가 정리수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체기하의 연역체계를 파악한다. 이를테면, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 명제를 증명할 수 있다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며, 다른 공리체계의 가능성을 이해하지 못한다.

제4수준: 기하학 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리체계를 비교할 수 있고, Hilbert 류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다. 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리체계의 성질을 이해한다.



[그림 II-1]

예로서 [그림 II-1]과 같은 도형을 학생에게 제시한 후, ‘다음은 어떤 도형인가? 왜 그렇게 생각하는가?’라는 질문에 각 수준의 학생들은 첫 질문에는 직사각형이라고 대답할 수 있다. 그리고 두 번째 질문에 대한 반응은 각 수준의 특징을 보여준다. 어떤 학생들은 그것이 직사각형처럼 보이기 때문이거나 문처럼 보이기 때

문이라고 대답한다. 이는 ‘시각적 외관에 의해 판단하는 것으로 이렇게 반응을 보인 학생은 0수준으로 볼 수 있다. 어떤 학생들은 그것이 네 개의 변으로 이루어져 있고, 단축있으며, 변 2개는 길고 나머지 변 2개는 짧고, 네 개의 직각을 가지고 있고, 대변이 평행하고 등등의 이유를 낸다. 이는 도형이 가지고 있는 도형의 구성 요소와 성질을 통해 도형을 판단하는 것으로 이 학생들은 제1수준에 해당한다고 볼 수 있다. 어떤 학생들은 그것은 직각으로 이루어진 평행사변형이기 때문이라고 대답한다. 이런 학생들은 최소한의 성질을 사용하여 반응한다. 이런 학생들은 도형 사이의 관계나 도형의 성질 사이의 관계를 파악하고 있기 때문에 제2수준에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 제 3수준의 학생들은 ‘이 도형이 평행사변형이고, 한 각이 직각이라면 이것이 직사각형임을 증명할 수 있다’라고 대답한다.

우리나라에서는 초등학교 1학년에서 세모 모양, 네모 모양, 원 모양 등 주변의 사물을 모양으로 인식하는 내용을 지도하고 있는데, 이는 0수준 활동으로 볼 수 있으며, 4학년에 이르러 수직과 평행을 학습한 후, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모 등 기본 도형을 학습하고 아울러 기본 도형의 포함관계, 기본 도형의 성질을 가르친다. 5, 6학년의 도형 영역에서는 점대칭과 선대칭, 합동 등 변환기하와 입체도형을 중심으로 교육과정의 구성되어 있으므로, 우리가 초등학교에서 지도하는 기하수준은 제2수준까지로 볼 수 있다. 따라서 초등수학의 기하지도시 교사의 중요한 역할은 제0수준의 학생들을 제1수준으로 수준 상승시켜주고, 제1수준 학생들을 제2수준까지 수준 상승시켜주는 것이다. 그러나 우리나라에서 시행한 여러 빈헨레 사고 수준 검사에서는 초등학교 고학년 학생들의 50% 이상이 0수준과 1수준에 머물러 있음을 보여주고

있다(김현미, 1998; 이종영, 장영은, 2003).

3. 물리적인 그림과 도형의 구분

학생들은 기하를 학습하면서 대하게 되는 도형을 분석적인 시각으로 보지 못하여 즉 반월레의 사고수준 이론에서 제I수준에서 사고하지 못하여 개념 학습과 문제 해결 과정에서 많은 어려움을 겪는다.

기하는 물리적인 공간을 모델링하는 수학 분야인 동시에 그 자체의 공리와 대상, 규칙과 문제를 가지고 독자적으로 발달되어 온 이론이기도 하다. 기하에서 다루는 대상인 직선은 연필로 종이 위나 모래 위에 막대기로 그은 직선이라는 물리적인 실체로 나타내지만 이론상의 대상일 뿐이며 실제의 추상화를 통해 얻을 수 밖에 없는 이상적인 대상이다(Laborde, 1991).

도형은 기하학 이론에 대한 모델의 역할을 수행하는 동시에 이론에 관한 실제의 역할을 하는 것으로 볼 수 있다. 실제적인 물리 공간의 물리적 사실들은 기하를 통하여 모델화되며 형식적인 수학 언어를 통해 명제로 표현된다. 그러나 이러한 명제는 2차원이라는 물리 공간 속의 자취로 실제적인 형태로 표현된다. 도형이라는 관념은 이론화 과정의 결과이다. 도형은 실제적인 표상으로서 이론적인 개념을 나타내는 동시에 시각적인 인상을 준다. 이러한 이중적인 역할을 설명하기 위해서는 그림과 도형을 구분하여야 한다. 그림은 이론적인 도형을 나타내고 있는 물리적인 실체이다. 기하학적인 대상은 그림이 아니라 도형에 대해 서술하는 문장이다. 이러한 구분은 매우 오래된 것으로, 플라톤은 기하학자들이 시각적인 도형을 연구할 때 그 시각적인 도형을 보는 것이 아니라 마음으로 통해 볼 수 있는 도형을 생각한다고 하였다.

