大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 15 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.3, 233-249. Aug 2005

분수의 역사발생적 지도 방안[1)]

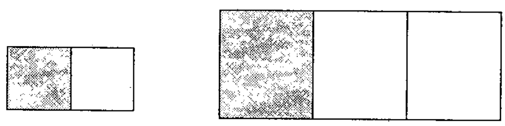
서 동 엽*

이 논문에서는 분수의 역사발생 과정을 분석함으로써 분수 개념이 측정 과정에서 유래되었음을 밝히고, 이를 활용하여 측정 과정을 통하여 초등학생들에게 분수를 지도할 것을 제안하였다. 여러 연구에서는 많은 초등학생들이 현행 교육과정에서 6학년에 도입되는 비 개념에 대한 예비 활동으로서 3학년부터 지속적으로 다루어지고 있는 분수의 여러 의미를 파악하지 못하고 있음을 보여주고 있다. 연구자는 선행 연구와 교재 분석을 통하여 이러한 문제점이 분수의 다양한 의미를 다루는 방식에서 학생들에게 혼란을 초래할 수 있음을 논하였다. 그리고 이에 대한 대안적인 방법의 하나로서, 측정 과정을 통하여 초등학교에서 분수를 도입할 것을 주장하였다.

I. 서 론

다음의 분수 문제는 본 연구자가 교육대학교 강의에서 분수와 관련된 강의를 도입할 때 학생들에게 자주 묻는 것 중 하나이며, 문어체 형식으로 조금 각색한 것이다.

다음 두 그림을 보고 물음에 답하여라.



(a) (b)

(1) 그림 (a)에서 어두운 부분이 나타내는 분수는 무엇인가?

(2) 그림 (b)에서 어두운 부분이 나타내는 분수는 무엇인가?

(3) 위의 그림을 이용하여 $\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{3}$보다 크다는 것을 설명해 보아라.

위의 문제를 질문하면 학생들은 (1)번과 (2)번 문제에 대해서는 각각 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$이라고 쉽게 답한다. 그러나 (3)번 문제에 대하여 많은 학생들은 답을 하지 못한다. 어떤 학생은 '전체 직사각형의 크기와 모양을 똑같이 그려야 해요'라고 답하기도 한다. 심지어 어떤 학생은 '두 그림으로 보면 $\frac{1}{3}$이 $\frac{1}{2}$보다 커요'라고 답하기도 했다. (3)번 문제는 문제로서 적절한가? 적절하다면 어떤 답이 타당한 답이 될 것인가?

이를 논하기 위하여 '코끼리 2마리와 개미 3마리가 있을 때 어느 동물이 더 많은가?'와 같은 문제를 생각해보자. 이 경우에는 '마리'라는 개체의 수가 단위가 되어 '개미가 더 많다'가 정답이 될 것이다. 그러나 '코끼리 2마리와 개미 3마리가 있을 때 어느 동물이 더 무거운

* 춘천교육대학교, dseo@cnue.ac.kr

1) 이 논문은 2004년도 춘천교육대학교 교내 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

가?'와 같이 묻는다면 이 때는 1g이나 1kg과 같은 무게의 단위가 기준이 되므로, 답은 '코끼리가 더 무겁다'가 될 것이다. 이러한 차이는 '코끼리 2마리'와 '개미 3마리'라는 두 가지 다른 대상을 어떤 단위를 이용하여 해석하는가에 달려있는 것이다. 그렇다면 위의 분수 문제는 어떠한가?

문제 (3)번에 주어진 두 그림의 어두운 부분을 '넓이'의 관점에서 본다면 $\frac{1}{3}$을 나타내는 그림 쪽이 더 크다고 할 수 있을 것이다. 그러나 '전체에 대한 부분의 크기'라는 관점에서 본다면 $\frac{1}{2}$이 더 크며, 이 때 가능한 해석은 '전체에 대하여 주어진 부분이 차지하는 비가 더 크다'는 식이 될 것이다. 그러나 본 연구자가 교육대학교 학생들에게 앞의 문제를 질문했을 때 위와 같이 답한 학생은 지금까지 한 명도 없었다. 그 이유는 무엇인가?

본 연구는 이러한 상황이 나타나는 원인에 대한 문제 제기로부터 출발한다. 분수는 현행 제 7차 교육과정뿐만 아니라 지금까지의 교육과정을 통하여 초등학교에서 중요하게 다루어지는 학습 주제 중의 하나이다. 유리수 개념을 직관적인 유리수 수준과 알고리즘적인 유리수 수준으로 나눌 때 초등학교에서 지도되는 분수는 이 중 직관적인 유리수 수준으로 볼 수 있으며, 이러한 직관적인 유리수 개념의 바탕은 서로 다른 상황을 같은 량을 나타내는 것으로 혹은 같은 구조를 가진 것으로 보는 비례 관계 또는 비 동치 관계이다(우정호, 2001; 유현주, 1995). 유현주(1995)에 따르면 유리수의 학습 수준은 4가지 수준으로 나누어볼 수 있으며, 비 동치 관계는 유리수 체라는 최종 수준의 전 단계인 제 3수준을 이룬다.

서두에서 제기한 분수의 크기 비교 문제는 이러한 비 동치 관계와 관련된 사고에 기초하여 주어진 문제를 볼 수 있는가의 문제와 관련된다. 또한 이 문제에 적절히 답하는 학생이 없었다는 사실은 본 연구자가 대면한 교육대학생들은 분수 개념을 비 동치 관계와 연결짓는 데 어려움을 지니고 있음을 의미한다. 이러한 경향은 교육대학생들이 이미 초등학교를 졸업하여 중·고등학교를 다니면서 알고리즘적인 측면의 유리수까지 학습하였고, 그럼으로써 분수를 직관적인 수준에서 여러 모델과 관련짓기보다는 하나의 수로 보는 관점이 더욱 강해졌기 때문에 그럴 것이라고 개연적으로 추론해볼 수도 있을 것이다.

현행 제 7차 교육과정에서는 도형의 등분할 상황, 이산량의 등분할 상황, 비교 상황, 측정 상황, 분배 상황 등 다양한 상황을 통하여 분수 개념의 학습을 시도하고 있다. 그러나 여러 연구 결과(소성숙, 2003; 권성룡, 2003)에 따르면 교육과정에서 의도하고 있는 것과는 달리 학생들은 다양한 분수 개념을 잘 이해하고 있지 못하다. 이렇듯 유현주(1995)가 제시한 4가지 수준 중 가장 기초적인 수준에서 이루어지는 몫, 부분-전체, 측도, 비 등과 관련된 분수 개념을 이해하지 못한 채 제 2수준의 형식적인 유리수를 접하게 됨으로써 제 3수준에서 의도하고 있는 비 동치 관계를 파악하는 데 어려움을 겪게 되는 것으로 본다.

그러나 본 연구에서는 이러한 문제가 나타나는 원인이 초등학교에서 다루는 분수 지도 방법과 밀접한 연관이 있음을 논하고자 한다. 몫, 부분-전체, 측도, 비 등의 의미와 관련된 분수 지도가 이루어지고 있지만, 그 지도 방법이나 시기에서 문제점을 내포하고 있다는 것이다. 따라서 이러한 문제점을 현행 교육과정과 교재로부터 분석해 보고, 이러한 문제점을 해결할 수 있는 대안적인 방법으로서 분수의 역사발생 과정을 고려한 지도 방안에 대하여 논할 것이다.

II. 분수에 대한 초등학생들의 이해

분수에 대한 학생들의 이해 실태를 조사하는 여러 선행 연구가 이루어져 왔다. 이 절에서는 여러 연구의 전반적인 결과를 개괄하기보다는, 소성숙(2003)과 권성룡(2003)의 연구를 중심으로, 다소 심도 있는 선행 연구 결과 분석을 시도하고자 한다. 이를 통하여 뒤에서 다루게 될 교육과정 및 교과서 분석과 연계시켜 설명할 것이다.

학생들의 분수 감각에 대한 실태를 분석한 연구로 먼저 소성숙(2003)의 연구를 들 수 있다. 이 연구에서는 초등학교 5, 6학년 학생들의 학년별 분수 감각에 대한 실태에 대하여 다음과 같이 말하고 있다.