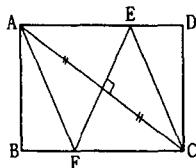
Chevallard는 그림을 물리에서 실험의 역할과 유사한 역할을 수행하는 것으로 보아, '시각적 실험(graphical experiment)'이란 용어를 도입하였다. 어떠한 물리 실험에서도 피할 수 없는 노이즈가 있는 것처럼, 물리적 실체로서의 그림도 완전하지 못하다. 그림으로서의 점은 폭을 가지고 있으며, 그림으로서의 직선은 실제로는 곧지 못하다. 이런 불완전성은 부산물을 초래하여, 우리가 실제로 그린 한 원의 접선은 그 원과 한 점에서 만나지 않고 여러 점에서 만나게 된다. "수학은 거짓된 그림에 입각하여 올바르게 추론하는 예술이다"라는 말처럼, 수학에서는 그림의 불완전성을 고려하지 않고 그 그림이 나타내는 기하학적인 관계를 고려함으로써 올바른 추론을 할 수 있다. 이런 방식으로 그림을 바라보는 것이 바로 그 그림을 도형 즉 기하학적 대상으로 바라보는 것이며, 이런 방식으로 실제적인 그림과 그 실체인 추상물을 구분할 수 있다. 물리학자들이 자신의 지식에 입각해서 실험의 실제적인 측면을 무시하듯이, 실제적인 그림 속에서 보는 기하학적 대상으로서의 추상화는 학습자의 지식에 달려있다(Laborde, 1991).

기하를 학습할 때, 물리적인 그림과 도형을 구분하는 것은 쉽지 않다. 학생들은 실제적인 그림이 나타내는 도형에 관해 생각하는 대신에 실제적인 그림을 가지고 사고한다. 학생들은 흔히 기하학적인 성질을 사용하여 작도 문제를 수행하는 것으로 생각하지 않고 시각적으로 옮겨 보이는 물리적인 그림을 그리는 것으로 생각한다. 한 원에 접선을 작도하라는 문제가 주어졌을 때, 학생들은 한 원에 여러 번의 시행착오를 거쳐 그럴듯해 보이는 접선을 그리거나, 원과 접선이 만나는 부분이 있음을 보이기 위해 덧칠을 한다. 그러나 기하를 지도하는 교사의 입장에서는 이 작도 문제는 접선의 그림

을 그리는 것이 아니라 기하학적인 관계를 이용하여 접점을 구하는 방법을 묻고 있는 것이다. 초등학교 도형영역을 학습할 때도 학생들이 분석적 수준에서 도형을 바라보는 것이 아니라 시각적 수준에서 판단하는 것은 기본적으로 교과서나 교사에 의해 제공된 도형을 도형으로서 바라보는 것이 아니라 물리적인 그림으로 바라보는 것으로 볼 수 있다.

초등학교 도형영역에서 도형을 그 구성요소와 구성요소 사이의 성질(평행성, 수직성)에 의해 도형을 판단하여 여러 기본 도형에 관하여 학습하고, 이런 기본 도형의 성질을 명제로 인식하는 단계까지 지도한다. 그런 다음에 중학교 이후의 수학 학습에서는 이런 명제를 논리적으로 증명하는 수준에서 기하 학습이 전개된다. 따라서 중고등학교 학교 수학에서는 [그림 I-1]이나 [그림 I-2]와 같이 도형이 제시되지 않고, 주어진 도형이 어느 도형인지 명시적으로 주어지지거나, 그 도형이 무엇인지를 판단할 수 있도록 도형의 구성 요소 사이의 관계가 명시적으로 주어진다. 도형은 그림을 통해서 정확하게 그려질 수 없으므로 적절한 문맥이 주어져야 하는데, [그림 II-2]는 중고등학교 수학교과서에서 도형과 관련된 문제가 제시되는 일반적인 모습으로 그림과 더불어 문맥이 주어져 있다.

직사각형 ABCD에서 대각선 AC의 수직이등분선이 변 AD, BC와 만나는 점을 각각 E, F라고 하면, 사각형 AFCE는 마름모임을 증명하여라.



[그림 II-2]

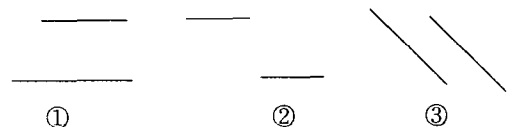
따라서 초등학교 학교수학에서도 그림만 제공하는 것이 아니라 적절한 문맥이 주어져야

한다. 초등학교에서 도형의 구성요소와 구성요소 사이의 성질(수직성, 평행성) 등에 의해 도형을 판단하도록 즉 분석적 수준에서 도형을 바라볼 수 있도록 지도할 때 학생들의 기하 학습 사고 수준상 적절한 문맥이 주어지 어렵다. 이를 보완할 수 있는 방법이 [그림 I-2]처럼 모눈종이 위에 도형을 제시하는 것이다. 모눈 종이의 간 칸은 정사각형이므로 그 위에 그려진 도형은 변의 길이가 같은지 그리고 두 직선이 서로 수직인지 또는 평행한지를 쉽게 판단할 수 있다.

III. 초등학교 수학에서 평행과 평행선 지도에 관한 고찰

1. 평행과 관련된 학생들의 잘못된 개념 이미지

이종영과 장영은(2003)은 도형과 관련된 문제 해결 과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인분석 연구에서 다음과 같은 세 종류의 평행선에 관하여 학생들에게 잘못 형성된 개념 이미지를 확인하였다. 다음 [그림 III-1]은 두 직선이 평행선이지만, 학생들이 평행선이 아니라고 생각하는 경우이다.



[그림 III-1]

평행선은 두 선분의 길이가 같아야 한다고 생각하는 학생들이 있다. 그래서 여러 직선들이 주어지고 평행선을 고르는 문제에서 학생들

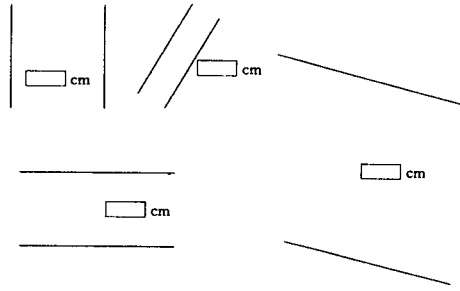
은 두 변의 길이가 같은 평행선만을 고른다. 이런 평행선에 잘못된 개념 이미지를 갖고 있는 학생들은 [그림 III-1]에서 ①번은 평행선이 아니다. [그림 III-1]에서 ①과 ③은 두 선분이 중첩된 부분이 있지만, ②는 중첩된 부분이 없다. 어떤 학생들은 ①과 ③은 평행선이라고 답하지만, ②는 평행선이 아니라고 답한다. 서로 중첩된 부분이 없어, 서로 마주 보고 있지 않기 때문이다. 즉 어떤 학생들은 평행선은 마주보고 있어야 한다고 생각한다. ①과 ②는 본 논문집의 가로변과 평행하지만, ③은 그렇지 않다. 어떤 학생들은 교과서의 가로변 혹은 문제지의 가로변과 평행한 직선이나 선분들로 이루어져 있을 때에만 두 직선이나 선분이 평행하다고 생각한다.

교과서에 제시되는 전형적인 사다리꼴의 예는 평행한 두 변의 길이가 같지 않은 사각형이며, 전형적인 평행사변형의 예는 한 대변이 교과서의 가로변 혹은 세로변과 평행하게 보이게 그려져 있지만 다른 대변은 그렇지 않은 사각형이기 때문에, 이러한 평행에 대한 학생들이 갖고 있는 잘못된 개념 이미지는 여러 기본 도형을 학습하는데 어려움을 야기할 수 있다. 학생들이 이러한 잘못된 개념 이미지를 갖게 된 원인에는 여러 가지 있을 수 있겠으나, 우리나라 교과서를 살펴보면 교과서가 이러한 잘못된 개념 이미지 형성에 크게 일조하는 것으로 보인다.

먼저 교과서에서 제시된 평행선의 예를 살펴보면 다음과 같은 문제점을 발견할 수 있다. 4-나 단계 교과서와 익힘책에는 모두 40개의 평행선의 예가 나오는데, 이 중에서 39개가 두 선분의 길이가 같게 제시되었고, 수학 익힘책에 제시된 오직 한 개만이 두 선분의 길이가 다르게 제시되어 있다. [그림 III-2]은 4-나 단계 수학익힘책 59쪽에 나오는 길이가 다른 평행선의 예로, 오른쪽에 있는 평행선의 길이가 다르게 제시되어 있다. 이것도 교과서 저자가 의도

적으로 길이를 다르게 한 것이 아니라, 교과서 지면 문제로 유일하게 길이가 다른 평행선이 제시된 것으로 보인다.

● 평행선 사이의 거리를 재어 보시오.



[그림 III-2]

[그림 III-2]에서 왼쪽에 있는 3개의 평행선의 예가 전형적으로 교과서에 제시되는 예로 항상 두 선분의 길이가 같게 제시된다. 또한 교과서에 제시되는 평행선의 예의 문제점은 대부분이 교과서의 하단과 평행한 것들이 예로 제시된다는 것이다. 4-나 단계 교과서와 익힘책의 평행선의 예 40개 중에서 약간 기울어진 형태로 제시된 예는 12개이다. 그러나 교과서에서 평행선을 처음으로 지도하는 부분에 나오는 모든 예와 평행선의 성질인 엇각과 동위각을 지도하는 부분에 나오는 모든 예들은 평행선이 교과서나 수학 익힘책의 하단과 평행하게 제시되고 있으며, 제시되는 모든 평행선의 예가 서로 중첩되는 부분을 갖고 있어, [그림 III-1]의 ③과 같은 두 직선은 평행이 아니라고 학생들이 생각하는 것이 어찌 보면 당연해 보인다.