> 5, 6학년 학생들의 분수 감각 실태를 조사해본 결과 분수의 의미의 이해를 제외하고는 학년이 올라갈수록 높게 나타남을 알 수 있었다. 그러나 5, 6학년 모두 정답률이 낮게 나타났다. 이는 분수 감각이 낮음을 보여 준다고 할 수 있다. 학생들은 부분-전체 개념은 비교적 잘 알고 있으나 이를 분수의 크기 개념으로 발전시키는 데는 어려움을 겪고 있으며, 분수의 양적인 이해가 매우 부족하였다(소성숙, 2003).

이러한 판단의 근거로 다음의 5개 문항과 학년별 정답률을 먼저 살펴보자.

※ 제시하는 분수만큼 표시해 보시오(1～4)

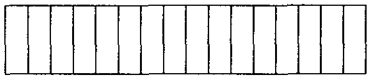
1. $\frac{1}{5}$ 

(5학년 91.3%, 6학년 90.0%)

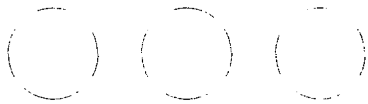
2. $\frac{2}{3}$

○ ○ ○　○ ○ ○
○ ○ ○　○ ○ ○

(5학년 71.3%, 6학년 75.3%)

3. $\frac{3}{4}$ 

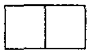
(5학년 90.0%, 6학년 88.0%)

4. $3 \div 4$ 

(5학년 38.7%, 6학년 18.7%)

5. 아래 그림을 보고 (　　) 안에 분수로 나타내시오.

가는 나의 (　　)이다.

가 - 　나 - 

(5학년 68.0%, 6학년 70.7%)

분수의 의미를 나누는 관점 중 하나는 부분과 전체, 측도, 몫, 비, 연산자의 다섯 가지로 나누는 것이며(유현주, 1995; 강지형 외, 1999), 위 연구자는 1번과 2번, 3번에서 연속량 및 이산량에 대한 부분과 전체의 의미, 4번에서 몫의 의미, 5번에서 비의 의미를 의도하고 있다. 위의 결과를 보면 부분-전체와 관련된 1번과 3번의 정답률은 약 90%로 상대적으로 높음을 알 수 있다. 그러나 2번 문항과 같이 이산량에 대한 부분과 전체의 개념에서는 정답률이 약 70% 선으로 다소 낮아진다.

또한, 비의 의미를 묻는 5번 문항의 정답률은 2번보다는 조금 더 낮다. 비에 대한 정의를 배우는 단계는 6-가 단계로서 5학년 학생들은 아직 비를 배운 단계는 아니라고 할 수 있다. 그러나 위의 5번 문항의 상황은 반드시 비를 요구하는 것은 아니며, 그림만 본다면 등분할과 관련된 문제로 해석할 수 있는 여지가 있다. 이러한 점에서 5학년 학생들의 정답률은 6학년과 큰 차이는 없었던 것으로 해석된다.

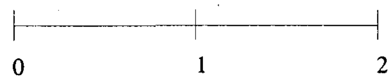
마지막으로 4번 문항의 정답률은 크게 낮다. 더욱이 6학년 학생들의 정답률이 5학년보다도 크게 낮다는 점이 주목할만하다. 사실 엄밀하

게 말하면 4번 문항은 문두에서 밝힌 '제시하는 분수'라는 표현과는 어긋나는 문장을 이용하고 있다. 이로 인하여 학생들의 정답률이 정확한 반응은 아닐 가능성도 있다. 그러나 이 문항의 정답률은 가장 낮을 뿐 아니라 학생들의 오류 유형을 보면 흥미롭다. 소성숙(2003)은 이 문항에 대한 오류 유형으로서 ◕◕◕과 같이 표시하거나 ●◔○과 같이 표시한 학생이 많았으며, 답이 $\frac{3}{4}$임은 알았지만 그림으로 나타내지 못한 학생이 많았다고 말하고 있다. 이는 이 문항이 학생들에게 전반적으로 어려운 문항이었음을 의미하는 것이다.

다음으로 소성숙(2003)의 연구에서 수직선 모델과 관련된 문항 중 2개 문항의 결과를 살펴보자.

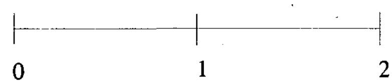
※ 다음 분수를 수직선에 표시해 보시오(6~9)

7. $\frac{3}{4}$



(5학년 52.0%, 6학년 38.7%)

8. $1\frac{1}{3}$



(5학년 62.0%, 6학년 46.7%)

위의 모델은 특히 가분수나 대분수의 크기 비교에서 자주 활용되는 모델이다. 이에 대한 정답률은 그리 높지 않았으며, 위의 4번 문항과 마찬가지로 6학년 학생들의 정답률이 크게 떨어진다. 소성숙(2003)은 위의 7번 문항에 대한 학생들의 오류에 대하여 '위치를 표시하는 데 있어서 1이나 2와 같은 숫자에 유념하지 않고 무조건 1로 보고 분수로 나누는 경향이 많았다'고 해석하고 있다. 또한 전반적인 결과에 대하여 '아동들은 기본적인 개념의 이해보다는 주어진 알고리즘에 맞추어 계산하는 데 높은 성취도를 보였다'고 말한다.

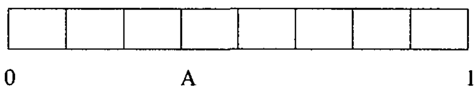
지금까지 살펴본 소성숙(2003)의 연구 결과로부터 알 수 있는 사실은 분수의 여러 의미 중 대부분의 학생들이 비교적 정확하게 인지하고 있는 개념은 등분할과 관련된 부분과 전체의 의미라는 것이다. 또한 이산량의 등분할이나 몫, 비 등의 의미에 대해서는 다소 정답률이 떨어지며, 수직선 모델을 통하여 살펴본 바와 같이, 연속적인 그림 중에서 일부를 전체인 1로 보는 것에는 많은 학생들이 익숙하지 않다는 것을 알 수 있다.

위의 연구에서 나타난 학생들의 분수 개념 이해에 대한 해석 결과는, 초등학생들의 분수 이해도를 살펴본 권성룡(2003)의 연구에서도 유사하게 드러나고 있다. 권성룡(2003)의 연구 문제 중 한 가지는 분수에 대한 학생들의 개념 이미지를 알아보는 것으로, 초등학교 5학년 및 6학년 학생 98명을 대상으로 분수와 분수식을 적용한 다음 이를 적용할 수 있는 상황을 제시하는 능력을 알아보는 연구를 수행하였다. 이러한 문제 중 세 가지는 다음과 같은 것이다.

문제 1. 분수 $\frac{3}{5}$으로 나타낼 수 있는 상황을 3가지 들어보아라.

문제 2. $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}$로 나타낼 수 있는 상황을 3가지 들어보아라.

문제 7. 0에서 A까지의 거리는 얼마인가?



위의 문제 1에 대한 학생들의 반응을 보면 5학년 학생들 33명이 제시할 것으로 기대했던 99가지의 상황 중에서, 부분과 전체의 상황이 41가지(41.4%)였고, 몫의 상황이 4가지(4.0%)였으며, 그 외의 답은 모두 오답이었다. 또한, 6학년 학생들 65명이 제시할 것으로 기대했던 195가지의 상황 중에서, 부분과 전체의 상황이

125가지(64.1%)였고, 몫의 상황이 4가지(2.1%), 측도 상황이 7가지(3.5%), 비의 상황이 2가지(1.0%)였으며, 그 외의 답은 모두 오답이었다(권성룡, 2003). 이러한 결과는 앞에서 살펴본 소성숙(2003)의 연구 결과와 마찬가지로 학생들의 분수 개념이 부분과 전체라는 의미로 상당히 고착되어 있음을 의미한다.

문제 2에 대한 학생들의 반응도 유사하게 나타났다고 한다. 5학년 학생들이 분수의 덧셈을 표현한 상황 중에서 부분과 전체가 36가지(36.4%), 몫이 1가지(1.0%), 측도가 2가지(2.0%)였으며, 그 외의 답은 모두 오답이었다. 6학년 학생들은 부분과 전체가 77가지(39.5%), 몫이 2가지(1.0%), 측도가 6가지(3.1%)였고, 그 외의 답은 모두 오답이었다(권성룡, 2003). 이렇듯 학생들은 분수의 덧셈을 상황으로 나타낼 때에도 부분과 전체에 편중되는 현상을 보이고 있다.