2. 초등 수학 교과서에 제시된 평행과 평행선에 관한 고찰

두 각 $\angle BAD$ 와 $\angle CAD$ 가 공통변 \overline{AD} 를 갖고 또 다른 두 변 AB 와 AC 가 반향 반직선을

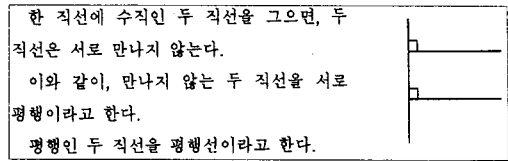
이루면 이 각들을 서로 보각을 이룬다고 한다. 이 때, $\angle BAD$ 가 그의 보각과 합동이면 그것을 직각(right angle)¹⁾이라고 한다(이우영, 1996 16). 직각이란 용어는 특정한 각에 붙여진 것이고, '수직'이란 용어는 직선과 직선 사이의 위치 관계를 나타내는 것이다. 이 수직이란 용어를 가지고 직선과 평면, 평면과 평면 사이의 관계를 나타내는 것으로 확장되기도 한다.

평행이라는 개념은 수직이라는 개념에 비해 복잡하다. 유클리드 원론에서는 평행선을 “평행선이란 같은 평면에 있는 직선들로서 양쪽으로 아무리 길게 늘여도 양쪽 어디에서도 만나지 않는 직선들을 말한다”로 서로 만나지 않는 직선들로 정의하였다. 그리고 두 직선이 다른 한 직선과 만나 이루는 동위각의 크기가 같거나 엇각의 크기가 같으면 두 직선이 평행임을 증명하고 있다(이무현, 1998: 3). 이는 두 직선이 평행한지 그렇지 않은지를 평행선에 대한 정의만으로 판단하기 어렵기 때문에 두 직선의 평행 여부를 판단할 수 있는 방법을 제공하는 것으로 볼 수 있다.

[그림 III-3]은 우리나라 초등학교 4나 단계 교과서에서 처음으로 평행과 평행선이 제시되는 부분이다.

이와 같이 평행과 평행선에 관해 약속을 하기 전 활동은 한 직선 위에 두 점을 찍고 그 두 점에서 각각 그린 두 수선이 서로 만나지 않음을 확인하여 보는 내용으로 이루어져 있다. 평행과 평행선의 의미를 학습한 다음 단계에서는 삼각자 2개를 이용하여 평행선을 그리는 활동이 나온다. 이 활동 다음에 평행선의 성질을 학습하게 되는데, 초등학교에서는 평행선 사이의 거리와

엇각과 동위각이 같다는 성질을 학습 한다²⁾.



[그림 III-3]

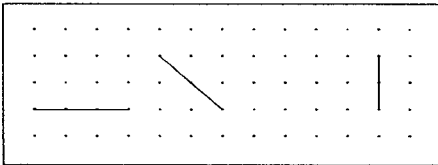
그러나 동위각과 엇각의 크기가 같다는 사실이 두 직선이 평행함을 판단할 수 있는 방법으로는 이용되지 않는다. 어떤 개념의 정의를 내려 줄 때에는 어떤 대상이라도 그 정의에 해당하는 여부를 가릴 수 있는 기준이 되어야 하며, 또한 초등학교의 수학 교실에서 사용하는 정의는 아동들의 논리적 사고 수준이나 개념 형성의 효율성, 의사소통의 용이성 등에 대해서도 충분히 고려하여야 한다(이용률, 1998: 170). 주어진 두 직선 중 한 직선에 수선을 그은 후, 다른 한 직선과 수직으로 만나는지를 확인하면 두 직선이 평행인지를 알 수 있다. 두 직선이 만나는지, 만나지 않는지를 직접 확인할 수 없는 평행선을 상급학교 수학에서처럼 서로 만나지 않는 두 직선이라고 정의해줄 수 없기 때문에 초등학교 수학교과서에 제시된 평행과 평행선의 정의는 타당하여 보인다. 그러나 두 직선이 평행인지를 판단하려면 항상 각도기와 자가 있어야 하며, 학생들이 수학 문제를 풀 때 항상 자와 각도기를 사용하는 것이 아니며, 기본 도형을 학습할 때에는 두 변이 평행한지 평행하지 않은지를 보다 쉽게 판단할 수 있어야 하기 때문에 교과서에 주어진 정의만을 가지고는 부족하다. 이런 상황에서 사용

1) 모든 직각은 서로 합동임은 유클리드 기하학의 네 번째 공준으로 이는 각의 측정에 관한 표준을 제공하여 주는 것이다.
2) 물론 초등학교에서는 엇각과 동위각이라는 용어는 나오지 않는다. 대신에 평행선과 한 직선이 만날 때 생기는 같은 쪽의 각, 반대쪽의 각이라는 말로 엇각과 동위각의 의미를 풀어 사용한다.

되는 것이 모눈종이의 사용이다³⁾. 모눈종이는 각 칸이 정사각형으로 이루어져 있다. 따라서 모눈종이 위에 그려진 도형에서는 변의 길이가 같은지, 두 변이 평행인지 수직인지를 쉽게 판단할 수 있어, 학생들이 기본 도형을 학습할 때 그 도형의 시각적 외양을 가지고 도형을 판단하는 것이 아니라 그 도형의 구성 요소와 성질을 가지고 판단하는 것을 도울 수 있다⁴⁾. 우리나라 4나 단계 수학교과서에서 제시되는 기본 도형은 모두 모눈종이 위에 그려져 있다.

그러나 4나 단계 수학교과서에서 수직과 평행을 지도하는 단원에서는 모눈 종이 나 나오지 않으며, 두 직선이나 선분이 평행한지 여부를 판단하는 문제도 부족하며, 많은 활동과 문제가 한 직선이 주어져 있을 때, 평행한 선분이나 직선을 그리는 활동으로 이루어져 있다. 4나 단계 수학 익힘책에 점판위에 그려진 선분과 평행인 선분을 그리는 상황에서 모눈종이가 나온다([그림 III-4]). 그러나 어디에도 모눈종이 나 점판 위에 그려진 두 직선이 평행인지를 판단하는 방법을 가르치는 부분뿐만 아니라 그러한 문제도 나오지 않는다.

• 점판 위의 주어진 선분과 평행인 선분을 그려 보시오.

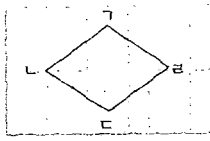


[그림 III-4]

모눈종이 위나 점판 위에 그려진 두 선분이 평행한지를 판단하는 것은 이후의 기본 도형 학습에 중요하다. 모눈종이 위나 점판 위에 그려진 두 직선이 평행인지를 판단하는 것도 이를 가르치는 것도 쉬운 일이 아니다. 모눈 종이 위에 그려진 두 직선이 평행인지 여부는 두 직선의 기울기를 알아야 판단할 수 있다. 즉, 중학교 수학에서 배우는 기울기가 같은 두 직선은 평행하다는 사실을 이용하여야만 한다. 그러나 모눈종이 없이는 기본 도형을 반월래 기하학습사고 수준이론에서 제0수준으로 판단할 수 없다. 또한 모눈종이 위에 그려진 마름모의 두 대변이 평행한지를 판단하기 위해서는 초등교과서에 제시된 평행과 평행선의 정의를 사용하기에는 몹시 성가신 일이 된다. 예를 들어, 우리 초등학교 4나 단계 수학교과서에서는 마름모의 두 대변이 평행한지를 [그림 III-3]에 제시된 정의를 가지고 지도하도록 제시되어 있다([그림 III-5])⁵⁾. 이는 모눈종이 위에 있는 두 직선이 평행한지 여부를 쉽게 판단할 수 있다면, 이렇게 하지 않아도 쉽게 할 수 있을뿐더러, 학생들이 먼저 그러한 마름모의 성질을 찾아낼 수도 있을 것이고, 따라서 마름모가 평행사변형이 됨을 쉽게 파악할 수 있을 것이다.

따라서 모눈종이 위에 그려진 두 선분이 평행한지를 판단하는 방법에 대한 지도는 수직과 평행을 지도하는 단원에서 필수적으로 지도하여야 것 중의 하나이다.

- 3) 모눈종이의 사용은 20C초 수학교육 근대화 운동 시기에 유클리드 기하 중심의 수학교육을 탈피하고자 했던 학자들이 공통적으로 주장했던 것 중의 하나로, 수학의 논리적 측면보다는 직관적인 측면을 강조하기 위한 것으로 보인다(이용률, 1998).
- 4) 이는 학생들이 van Hiele기하학습사고 수준에서 1단계에서 사고하는 것을 의미한다. 예를 들어 사다리꼴이 모눈종이가 아닌 백지 위에 그려져 있다면, 아무리 사다리꼴의 정의를 알고 있다 해도, 그 도형이 사다리꼴이라고 말할 때는 시각적인 판단에 하는 것으로 0수준의 사고라고 밖에 말할 수 없을 것이다.
- 5) 그러나 이런 활동이 4나 단계 수학교과서에서 마름모보다 먼저 학습하는 사다리꼴이나 평행사변형에서 두 변이 평행한지 여부를 판단할 때에는 전혀 나오지 않는다.



- 한 변 가에 수직인 직선 가를 그려라.
- 변 나와 직선 가가 만나서 생기는 각의 크기를 재어보아라.
- 변 가와 변 나에 평행인가?

[그림 III-5]

모눈종이 위에 두 직선의 평행 여부를 판단하는 활동은 중학교에서 배우게 될 기울기 개념에 대한 풍부한 경험을 제공하여 줄 수 있으며, 이런 활동이 기울기 개념으로 조직되어 기울기 개념을 풍부하게 해줄 수도 있을 것이다. 따라서 초등학교에서는 기울기라는 용어를 사용할 수 없지만 이에 모눈종이의 세로칸과 가로칸의 개수를 세어 보는 기울기 개념에 대한 비형식적인 사용을 통하여 지도할 수 있을 것이다. 이러한 활동은 이후에 학습할 도형의 합동과 닮음 개념으로 수학화 될 수 있을 것이므로, 매우 의미 있는 수학활동이 될 수 있을 것이다.