문제 7에 바르게 답한 학생은 45명으로 정답률은 45.9%였다. 이에 대한 대표적인 오답 유형으로 제시한 답은 '3'이라는 것으로, 이를 통하여 권성룡(2003)이 주장하는 것은 문제 상황에서 전체를 제대로 인식하지 못한다는 것이다. 이러한 현상은 위의 문제 7과 유사한 상황에서 중간 구간의 거리를 묻는 다른 문제에서 대표적인 오답으로 '0.3'을 제시하고 있는 것에서도 알 수 있다. 문제 7을 소성숙(2003)의 연구에서 3번 문제의 정답률이 약 90%였던 것과 비교해보면, 두 문제의 상황이 비슷하기는 하지만 소성숙(2003)의 문제 3번은 등분할 문제였음에 비하여, 권성룡(2003)의 문제는 측도의 의미와 관련된 문제라는 점에서 차이를 보인다. 오히려 소성숙(2003)의 연구에서 활용한 문제 7번과 8번이 보다 유사한 문제인 것으로 생각되며, 이렇게 본다면 정답률에서는 큰 차이를 보이지 않는다.

지금까지 살펴본 두 가지 선행 연구의 결과를 통하여 알 수 있는 점은 많은 학생들의 분수 의미가 부분과 전체의 의미에 편중되어 있으며, 그 외의 다른 의미는 잘 모르거나 잘 이용하려고 하지 않는 경향이 있다는 것이다. 또한 이러한 부분과 전체의 의미가 분수의 덧셈에까지 영향을 주고 있으며, 수직선을 이용한 모델이나 다른 모델을 이용하는 것에는 다소 이해도가 떨어진다는 점이다. 학생들에 대한 연구로부터 드러나는 이러한 결과는 현재 우리가 택하고 있는 접근 방법에서 비롯된다는 것이 본 연구에서 조사하고자 하는 문제점 중 하나이며, 앞으로의 논의를 통하여 이를 밝혀나갈 것이다.

III. 분수 지도에 관한 교재 분석

제 II장에서 학생들이 분수에 대하여 이해하고 있는 실태를 조사하는 두 가지 선행 연구의 결과를 분석하였다. 이 장에서는 제 7차 교육과정의 교재를 중심으로 지금 학교수학에서 다루고 있는 분수 지도 방법에 대한 분석을 통하여, 제 II장에서 살펴본 학생들의 오류가 상당부분 현재 우리가 채택하고 있는 접근 방법과 관련되어 있다는 점을 논의하고자 한다.

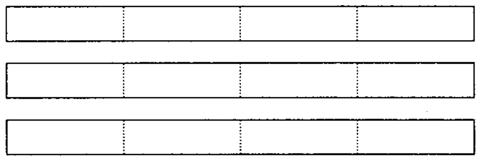
1. 교재에서 다루는 분수 지도 방법

현행 제 7차 교육과정의 교재에서는 3-가 단계에서 직사각형이나 원과 같은 평면도형을 이용하여 연속적인 양에 대한 부분과 전체의 의미에서 분수의 개념을 처음 도입하고 있다(교육인적자원부, 2001a). 이러한 맥락은 유현주(1995)가 지적하고 있는 바와 같이 등분할이라는 연산자의 의미를 적용한 것으로 해석할 수도 있을 것이다. 이어지는 3-나 단계에서는 빵

6개를 세 사람이 똑같이 나누어 먹는 상황을 통하여 6의 $\frac{1}{3}$은 2개임을 지도하고 있다(교육인적자원부, 2001b). 이는 이산량에 대한 부분과 전체라는 맥락에서 보아야 할 것이다. 위의 상황을 몫의 맥락에서 볼 수도 있을 것이나, 몫의 맥락은 주로 '3개의 사과를 4명이 똑같이 나누어 먹으면 $\frac{3}{4}$개'와 같이 똑같이 나눈 결과로서 분수값을 구하는 것이다. 하지만, 위의 상황은 빵 6개를 3명이 똑같이 나눈 몫이 2개라는 것보다는 빵 2개는 빵 6개의 $\frac{1}{3}$이라는 의미가 강하므로 부분과 전체의 의미로 보는 것이 타당할 것이다.

4-가 단계에서는 3-나 단계에서와 유사하게 부분과 전체라는 맥락에서 8은 20의 $\frac{2}{5}$임을 지도한다(교육인적자원부, 2001c). 3-나 단계에서는 이산량만을 다루었던 반면, 4-가 단계에서는 이산량과 함께 분수 막대나 눈금이 표시된 자와 같이 눈금이 표시된 연속적인 양을 같이 다룬다는 점이 차이가 있다. 또한 등분할 된 여러 개의 평면도형을 이용하여 가분수 $\frac{5}{4}$와 대분수 $2\frac{1}{4}$의 의미를 지도하고 있다. 이렇듯 가분수와 대분수를 도입하는 상황은 평면도형의 등분할에 기초하고 있지만, 한 개의 정사각형을 단위로 한 측정으로 볼 수 있다는 점에서 분수에 대한 측도의 의미와도 관련이 있는 것으로 파악된다.

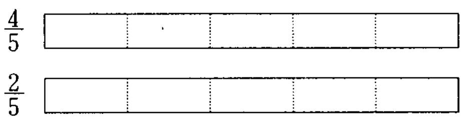
4-나 단계에서는 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내는 비의 맥락에서 분수 개념을 지도하고 있다. 이산량과 연속량에 대하여 이를테면 파란 색연필 6자루를 기준으로 하여 빨간 색연필 2자루를 비교할 때, 2자루는 6자루의 얼마인지를 묻고 있다(교육인적자원부, 2001d). 4-가 단계까지의 분수 개념에서는 한 가지 양에 대하여 분수 개념을 다루었던 반면, 이 단계에서는 두 가지 다른 양을 비교한다는 점에서 차이가 있으며, 이것이 비의 맥락에서 분수 개념의 핵심 요소라고 할 수 있을 것이다. 또한, 4-나 단계에서는 (자연수)÷(자연수)를 분수로 나타내는 활동을 통하여 몫의 맥락에서 분수를 지도한다. 문제 상황은 1m짜리 색 테이프 3개를 주고서, 3m짜리 색 테이프를 네 사람이 똑같이 나누어 가질 때 한 사람이 가지는 색 테이프의 길이를 구하는 것이다(교육인적자원부, 2001d).



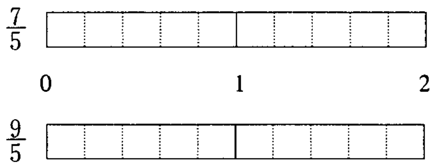
0 1

지금까지 살펴본 바와 같이 현행 제 7차 교육과정에서 활용하고 있는 교재에서는 3-가 단계에서 평면도형의 등분할, 3-나 단계에서 이산량의 등분할, 4-가 단계에서 이산량 및 연속량의 등분할, 4-나 단계에서 비와 몫의 의미에 따라 분수 개념을 도입하고 있으며, 추가적으로 4-가 단계에서 평면도형의 등분할과 측도의 의미에 기초하여 가분수와 대분수를 도입하고 있다.

한편 분수의 대소 비교는 3-나 단계에서 처음 이루어진다. 주어진 분수만큼 색종이를 잘라 비교해 보는 활동 후에 다음 그림과 같은 분수 막대에 색칠해 보게 함으로써 통하여 $\frac{4}{5}$와 $\frac{2}{5}$ 중 어느 것이 큰지 비교해 보게 하고 있다(교육인적자원부, 2001b).

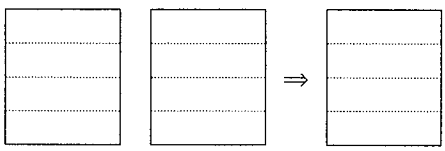


또한 4-가 단계에서는 분모가 같은 가분수끼리 또는 대분수끼리 크기 비교를 지도하고 있으며, 가분수의 크기 비교는 다음 그림과 같은 분수띠를 활용한다(교육인적자원부, 2001c).



이렇듯 크기 관계를 지도하는 상황에서 분수는 대부분 등분할 된 막대라는 모델을 이용하여 다루어진다. 첫째로 본 진분수의 크기 비교에서 특징적인 것은 위의 그림과 같이 동일한 전체에 대한 크기를 이용한다는 점이다. 또한 가분수를 지도하는 상황에서 이 전체가 하나의 기준 길이인 단위가 되어 가분수나 대분수를 표현하는 역할을 하게 된다.

또한 4-가 단계부터 시작되는 분수의 계산은 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 지도하는 것으로 시작된다. 이 중 분수의 덧셈은 다음과 같은 그림을 이용하여 $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$를 지도하는 것으로 예를 들고 있다(교육인적자원부, 2001c). 이러한 그림은 처음에 아동들에게 분수를 도입할 때 이용되었던 등분할 된 직사각형 모델인 것이다.



2. 교재의 분수 지도 방법 분석

앞서 살펴본 분수 지도의 맥락을 유현주(1995)가 제시하고 있는 유리수의 개념적 관계망과 학습 수준에 비추어 해석해 보고자 한다. 유현주(1995)는 유리수 체를 최종 수준인 제 4수준으로 설정한 다음 이에 이르는 하위 수준을 제시하고 있는 바, 부분과 전체, 몫, 측도의 의미에서 분수 개념은 제 2수준의 양적인 동치 관계를 위한 제 1수준에 해당하는 것으로, 비의 의미로서의 분수 개념은 제 2수준의 구조적인 동치 관계를 위한 제 1수준에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 또한 이러한 양적인 동치 관계와 구조적인 동치 관계를 통하여 형성되는 것은 직관적인 유리수 개념이며, 이를 제 3수준에서 비 동치 관계라는 형식적인 유리수의 개념으로 발전시켜 가게 된다. 그리고 유현주(1995)는 제 6차 교육과정기의 교재에 대한 분석을 통하여, 분수를 지도하는 맥락이 장차 비 동치 관계라는 비 개념의 본질을 파악하도록 구성되어 있지 못하다고 지적하고 있다.

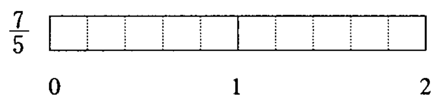
본 연구에서 분석한 제 7차 교육과정의 교재는 분수의 다양한 의미에 대한 도입의 시기에서는 제 6차 교육과정의 교재에 비하여 전반적으로 늦추어졌다는 점에서 차이점이 있지만, 각각의 의미에 대하여 지도할 때 이용하는 모델에 있어서는 큰 변화가 없는 것으로 파악된다. 이러한 점에서 위에서 유현주(1995)가 지적한 바와 같이, 제 7차 교육과정에서 6-가 단계에 도입하고 있는 비 개념을 위한 하위 수준의 활동으로서 위에서 살펴본 분수 지도 방법은 비 동치 관계를 파악하는 방향으로 적절히 구성되어 있는 것은 아니라고 생각해 볼 수 있을 것이다.

특히 유현주(1995)는 다양한 의미의 분수가 도입되기는 하지만, 분수의 크기 비교나 연산을 다룰 때 부분과 전체라는 맥락을 주로 이용하고, 특히 계산 상황에서는 대단히 제한적으로 이용되기 때문에, 비 동치 관계 파악이라는

측면에서는 이것이 장애가 된다고 보고 있는 것이다. 이러한 상황은 제 7차 교육과정에서도 변하지 않았다고 생각된다. 앞에서 살펴본 바와 같이, 분수의 크기 비교를 지도하는 상황에서 이용되는 모델은 주로 등분할된 직사각형이나 분수띠로 제한되어 있으며, 이러한 현상은 연산에서도 비슷하게 나타나기 때문이다.

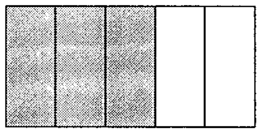
또한 이는 제 Ⅱ장에서 살펴본 초등학교 학생들의 분수 감각에서 부분과 전체라는 의미와 관련된 문제에 대한 정답률은 높았지만 분수의 다른 의미에 대한 정답률이 낮았던 원인을 설명해 주는 것으로 해석된다. 학생들이 처음 분수 개념을 접할 때 갖는 분수에 대한 개념 이미지는 등분할되어 있는 평면도형의 일부 도형이며, 학년이 올라가면서 다양한 의미의 분수를 접하기는 하지만, 분수의 크기 비교나 연산 과정에서는 다시 부분과 전체라는 의미를 갖는 모델을 중점적으로 다루게 된다는 데 그 원인이 있다고 볼 수 있다.

여기서 한 가지 중요하게 다루고 싶은 내용이 앞에서 살펴보았던 가분수 지도 모델 중 하나이다.



위의 모델은 0에서 1까지만 놓고 보면 부분과 전체의 의미에서 등분할 된 것으로 볼 수 있지만, 그림에서 전체는 '2'라는 점에서 부분과 전체의 해석보다는 측도의 의미로 해석해야 한다. 이 점에서 위의 모델은 제 7차 교육과정의 교재에서 자주 활용되는 모델 중 하나인 수직선 모델과 공통점을 지니고 있다. 그러나 앞서 살펴본 소성숙(2003)의 연구를 보면 수직선 모델에서 진분수나 대분수를 표시하는 문제의 정답률은 약 40~60%로서 등분할 상황에 대한 정답률보다는 크게 낮다. 또한 6학년의 정답률이 5학년보다 약 15% 정도 낮다는 점도 특기할 만 하다. 이에 대한 논의를 위하여 다음에 제시되는 예를 살펴보자.

Smith(2002)는 다음 그림이 음영 부분과 관련하여 나타내는 분수는, 비교하는 두 양을 어떻게 보는지에 따라서 $\frac{3}{5}$과 $1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$가 될 수 있음을 지적한다. 여기서 세 가지 분수는 각각 부분과 전체, 측도, 비의 의미로 해석한 것이다.[2)]



위 그림을 다양한 분수로 해석할 수 있는 것은 분수는 본질적으로 비 동치 관계라는 상대성이 있는 개념이기 때문이다. 이 점에서 위에서 언급한 가분수 지도 모델은 이렇듯 분수 개념을 상대성이 있는 개념으로 파악하여, 전체 모델이 '1'이 아닌 '2'를 나타내는 것으로 학생들이 파악해주기를 의도하고 있는 것이다. 그러나 연구 결과에서 보여주는 것은 위와 같은 상황에서 학생들이 전체를 '1'로 보는 경향이 강하다는 것이다.

이제 교재에서 지도하는 과정과 학생들의 결과를 순서대로 정리해보면 다음과 같이 정리해 볼 수 있다. 학생들은 처음에 분수를 학습하면서 부분과 전체의 의미에서 등분할 된 평면 도형의 일부라는 개념 이미지를 가지며, 여기서 갖는 개념 이미지는 적어도 진분수의 크기 비

2 두 번째 분수인 $1\frac{1}{2}$는 음영이 없는 부분을 기준 단위로 본 측정값이며, 세 번째 분수인 $\frac{2}{3}$는 음영 부분에 대한 음영이 없는 부분의 크기를 나타낸다.

교나 계산에서 지속적으로 이용되므로 학생들에게 깊이 각인되어 있다. 이산량의 등분할을 다루면서 전체는 평면도형이 아니라 이산적인 양이 모여 있는 것이 될 수 있다는 쪽으로 개념 이미지가 확장되게 된다. 학생들이 다음에 학습하게 되는 몫으로서의 분수나 비로서의 분수는 전체 중에서 일부를 생각하는 것이 아니라는 점에서, 처음에 가졌던 개념 이미지와는 다르다. 그리고 크기 비교나 계산을 다루면서 진분수와 관련된 상황에서는 등분할이라는 개념 이미지와 일치하며, 가분수나 대분수와 관련된 상황에서는 측도라는 의미를 요구하므로 다시 원래 가진 개념 이미지와 다르게 된다. 이렇듯 서로 다른 의미의 분수에 대한 개념 이미지는 비 동치 관계라는 하나의 개념 이미지로 통합하여야 하지만, 이를 위한 충분한 지도가 이루어지지 못하고 있으며, 그런 상황에서 분수의 사칙 계산을 학습하면서 알고리즘적으로 분수를 다루는 데 익숙해지게 된다.