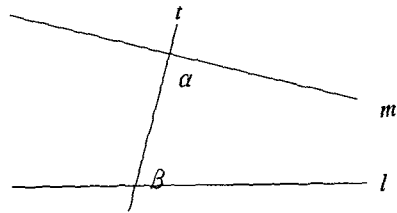
IV. 초등학교에서 평행과 평행선의 지도 개선 방안

지금까지 초등학교 수학교과서에서 평행과 평행선의 지도 내용에 관한 문제점을 살펴보았다. 이를 개선할 수 있는 구체적인 개선 방안을 지금부터 제안하고자 한다.

유클리드는 두 직선이 교차하지 않으면 즉, 그들이 어떤 공유점도 갖지 않으면 두 직선은 평행하다고 정의하였다. 그러나 두 직선이 있을 때, 그 두 직선이 서로 만나는지의 여부는 그 어느 누구도 확인할 수 없다. 그래서 유클리드는 유클리드 기하의 다섯 번째 공준인 평행공준을 '한 직선 l과 l 위에 있지 않는 한 점 P가 주어졌을 때 P를 지나서 l과 평행인 직선

m이 유일하게 존재한다'고 서술하는 대신에 다음과 같이 서술하였는데, 이는 간접적으로 평행성을 증명하거나 직관적으로 이해하려는 시도로 볼 수 있다.

두 직선에 l과 m과 모두 교차하는 직선 t를 그려서 t의 한쪽에서 만들어지는 내각 α 와 β 의 크기를 측정하여 α 와 β 의 합이 180° 보다 작은 그 직선들이 α 와 β 와 같은 쪽에서 만난다(이우영: 19).



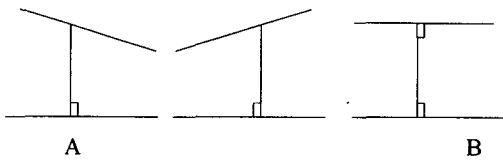
[그림 IV-1]

초등학교에서 평행성에 관해 지도할 때 그 개선 방안을 이 평행공준에서 찾을 수 있다. [그림 IV-1]에서 α 의 크기를 변화시켜보았을 때, α 와 β 의 합이 180° 보다 작으면 α 와 β 와 같은 쪽에서, 만약에 180° 보다 작으면 α 와 β 크면 반대쪽에 만날 것 두 직선이 만나게 될 것이다. 그리고 α 와 β 의 합이 180° 라면 직관적으로 두 직선이 어느 쪽에서도 만날 수 없기 때문에 두 직선이 서로 만나지 않고 평행이 됨을 직관적으로 이해할 수 있다. 이러한 생각은 α 와 β 평행성에 관해 초등학교에서 지도하는 내용 개선에 시사점을 준다.

우리 초등학교에서는 [그림 III-3]처럼 한 직선에 수직인 두 직선을 그으면 두 직선이 서로 만나지 않고 이와 같이 만나지 않는 두 직선을 서로 평행하다고 한다고 평행을 지도하고 있으면 이러한 정의-초등학교 수학교과서의 용어로는 약속-을 하고 있으며, 이러한 정의를 이끌어 내기 위해 학생들에게 한 직선을 긋고 그 직선

위에 두 점을 찍고, 각 점에서 그 직선에 대한 수선을 각각 그어 두 수선이 서로 만나는지를 확인하는 활동을 시키고 있다.

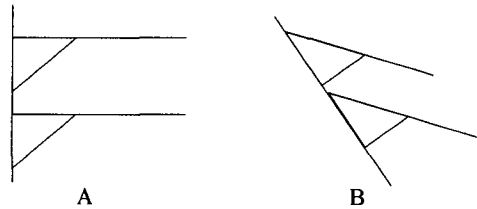
이를 다음과 같이 한 직선이 주어져 있고, 그 직선에 수선을 하나 그은 후 그 수선 위에 한 점을 잡은 후 그 점을 지나는 직선을 그어 보게 한다. 그런 다음에 그 직선이 처음에 주어진 직선과 어느 쪽에 만나는지를 살펴보게 한다. 이런 활동을 통해 학생들은 [그림 IV-2]의 C처럼 180°가 될 때는 서로 만나지 않을 수 있다는 생각을 직관적으로 할 수 있을 것이다. 이런 다음에 교과서에 나와 있는 정의를 제시하는 것이 바람직할 것으로 보인다.