그렇다면 여기서 생각해 볼 수 있는 건전한 교육적 방안은 비 동치 관계라는 개념 이미지를 보다 확고히 지도할 수 있는 교재를 구성하거나, 아니면 이러한 개념 이미지를 갖게 하는 일을 보다 뒤로 미루고 대안적인 방법을 모색해 보는 것이다. 여기서 아동들의 비례적 사고의 발달 단계에 대한 Piaget(1977, 유현주, 1995에서 재인용)의 연구를 살펴보자. 이 연구에 의하면 아동들이 관계를 수량화할 때 최초의 형태는 가법적인 단계로 나타난다고 한다. 예를 들면, 이 단계의 아동은 25km를 가는 데 20분이 남아 있다면 15km를 가는 데 10분이 남아 있다고 생각한다.[3] 이보다 발전된 단계는 보다 발전된 가법적인 전략을 사용하여 각 대상간의 차이가 일정하다는 생각은 하지 않으며, 차이가 수의 크기에 따라 변화한다는 직관은 갖고 있지만 그것이 점차 증가하는 차이라는 것을 고려할 필요는 인식하지 못하는 단계이다. 최종 단계에 가서야 아동들은 '비례성'의 개념을 획득하게 된다. 유현주(1995)에 따르면 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 이행하는 시기에도 이러한 비례성은 획득되기 어렵다고 한다.

이러한 이유로 학생들에게 비 동치 관계로 장차 정리될 다양한 의미의 분수를 지도하는 것이 초등학교에서 적절한지에 대한 검토가 필요하게 된다. 특히 현행 교육과정에서와 같이 분수의 개념과 덧셈, 뺄셈을 비 학습 이전에 지도해야 하는 상황에서는 이를 더욱 신중히 검토할 필요가 있다. 왜냐하면, 분수의 덧셈과 뺄셈을 설명하기 위해서는 전체를 일정하게 고정하는 것을 전제로 하여 부분과 전체의 의미나 측도의 의미를 이용하는 것이 가장 자연스럽기 때문이다.

여기서 분수의 역사발생적 과정을 살펴보는 것은 분수 지도를 위한 아이디어를 제공할 수 있는 가능성이 있다. 역사 발생적 방법이 일반적인 교수학적 구상으로 드러난 것은 19세기에 들어와 Lindner에 의해서였으며, 19세기 후반에 Haeckel이 형식화 한 소위 '재현의 법칙'이 19세기 말 일반적인 발달 관념이 되면서 역사 발생적 원리에 따른 지도 방법은 19세기 말 독일에서 Herbart를 중심으로 교육학의 기본 원리가 되었다(우정호, 2000). 특히 역사 발생적 원리는 오늘날 Freudenthal(1991)이 '안내된 재발명' 과정을 통한 수학화 학습 지도론의 배경을 이루고 있을 뿐 아니라, Brousseau(1997)가 주장한 수학 교수학적 상황론을 우정호(2000)는 '기성의 이론적인 수학적 지식을 곧바로 가르치는 데에서 비롯되는 형식적 고착의 문제를 해소하

3) 이 사례는 본 연구자가 실제로 어느 초등학교 1학년 학생과 대화를 나누던 중 경험한 예이다.

고 이해를 위한 교육'을 하려는 시도로 해석하고 있다. 이렇듯 오늘날 역사발생적 원리는 중요한 교수학적 접근 원리로 주목받고 있으므로, 본 연구에서는 분수의 역사 발생 과정을 살펴보아 이를 분수 지도에서 활용할 수 있는 방안을 모색해 보고자 한다.

IV. 분수 발생의 역사적 과정

이 장에서는 분수 발생의 역사적 과정에 대하여 살펴볼 것이다. 먼저 여러 수학사 책을 참조하여 고대에 이용된 분수의 흔적을 추적해 보고, 역사적 과정에 대한 논의를 전개할 것이다.

1. 분수의 발달 과정

분수는 지금까지 발견된 가장 오래된 역사적 기록에서도 나타나지만, 고대에는 분수에 대한 일반화된 접근 방법을 발전시키지는 못했으며, 몇 가지 제한을 두고서 특별한 방법을 이용하였다. 바빌로니아에서는 기원전 2000년경부터 분수를 이용하였는데, 오늘날의 소수 표기와 유사한 자리값 체계를 이용하였다(NCTM, 1989).

대부분의 수학사 서적에서 분수의 역사를 다룰 때 언급하는 내용이 이집트의 분수 이용에 대한 것이다. 이집트에서 분수를 사용한 흔적은 기원전 1650년경으로 추정되는 린드(Rind) 파피루스에서 나타나고 있으며, 여기서 나타나는 분수의 특징은 단위 분수를 매우 체계적으로 다루고 있다는 것이다(Wilder, 1968; NCTM, 1989; Eves, 1995). 이집트인들은 $\frac{2}{3}$ 이외의 분수 중 하나의 단위 분수로 표현할 수 없는 경우에는 단위 분수의 합을 이용하여 나타내었으며, 합에 대한 기호는 '+' 대신 빈칸을 이용하였다. 예를 들어 $\frac{2}{35}$는 $\frac{1}{30}\ \frac{1}{42}$와 같은 식으로 나타내었다.

고대 그리스에서는 분수를 나타낼 때 이집트인들이 사용한 방법을 받아들여 단위 분수를 이용하여 표현하였다고 한다(Wilder, 1968). 그리고, 로마에서는 화폐 계산과 도량형을 나타내면서 분수를 자주 이용하였다고 한다(NCTM, 1989). 로마의 분수의 한 가지 특징은 대개의 경우 12를 분모로 고정하여 나타내는 경향이 있었다는 것으로, 이는 오늘날 유럽에서의 단위가 주로 12진법 체계로 이루어진 것의 뿌리가 된다. 오늘날 우리가 활용하고 있는 분수 표현의 기원은 인도에서 찾을 수 있다고 한다(NCTM, 1989). 인도에서는 오늘날 분수 표현과 유사하게 분모와 분자를 이용하여 표현하였으며, 차이점은 중간에 '—' 기호를 쓰지 않았다는 것이다.

이렇듯 분수는 매우 오랜 고대로부터 사용되었고, 인류의 역사가 진행되면서 늘 중요하게 활용되어 왔음을 알 수 있다. 그러나 위에서 언급한 내용은 주로 분수의 표현에 대한 것으로 여러 종류의 수학사 관련 서적에서 다루고 있는 내용이지만, 분수 지도에서 의미 있는 내용을 알기 위해서는 유현주(1995)가 제시한 분수의 다섯 가지 측면과 관련하여 분수의 발생 과정을 조사할 필요가 있다. 다음 절에서 이러한 발생 과정을 살펴보고 분수 학습과 관련된 논의를 전개하고자 한다.

2. 분수 발생 과정과 논의

분수는 어디서부터 생겨났는가? 이 문제는 명확히 답하기 어려운 문제일 수도 있다. 왜냐하면 위의 절에서 살펴본 것처럼 분수는 역사가 명확히 기록되기 훨씬 이전부터 사용되었기 때문이다. 이집트의 파피루스를 통하여 이집트

에서 분수를 어떻게 활용하였는지를 알 수 있지만 기록이 없는 더 오랜 과거에 분수를 이용하였는지에 대하여 현재로서는 알 수가 없다. 따라서 본 연구에서는 문헌에 제시된 근거 자료와 이에 대한 연구자의 논의를 더하여 분수의 발생 과정을 살펴보고자 한다.

안재구(2000)에 의하면 이집트 수학에서 분수는 측량에서 비롯되었으며, 초기에 계기를 제공한 것은 밭의 넓이를 몇 개로 나누는 상황이다. 고대 이집트의 넓이 단위로 많이 활용된 것은 1 '세타트'였으며, 이를 나누는 상황을 표현할 필요성이 분수를 낳았다는 것이다. 처음에 이용된 분수는 2의 거듭제곱인 수를 분모로 하는 단위분수인 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ 였으며, 이를 나타내기 위한 특별한 기호를 만들어 사용하였다고 한다. 그 후에 분수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$가 생겼고, 이후에 $\frac{1}{n}$ 모양의 단위분수가 연구되었다고 한다.

본 연구자는 분수가 이렇듯 측정 상황에서의 필요성 때문에 발생되었다는 생각이 매우 설득력이 있다고 생각한다. 우정호(2000)는 '역사적으로 보면 중요한 수학적인 개념이나 연산이나 정리 등은 현실적인 상황에 의해서 암시되었으며, 수학은 실제 세계에 대한 경험으로부터 발생하였다'고 주장한다. 그렇다면 분수의 여러 의미 중 측정 상황에서 분수를 이용해야 하는 현실적인 필연성이 존재한다고 생각된다. 측정의 기본적인 아이디어는 단위를 이용하여 단위의 몇 배로 값을 나타내는 것이다. 이 때 주어진 단위의 자연수 배로 나타나지 않는 대상이 있을 때 두 가지 방법을 선택할 수 있다. 하나는 주어진 단위를 더 작은 단위로 바꾸어 자연수로 나타내는 것이고, 다른 하나는 자연수가 아닌 다른 표기 방법을 만들어내는 것이다. 예를 들어 1cm를 단위로 한다면 길이가 5.3cm인 대상은 자연수로 그 값을 나타낼 수 없다. 이 때 1mm를 단위로 한다면 53mm와 같이 자연수로 나타낼 수 있으며, 그렇지 않다면 $5\frac{3}{10}$과 같은 새로운 표현을 생각해야 한다는 것이다. 이러한 두 가지 방법 중에서 인류가 먼저 생각한 방법은 첫 번째 방법일 가능성이 많아 보인다. 왜냐하면 존재하지 않는 어떤 새로운 표현을 생각하는 것보다는 기존의 표현을 활용하고자 하는 다소 보수적인 경향이 먼저 작용할 것이기 때문이다.

그러나 단위를 적게 하는 것은 곧바로 큰 불편함에 부딪히게 된다. 왜냐하면 단위를 아무리 적게 하더라도 그 단위의 자연수배로 나타낼 수 없는 양이 항상 존재하기 때문이다. 또한 단위를 적게 할수록 생활에서 경험하게 되는 보편적인 양의 크기를 나타내는 수가 커진다는 것이 불편한 요소로 작용할 수 있다. 이를테면 1m를 nm 단위로 나타낸다면 10^9nm가 된다는 것이다. 이러한 불편함으로 인하여 역사의 어느 시점에선가 인류는 새로운 표현을 고안하게 되었을 것이라고 생각되는 것이다.

이렇듯 단위를 정하고 새로운 수 표현으로서 분수를 이용하게 되었다는 것은 이후에 이루어진 여러 수학적 정의에서도 그 개연성을 찾아볼 수 있다. Euclid의 원론 제 7권에서는 수를 '단위로 구성되는 크기'라고 정의하고 있다 (Adler, 1990; Lasserre, 1964). 이는 단위를 고정하고 전체 양을 나타낸다는 생각이 오래 전부터 수학에 자리잡고 있었음을 보여 주는 것이라고 생각된다. 또한 이러한 생각이 발달하여 고대 그리스에 와서 형식화 된 것이 'G의 임의의 원소 c, d에 대하여, $d < r \cdot c$, $d > s \cdot c$인 양의 유리수 r, s가 존재한다'는 Archimedes의 '측정의 공리'인 것으로 생각된다.

이렇듯 측정 상황에서 분수로 표현하는 과정에서 등분할의 필요성이 제기된 것으로 보인

다. 가장 간단한 등분할은 2등분하는 것이며 그 다음은 4등분하는 것이다. 이집트에서 초기의 분수가 2의 거듭제곱인 수를 분모로 하는 것으로 발달했다는 사실은 그 만큼 이러한 분수가 자연스러운 사고 과정의 산물이었음을 말해 주는 것이다. 그러나 등분할이 필요한 상황이 되었을 때 중국에서는 곧바로 10등분한다는 방향으로 사고가 이루어졌던 것으로 보이는데, 이는 지금 우리 나라에서도 이용하고 있는 할, 푼, 리 등의 단어가 오래 전부터 중국에서 활용되었다는 사실 때문이다.

인류에게 측정 상황으로부터 분수가 자연스럽게 생겨났다는 점은 분수 지도에서도 그대로 반영될 수 있음을 주장하는 이론이 역사발생적 원리이다. 특히 초등수학은 실제적인 상황으로부터 발생하였으므로 그와 대등한 실제 상황을 이용하여 수학에 의미를 부여하고 학습 동기를 유발할 수 있다는 점에서(우정호, 2000), 분수 지도에서 역사발생적 접근 방법은 고려할 가치가 있는 것이다.

V. 역사발생 과정에 따른 분수 지도 방안

앞에서 살펴본 바와 같이 분수의 발생 과정은 측정에서 유래했을 것으로 보는 것이 상당히 개연성이 있을 것이다. 따라서 역사발생 과정에 따라 분수를 지도하는 것은 측정에서 출발하는 것이 될 것이다. 측정으로부터 분수의 도입을 주장한 이론으로 Dewey의 산술교육론을 들 수 있다. 그래서 이 장에서는 이에 대하여 먼저 알아보고, 이 방법을 분석함으로써 우리나라 교육과정에서 적용가능한 분수 지도 방안을 모색해 보기로 한다.

1. Dewey의 산술교육론에 따른 분수 지도

Dewey의 산술교육론은 측정에 기초한 이론이라고 할 수 있다. 강홍규(2003)는 Dewey의 산술교육론을 '구성적 활동의 방법'이라 부르면서 그 구체적인 과정은 모호한 전체, 전체를 구성하는 데 도움이 되는 부분으로서의 단위, 측정의 과정을 통한 수 값의 결정의 세 단계로 이루어진다고 본다. 특히 Dewey는 기존의 자연수 개념 지도에서 고정된 단위를 이용한 방법에 문제를 제기하면서 자연수 개념 역시 단위를 이용한 측정의 과정에 따라 지도할 것을 주장하였다. Dewey가 주장한 분수 지도 방법을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

Dewey는 '수를 구성하는 기본적인 심리적 과정에서, 모호한 전체 양은 그것을 부분으로 나누고 그 부분들을 셈으로써 분명하게 된다'고 주장하면서, 이러한 본질이 분수의 과정이라고 말한다(McLellan & Dewey, 1896). 예를 들어, $\frac{4}{10}$달러, $\frac{5}{12}$피트, $\frac{9}{16}$파운드에서 측정의 단위는 명확히 정의되며, 이들 표현 각각은 측정의 실제 단위가 유도되는 기준, 이 단위가 기준 단위로부터 유도되는 방법, 유도된 단위에 대한 절대적인 양 등을 나타낸다는 것이다. $\frac{9}{16}$파운드에서 기준 단위는 1파운드이며, 이를 16개로 등분할 함으로써 $\frac{1}{16}$파운드라는 측정의 단위를 제공하며, 이를 단위로 측정할 때 9개라는 의미이다.

이러한 Dewey의 방법에 따르면 분모가 다른 분수의 크기 비교는 공통 측정 단위를 이용하여 설명할 수 있다. 예를 들어 \$$\frac{3}{4}$와 \$$\frac{4}{5}$는 명확히 비교될 수 없지만 공통 측정 단위를 이용하면 \$$\frac{15}{20}$와 \$$\frac{16}{20}$으로 표현되며, \$$\frac{1}{20}$이라는 단위가 15개와 16개가 있다는 것으로 해석이

가능하다. 또한 이와 유사한 방법으로 분모가 같거나 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 해석하여 설명할 수 있다.