[그림 IV-2]

초등학교 수학 4나 단계에서 평행에 관한 정의 다음에 나오는 내용들은 삼각자 2개를 사용하여 평행선을 그리는 활동, 한 직선이 주어졌을 때 삼각자 2개를 이용하여 주어진 직선에 평행선을 그리는 활동, 한 직선과 그 밖에 한 점이 주어졌을 때 삼각자 2개를 이용하여 주어진 점을 지나면서 주어진 직선에 평행한 직선을 그리는 활동이 나온다. 이런 활동들이 뒤이어 학생들이 학습하는 평행선의 성질, 즉 동위각과 엇각의 크기가 같다는 사실을 이해하는데 도움이 되어야 하는데, 아무런 상관이 없이 교과서가 구성되어 있다. 교과서에는 평행한 두 직선을 지나는 직선과 만나는 한 직선이 주어졌고, 학생들이 직접 각도기를 가지고 각을 측정하여 동위각과 엇각의 크기가 같은지를 확인시키고 있다. 동위각과 엇각의 크기가 같다는 사

실은 두 직선의 평행성을 살피는 방법 중의 하나이며, 이후에 학생들이 학습하는 기본 도형이 사다리꼴인지 평행사변형인지를 판단하는데 도움이 되어야 한다. 이를 위해서 필수적으로 필요한 활동이 삼각자를 하나만 가지고 평행선을 그리는 활동이다. 삼각자 하나만을 가지고 평행선을 그리는 방법은 먼저 삼각자를 이용하여 직선 하나를 그리고 삼각자를 평행이동 시키면서 두 직선을 그리는 것이다([그림 IV-3]).



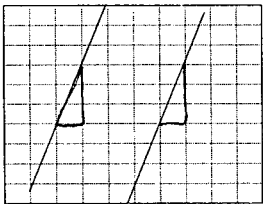
[그림 IV-3]

이런 활동을 할 때, [그림 IV-3]의 A처럼 삼각자의 직각인 각을 이용하여 평행선을 그리는 활동은 먼저 선행되어야 하는데, 이는 학생들이 알고 있는 평행의 약속에 가깝기 때문이다. 그 다음에 B처럼 직각이 아닌 각을 평행이동시켜 평행인 두 직선을 그리는 방법이 도입되어야 하는데, 이는 동위각의 크기가 같음을 직관적으로 이해시킬 수 있을 뿐만 아니라 학생들이 먼저 그러한 사실을 발견할 수 있다. 또한 삼각자 하나를 평행시켜 평행인 두 직선을 그리는 방법은 역으로 모눈종이 위에서 동일한 활동을 하여 봄으로써 모눈종이 위에 그려진 두 직선이 서로 평행인지를 판단할 수 있는 방법을 제공하여 준다.

중학교나 고등학교 수학에서는 두 직선의 기울기나 동위각과 엇각의 크기를 확인하여 두 직선이 서로 평행한지를 판단한다. 초등학교에서도 모눈종이에 그려진 두 직선이 서로 평행한지 여부도 결국 이런 방법을 이용할 수밖에

V. 결 론

없는데, 기울기 개념은 비와 비율을 학습한 이후에나 가능하며, 동위각과 엇각의 크기가 같은지는 적어도 삼각형의 합동을 인식한 후에나 가능하다. 따라서 기울기 개념에 대한 비형식적 접근을 할 수밖에 없는데 그 방법이 바로 직각 삼각형을 이용하는 방법이다. [그림 IV-4] 처럼 모눈종이 위에 그려진 두 직선이 평행한지 여부를 판단하기 위해 동일한 크기의 직각 삼각형을 그려보는 것이다. 모눈종이의 격자점을 연결하여 동일한 크기의 직각삼각형을 만들 수 있으면, 이전에 학생들이 직각삼각자 1개를 가지고 평행선을 그릴 활동과 동위각 엇각크기에 대한 이해를 가지고 두 직선이 평행인지 여부를 알 수 있다. 처음에는 [그림 IV-4]처럼 모눈종이 위에 직접 직각삼각형을 그려야 하겠지만, 이런 활동이 익숙해지면 굳이 직각삼각형을 그리지 않아도 모눈종이 위에 두 직선이 평행한지 여부를 판단할 수 있을 것이다. 이런 활동은 이후의 기울기 학습을 하는데 풍부한 경험적 토대가 될 수 있을 것이다.



[그림 IV-4]

모눈종이 위에 주어진 두 직선이 평행한지를 판단하는 방법을 학생들이 학습한다면, 앞에서 살펴보았던 기본 도형에 대한 판단을 시각적인 판단에 의해서 하는 것이 아니라 그 기본 도형을 이루고 있는 구성요소와 성질(평행성, 수직성)에 의해 판단하므로, 초등학교 도형 영역에서 지도하려고 하는 목표 달성이 수월해질 수 있을 것이다.

지금까지 초등학교 수학에서 지도하는 평행과 평행선에 관하여 살펴본 결과 다음과 같은 문제가 있는 것으로 논의하였다.