한편 분수의 곱셈에 대하여 Dewey는 다음과 같이 설명한다. 분수와 자연수의 곱셈은 자연수끼리의 곱셈과 마찬가지로 동수 누가로 해석이 가능하며, 문제는 승수가 분수인 곱셈일 것이다. Dewey는 측정된 양으로서의 $\$\frac{3}{4}\times 12$는 $\$12\times\frac{3}{4}$와 동일하다고 주장한다. 왜냐하면, $\$\frac{3}{4}\times 12$는 $\$\frac{3}{4}$를 12번 더한 것인데, 이는 $1의 $\frac{3}{4}$이 12개 있는 것으로 해석할 수 있고, 결과적으로 $12의 $\frac{3}{4}$이 되기 때문이다. 분수끼리의 곱셈도 유사하게 해석할 수 있다. 예를 들어 $\$\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}$는 $\$\frac{3}{4}$의 4배를 9로 나누거나, $\$\frac{3}{4}$의 $\frac{1}{9}$을 4배하는 것으로 볼 수 있다는 것이다. 분수의 나눗셈은 현행 교육과정에서도 측정 상황을 활용하여 분모가 같은 분수의 나눗셈으로 고친 다음 그 결과가 분자인 자연수끼리 나눈 것과 같다는 원리를 이용하고 있다는 점에서 기본적인 생각은 Dewey의 것과 유사하다.

이러한 Dewey의 교육론에 대하여 Fine은 '분수의 경우에는 그 본원적 기능이 측정임이 의심할 여지가 없고, 또 많은 사람들이 측정 의미 이외에는 별다른 의미를 붙이지 않기 때문에 분수의 분석과 지도법에 관해서는 타당하다고 볼 수 있으나, 산술의 이차적 개념인 분수가 측정적이라고 해서 산술의 본원적 개념인 자연수 또한 측정적이라는 결론을 이끌어 낼 아무런 이유가 없으며 측정과의 연합 없이 분수 개념을 이해시키기가 거의 불가능하다고 해서 자연수에 대해서도 동일한 도움이 필요하다고 주장할 수는 없다'고 하면서 비판을 제기하고 있다(강흥규, 2003에서 재인용). 이러한 Fine의 비판에서 알 수 있는 것은 Dewey의 자연수 지도 방법에 대해서는 비판을 제기하지만, 상대적으로 분수 지도 방법에 대해서는 그 가치를 인정하고 있다는 것이다. 특히 이는 현재 우리나라에서 자연수에 대하여 Dewey가 주장한 측정에 의한 방법을 이용하고 있지 않는 것과 관련이 되거니와, 본 논문에서 자연수까지 측정으로 지도하자고 주장하는 것은 아닌 이유가 된다.

사실 Dewey가 주장하고 있는 측정에 의한 분수 지도 방법은 단위가 늘 가변적일 수 있다는 데에 그 본질이 있다. 단위에 따라서 전체를 나타내는 값이 달라질 수 있다는 것이다. 그러나 이러한 방법은 현재 우리나라에서 자연수를 측정과 무관하게 지도하고 있는 점을 고려할 때 일관성이 부족할 수 있다. 특히 제 II 장에서 살펴본 바와 같이 많은 학생들이 분수 개념에 대하여 다양한 측면을 잘 이해하지 못하고 있다는 점을 감안한다면, 가변적인 단위를 강조하는 것은 적절하지 않다고 본다. 그래서 본 고에서는 분수의 역사발생 과정에 따르는 지도 방법으로서 단위를 고정한 상황에서 측정을 통한 방법을 제안하고자 한다.

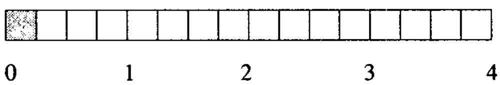
2. 역사발생 과정에 따른 분수 지도 방법

역사발생 과정을 고려하여 측정과 관련지어 분수를 지도하는 방법을 제시하기에 앞서 우선적으로 고려할 문제가 있다. 그것은 분수 개념을 현재와 같이 3학년 또는 4학년 정도에서 다룰 것인가, 아니면 분수를 도입하는 시기를 다소 늦출 것인가의 문제이다. 제 7차 교육과정기로 접어들면서 분수 개념은 한 학년 늦추어져 3학년에 도입되고 있으나, 이에 대하여 학생들의 이해가 만족스럽지 못하다는 점을 감안하면 위와 같은 문제가 제기될 수 있다고 보는

것이다. 본 연구에서 관심을 갖는 것은 현재의 교육과정과 같이 3학년 정도부터 분수 개념을 도입한다고 했을 때 현재의 방법에 대한 대안적인 방법을 모색하는 것이며, 이러한 방법을 탐색하는 과정에서 역사발생적 과정을 고려하게 된 것이다. 따라서 본 연구에서 주장하는 방법은 이러한 것을 전제한 것임을 미리 밝혀두고자 한다.

고대 이집트에서 분수가 처음 발생한 상황은 단위 넓이를 분할하는 상황이었다. 그러나 정확한 넓이 개념은 현행 교육과정에서도 5학년에서 도입되거니와 학생들에게 이른 시기에 요구하기 어려운 개념이므로, 본 연구에서는 길이를 통하여 분수를 도입할 것을 주장하고자 한다.

이를 위하여 먼저 등분할 개념을 이용하여 지도하되, 부분과 전체라는 아이디어는 지나치게 강조하지 않는다. 또한 다양한 도형을 이용하는 대신 분수의 크기 비교와 계산까지 일관되게 활용될 모델로서 긴 직사각형 모델을 이용한다. 그래서 다음과 같은 그림을 이용하여 차례대로 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 등의 분수를 지도한다. 그림은 $\frac{1}{4}$을 보여 준다.



여기서 주의할 것은 등분할의 아이디어를 이용하기는 하지만 1을 전체로 간주하지 않는다는 것이며, 이 점이 측정의 의미로서의 분수를 강조하는 맥락이다. 또한 이 모델을 가능한 한 변화시키지 않는다. 그러면 이 모델을 이용하여 가분수와 대분수의 개념, 나아가 크기가 같은 분수의 크기 비교 및 덧셈과 뺄셈을 자연스럽게 지도할 수 있을 것으로 생각된다. 또한 현재 교과서에서도 채택하고 있는 모델 중의 하나이지만, 분모가 다른 두 분수의 크기 비교와 덧셈 및 뺄셈을 지도할 때에는 위의 모델에서 0과 1 사이의 구간을 공통분모만큼 등분하여 자연스럽게 지도할 수 있을 것이다.

그러나 위의 모델은 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도할 때에는 한계점을 지닌다. 위 모델로 일관되게 설명할 수 있는 것은 분수×자연수와 분수÷자연수까지이며, 각각 동수누가와 등분제의 개념과 연관하여 설명할 수 있다. 그러나 분수×분수는 위의 모델로는 설명하지 못한다. 그 이유를 살펴보기 위해 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$를 예로 들어보자. 이를 위 모델과 연결하기 위해서는 먼저 $\frac{2}{3}$을 표시한 다음, 이를 전체로 보아 $\frac{1}{2}$이 얼마 만큼인지 구해야 한다. 따라서 지금까지는 전체를 강조하지 않거나 필요한 경우 고정된 1이 전체가 되었음에 비하여 일부분을 전체로 보아야 하는 상황이 발생하는 것이다.

따라서 분수×분수를 지도하기 위해서는 임의적인 전체에 대한 부분과 전체로서 분수를 보게 하는 보완적인 지도 과정이 필요할 것으로 생각된다. 이렇게 한다면 위와 같은 방법으로 분수끼리의 곱셈을 지도할 수 있을 것이다. 그러나 이렇게 지도한다면 지도 시기는 학생들이 비 개념을 획득한 시기 이후가 되어야 할 것이다. 또한 부분과 전체의 의미로서 분수 개념을 학생들이 가지고 있다면, 현행 교재에서 채택하고 있는 것과 유사하게 직사각형의 가로와 세로의 길이로서 두 분수를 준 다음 그 넓이를 구하게 하는 것을 이용할 수도 있다. 이때 부분과 전체의 개념이 필요한 것은 직사각형의 넓이를 분수로 나타낼 때이다.

또한 분수÷분수를 지도할 때에도 학생들의 비례적 추론 능력이 기본적으로 수반되어야 하므로, 학생들에게 비 개념이 형성된 후에 지도

하는 것이 바람직할 것이다. 왜냐하면, 분수끼리의 나눗셈에서 모델을 활용하는 아이디어는 현행 교재에서처럼 $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6}$이 5÷2와 같다는 것을 아는 것이며, 이는 비례적 추론과 연관된다.

결과적으로 본 연구를 통하여 주장하고자 하는 것은 학생들의 비 개념이 형성되기 이전에 분수와 관련된 내용을 지도한다면 측정 과정의 산물로서 분수를 도입하고, 이와 관련된 모델을 이용하여 분수의 덧셈과 뺄셈을 지도하자는 것이다. 그리고 분수의 곱셈과 나눗셈은 반드시 학생들의 비 개념이 형성된 후에 지도하자는 것이다. 이러한 방법이 현행 교재와 차별되는 점과 상대적인 장점은 다음과 같은 것이다.

첫째 분수 개념에 대하여 다양한 모델을 이용하는 대신 측정과 관련된 한 가지 모델을 이용하는 것이다. 그럼으로써 학생들의 비 개념이 형성되기 이전에 분수 개념과 관련된 확고한 한 가지 심상을 길러 줄 수 있다는 것이다. 현행 제 7차 교육과정의 교재에서 다양한 의미를 다양한 방식으로 다룸으로 인하여 학생들은 오히려 분수 개념에 혼란을 겪고 있는 것으로 파악되었다. 따라서 학생들의 비 개념이 완성되기 전에는 오히려 측정을 통하여 등분할과 관련된 절대적인 의미로 파악하게 하는 것이 더 좋을 수 있다는 것이다. 그래서 학생들은 측정 상황에서 $\frac{1}{2}$이나 $\frac{1}{4}$과 같은 분수에 대한 정확한 심상을 형성하게 된다. 특히 이집트에서 분수의 발생 과정을 고려하여 $\frac{1}{3}$을 $\frac{1}{2}$이나 $\frac{1}{4}$보다는 늦게 지도하는 것이 학생들에게 더욱 자연스러울 것으로 생각된다.

둘째 분수 개념과 크기 비교, 덧셈과 뺄셈을 일관되게 지도할 수 있다는 것이다. 제 Ⅲ장에서 살펴본 바와 같이 현행 교재에서도 분수의 크기 비교나 덧셈, 뺄셈을 지도할 때는 수 막대를 등분한 모델과 같이 전체를 고정한 모델을 이용하고 있다. 분수 개념을 도입하는 시기부터 이러한 모델을 이용한다면 크기 비교까지 일관성 있는 지도가 가능할 것으로 생각된다. 그리고 이 경우에 분모가 다른 분수의 크기 비교나 덧셈, 뺄셈을 지도할 때에는 수 막대를 세로 줄로만 나눈 모델을 이용하는 것이 더욱 일관성이 있을 것이다.

Ⅵ. 결 론

본 연구에서는 현행 제 7차 교육과정에서 분수 지도와 관련하여 학생들에게 나타나는 문제점이 주로 분수의 다양한 의미를 잘 이해하지 못하는 것으로 파악하고, 이를 해결하기 위한 대안적인 방법을 분수의 역사발생 과정으로부터 찾아보고자 하였다. 이로부터 분수는 주로 측정 과정에서 발생한 필요성 때문에 등장하게 된 것임을 논의하였으며, 이를 적용하여 분수를 측정 과정에 기초하여 도입하는 방법을 제시해 보았다. 측정 과정에 따라 수를 지도할 것을 도입한 학자로 Dewey를 들 수 있으나, Dewey가 제시하는 방안은 학생들이 크기를 비의 개념에 따라 비교하는 능력이 선행되어야 가능한 지도 방법이기 때문이 이를 직접 우리나라 초등학교 수학 교육에 적용하기는 어려움이 있는 것으로 파악하였다.

따라서 보완적인 방법으로서 0, 1, 2, 3, 4 등의 눈금이 표시되고 적당한 길이를 갖는 수 막대에서 0과 1 사이를 등분함으로써 분수를 지도하는 측정 과정을 통한 분수 지도 모델을 제시하였다. 또한 이 모델은 학생들에게 측정 과정과 관련된 양을 표시한다는 분수에 대한 확고한 심상을 길러 줄 수 있고, 분수의 크기 비

교와 덧셈, 뺄셈 지도를 일관되게 할 수 있는 장점이 있음을 주장하였다.

Raises et al(1999)은 분수가 오랜 동안 많은 아동들에게 어려운 장애물이 되어 왔으며, 그 이유는 아동이 강력한 개념적 토대를 계발하지 못한 상태에서 교사가 기호화와 계산을 서두르기 때문인 것으로 파악하고 있다. 본 논문의 제 II장에 살펴본 학생들의 분수 이해에 대한 두 가지 선행 연구는 이러한 측면을 잘 보여주고 있다고 생각한다. 이러한 점에서 측정과 관련하여 다소 고정된 의미로 분수 개념을 지도하는 것은 학생들의 비 개념이 형성되기 이전에 분수 개념에 대한 확고한 개념적 토대를 제공할 수 있다고 생각된다. 나아가 학생들의 비 개념이 형성되는 시기에 분수의 다양한 의미를 지도하면서 이에 기초하여 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

본 논문에서 다루지 못한 문제는 학생들의 비 개념 형성 이전에 분수를 도입하는 것이 적절한지의 문제이다. 특히 유현주(1995)는 다양한 의미의 분수 개념이 비 동치 관계를 이해하는 기초적인 수준의 활동이 됨을 지적하고 있다. 그러나 많은 선행 연구에서 보여 주는 것은 현행 제 7차 교육과정에서 많은 초등학생들은 분수의 다양한 의미를 파악하고 있지 못하다는 것이다. 그래서 본 연구에서는 분수 개념을 비 개념 형성 이전에 도입할 수 있는 대안적인 방안으로서 분수의 역사발생 과정과 관련된 측정 개념에 기초한 방법을 제안한 것이다. 또 다른 대안으로서 이를테면 분수의 다양한 의미를 다루되 학생들의 비 개념 형성 직전이나 이후에 도입하는 방법을 연구해 볼 필요도 있을 것이다. 그러나 이러한 문제를 다루는 것은 본 연구의 범위를 넘어서는 것으로, 후속 연구 주제로서 제안하고 싶다.

참고문헌

강지형 외 6인(1999). **7차 교육과정에 의한 초등수학교육**. 서울 : 동명사.

강홍규(2003). **Dewey의 경험주의 수학교육론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

교육인적자원부(2001a). **수학 3-가**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001b). **수학 3-나**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001c). **수학 4-가**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001d). **수학 4-나**. 서울 : 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002a). **수학 5-가**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 5-나**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002c). **수학 6-나**. 서울 : 대한교과서주식회사.

권성룡(2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. **학교수학,** 5(2), 259-273.

소성숙(2003). **초등학교 학생들의 분수감각에 대한 실태 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

안재구(2000). **수학문화사 I : 원시에서 고대까지**. 서울 : 일월서각.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울 : 서울대학교출판부.

우정호(2001). **중보 학교수학의 교육적 기초**. 서울 : 서울대학교출판부.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Adler, M. (1990). *Great Books of the Western World.* Encyclopædia Britannica, Inc.

Brousseau, G. (1990). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Eves, H. (1995). **수학사**. (이우영 · 신항균 공역). 서울 : 경문사.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dortrecht : Kluwer Academic Publishers.

Lasserre, F. (1964). *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*. London : Hutchinson of London.

McLellan, J. & Dewey, J. (1896). *The Psychology of Number*. New York : D. Appleton and Company.

Raises, R. E. et al. (1999). **초등 수학 학습지도의 이해**. (강완 외 공역). 서울 : 양서원.

Smith, J. P. III. (2002). The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.

The National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Reston, VA : NCTM.

Wilder, R. (1968). *Evolution of Mathematical Concepts : An Elementary Study*. New York : John Wiley & Sons, Inc.

The Historico-Genetic Instruction on Fractions

Seo, Dong Yeop (Chuncheon National University of Education)

This study discusses on the historico-genetic instruction on fraction. The textbooks of the current curriculum include the variety of contexts of fraction to be intended to connect with the conception of ratio in the grade 6. However many elementary students have understanding limited to whole-part relation only. This study propose a method on the basis of the process of measurement by an absolute unit. The idea is related to the genesis of fraction in Egypt.

* **Key words** : fraction(분수), ratio(비), historico-genetic principle(역사발생적원리), measurement(측정), unit(단위)

논문접수 : 2005. 6. 1
심사완료 : 2005. 8. 1