첫째, 우리나라 초등학교 도형 영역에서 지도하는 내용은 도형사이의 관계나 도형과 그 도형이 가지고 있는 성질들로 이루어져 있어, 반월래 기하학습 수준이론에서 제2수준까지 지도하는 것으로 볼 수 있는데, 제2수준에 도달하려면 반드시 제1수준을 통과하여야 한다. 제1수준에서는 도형을 그 구성요소나 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악할 수 있어야 하는데, 이 중에서 핵심적인 것 중의 하나라 도형의 두 변사이의 평행관계이다. 그러나 초등학생들은 평행선에 관하여 두 변의 길이가 같아야 한다던가, 서로 마주 보고 있어야 한다던가 하는 잘못된 개념 이미지를 소유하고 있는데, 이는 교과서에 평행한 예로 전형적인 평행선의 예만 제시되었고, 또한 교과서에는 두 선분이나 직선이 평행한지를 판단하는 활동이나 문제가 빈약하기 때문으로 보인다.

둘째, 두 직선이나 선분이 평행한지 여부를 판단하는 것은 그 정의만으로는 어렵기 때문에 초등학교 도형 영역, 특히 기본 도형 지도할 때에는 모눈종이의 사용이 필수적이다. 그러나 우리 초등학교 수학교과서에서 평행과 평행선을 지도하는 부분에서는 모눈종이가 전혀 나오지 않고 있다. 따라서 모눈종이 위에 그려진 두 직선이나 선분이 평행한지 여부를 지도할 수 있는 내용이 보완되어야 한다.

셋째, 두 직선이나 선분의 평행 관계를 학습하고, 기본 도형을 학습한 다음에는 교과서에는 이러한 도형 요소의 구성요소나 관계가 되고 도형을 파악하는 문제가 아니라 시각적 외양에

이해 도형을 판단하는 문제가 제시되고 있는데, 이는 학생들의 기하학습사고 수준을 상승시켜 주는 것이 아니라 오히려 0수준으로 퇴보시켜 주는 것으로 보인다. 따라서 교과서에서 제시되는 문제와 지도하는 내용을 수준에 대한 면밀한 검토와 개선이 요구된다.

이와 같은 문제점을 개선하기 위하여 초등학교에서 평행행과 평행선을 지도할 때 개선 방안을 살펴보았는데 그 핵심은 모눈종이 위에서 두 직선의 평행 여부를 판단하는 방법을 지도하는 것으로 이는 학생들이 평행선과 평행선의 성질을 배울 때, 삼각자 1개를 이용하여 평행선을 그리는 활동을 이용하여 모눈종이 위에 직각삼각형을 그려보는 것으로 가능하다. 이런 활동은 학생들이 이후에 학습할 삼각형의 합동과 닮은 그리고 직선의 기울기 개념을 학습할 때 훌륭한 경험적 토대가 될 수 있을 것이다.

참고문헌

김승호(1987). **교육의 과정에 있어서 개념의 위치: 인식의 틀로서의 개념이 성격을 중심으로**. 서울대학교 석사학위 논문.

김현미(1999). **반 힐레 이론에 근거한 초등학교 도형지도**. 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.

박경미·임재훈(1998). **학교수학 기하 용어의 의미론적 탐색 - 기하 용어의 역사적 변천 및 국제 비교를 중심으로 -**. **대한수학교육학회지 논문집** 8(2), 565-586.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

이무현(1998). **기하학 원론-평면기하-(해설서)**. 서울: 교우사.

이용률 외(1998). **초등수학교육론**. 서울:경문사.

이종영·장영은(2003). **도형과 관련된 문제해결 과정에서 초등학생의 오류 유형 및 원인 분석**. **과학교육논문집**, 25. 전주교육대학교 초등교육연구원.

Balacheff, N. (1991). **Artificial Intelligence and Real Teaching** In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 131-158). New York: Springer-Verlag.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigne*. La Pensee Sauvage.

Greenberg, M. J. (1996). **Euclid 기하학과 비 Euclid 기하학**. (이우영 역). 서울:경문사. (영어 원작은 1980년 출판).

Laborde, C. (1991). **The Computer as part of the Learning Environment: The case of Geometry**, In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 35-68). New York: Springer-Verlag.

Menchinskaya, N. A. (1969). **The Psychology of mastering concepts: fundamental problems and methods of research**. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Chicago, IL: University of Chicago.

Skemp, R.R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. London: Routledge.

Zykova, V. I. (1969). **Operating with concepts when solving geometry problems**. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Chicago, IL: University of Chicago.

A Study of Teaching Concept of Parallel Line in Elementary School Mathematics.

Lee, Chong Young (Jeonju National University of Education)

We teach students to explore geometric figures by its properties and establish relationships between some basic figures. The concept of parallel line play very important roles in such geometry learning process. In this study, I investigate the concept of parallel line we teaching in elementary school. Students have wrong concept images for parallel line, which is the result

of the elementary school mathematics textbooks, where only typical cases for parallel line is presented and there is no method to find if two lines is parallel or not. Therefore, we should teach explicitly students to find if two lines is parallel or not. The depth study on it is needed to develop students' geometric thought level.

* **Key words** : basic figures(기본 도형), van Hiele's geomtric thinking level(반힐레의 기하사
고수준), parallel line(평행선), concept image(개념 이미지)

논문접수 : 2005. 7. 1

심사완료 : 2008. 8. 1