대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.3, 303-318. Sep 2005

문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰

김 선 희*

학생들이 자신의 문제 상황을 해결하기 위하여 수학을 이용하고, 그를 통해 수학적 지식을 학습할 수 있다면, 이것은 학생들이 수학의 유용성과 가치를 깨닫게 하는 수학교육이 될 것이다. 본 연구는 학생들이 문제해결을 통하여 수학을 학습할 수 있도록 지도하기 위해, 여러 교과에서 관심을 두고 있는 문제 중심 학습을 고찰하고 그것을 수학 교과에서 수학적 모델링으로 적용하려 시도했다. 수학적 모델링을 적용한 수업 모형을 제안하고, 학생들을 실제로 지도한 예시를 들어, 형식적이고 위계적인 학문으로서의 수학에 모델링을 도입하여 문제 중심 학습을 실현할 수 있음을 보이려 했다.

Ⅰ. 서 론

문제해결은 수학교육의 방향, 교육 내용, 학생들이 키워야 할 능력 등 여러 측면에서 강조되어 온 것이다. 7차 교육과정에서는 합리적인 문제해결 능력과 태도를 수학과의 목표로 설정하여 문제해결 교육의 중요성을 강조하고 있다. 문제해결은 현재까지 많은 연구의 주제가 되어 왔으며, 그 내용을 살펴볼 때 초창기에는 '문제해결에 대한 지도'가 주된 테마였고, 후반기에는 '문제해결을 위한 지도'가 주된 관심사였으며, 구성주의 교육사조와 함께 '문제해결을 통한 지도'의 필요성이 부각되고 그 경향이 점차 연구물에 반영되고 있다(김부윤, 이영숙, 2003). 이러한 문제해결 지도의 경향은 Schroeder와 Lester(1989)가 제안한 것으로(신인선, 권점례, 2002, 재인용), '문제해결에 대한 지도'는 문제해결이 수학 교수·학습의 대상이 되고 특정한 발견술이나 문제해결 과정을 지도하는 교수 형태를 말하며, '문제해결을 위한 지도'는 중요한 수학적 아이디어를 가르쳐 그것을 문제 상황에 적용하게 하는 것으로 문제해결이 수학 학습 지도의 목표가 된다. 이를 넘어서, '문제해결을 통한 지도'는 문제해결의 과정을 통하여 새로운 지식이나 기능의 획득, 수학적 사고의 육성을 꾀하는 것을 말하며, 문제해결을 통한 지도가 대두되는 것은 시대와 사회적 요구에 부응하여 수학의 유용성을 학생 스스로 느끼게 하고, 수학을 다른 교과와 통합하여 지도할 수 있는 방법이 필요하다는 것을 반영하는 것이라 하겠다.

하지만 현재 문제해결의 학습은 문제해결이 수학 교수·학습의 대상이 되어 특정한 발견술이나 전략으로 지도되거나, 중요한 수학적 아이디어를 가르쳐 그것을 문제 상황에 적용하게 하는 형태로 지도되는 경우가 많다. 이것은 문제해결을 통하여 학생들이 새로운 지식이나 기

* 한국교육과정평가원(math1207@kice.re.kr)

능을 획득하고 수학적 사고를 신장시킬 수 있는 학습 지도라고 할 수 없다. 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하면서 학생들의 생각이 계속 검증되고 수정되며 문제를 해결하는 와중에 수학적 이해와 능력을 발휘하며 복잡한 실제 상황에서 수학을 적용하고 그 과정에서 수학적 개념을 생산해낸다면, 학생들은 수학 학습의 유용성을 절감하고 수학을 발견하는 기쁨을 누리며 수학에 대한 흥미와 긍정적인 태도가 함양될 수 있을 것이다.

단순한 알고리즘이나 공식 암기에서 벗어나 학생들이 알고 있는 여러 수학적 지식을 동원하고 탐색하면서 문제를 해결하며 그를 통해 학생들이 수학적 개념과 원리를 발견하도록 되어야 한다는 전제 하에, 본 연구는 학생들이 문제해결을 통하여 학습을 하도록 하는 일반적 교수학습 방법인 문제 중심 학습과 그것을 수학 교과에 적용시킬 이론으로서 수학적 모델링을 살펴보려 한다. 먼저, 문제 중심 학습(problem-based learning : PBL)이 문제해결을 통한 학습으로서 갖는 의미를 살펴보고, 문제 중심 학습을 기초로 수학적 개념을 학습할 수 있는 방법을 수학적 모델링으로 설명해 볼 것이다. 그리고 실제로 학생들이 모델링을 통해 특수한 일차함수 개념을 찾아가는 과정을 사례 연구로 보여줄 것이다. 문제 중심 학습은 문제에서 시작하여 학습하는 이론으로 기존에 부각되어 있지만, 이 연구에서는 수학 교과에서 문제 중심 학습을 적용할 수 있는 방법으로 수학적 모델링을 제시할 것이다.

II. 문제 중심 학습

문제에서 시작하여 학습을 지도하는 데에는 여러 접근이 있다. 문제 중심 학습은 문제만 사용된다고 해서 가능한 방법이 아니므로, 문제 중심 학습과 차별되는 다른 학습을 살펴봄으로써 문제 중심 학습의 의미를 구체적으로 알 수 있을 것이다.

Harden & Davis(1998)는 문제 중심 학습을 중요한 교육전략이라 하면서 문제가 중심이 된 학습 모형을 여러 개 제시하였다. 각 유형은 교육 방법 설계와 교사의 활동에 따라 연속체 상에 있으며, 전통적인 강의에서부터 문제 중심 학습까지의 순서로 나열될 수 있다. 첫째, 전통적인 강의는 문제 지향(problem-oriented) 학습으로 불리는 것으로, 적용할 기회가 거의 없는 수학적 내용을 교사가 학생들에게 제공할 때의 학습을 말한다. 교사는 학습 내용과 그 원리가 어떠한 것인지 알려주고, 학습 내용이 문제 상황에 어떻게 적용될 수 있는지 예를 보여준다. 이 학습에서는 학생들이 스스로 문제를 해결할 기회가 없으며, 학습 상황에 문제가 등장하더라도 그 문제를 중심으로 학생들의 활동이 이루어지지는 않는다.

둘째는 문제 보조(problem-assisted) 학습이다. 교사가 강의식으로 실제 정보를 제시하는 수업을 진행한 후 학습한 내용을 적용할 문제해결 기회를 학생들에게 제공하는 것이다. 교사의 강의와 함께 문제에 적용해 볼 수 있으며, 문제해결에의 적용을 통해 학생들은 학습한 내용 정보가 문제에 적절한지 파악하고, 주제를 이해하고 원리나 개념을 마스터하는데 도움을 받는다. 문제 지향 학습과 문제 보조 학습은 문제해결에 대한 지도를 하는 전통적인 수업에서의 학습이라 할 수 있다.

셋째는 문제 초점(problem-focused) 학습이다. 학습 내용과 용어들을 학습한 후 그것을 적용할 수 있는 문제를 해결하고 다시 학습한 주제와 관련된 개념과 원리를 검토하는 식으로 진행된다. 원래 문제 상황을 변형시켜 다른 맥락

에서 어떻게 적용될 수 있는지를 알아보게 하거나 다른 해결 방법을 찾게 함으로써, 학습한 개념을 다시 돌아보게 할 수 있다.

넷째는 문제 주도(problem-initiated) 학습이다. 여기서 학생들은 먼저 문제를 만나 학습을 시작하게 되며, 문제는 학생들의 흥미를 유발하는 조종 역할을 한다. 문제는 학습할 영역의 일반적인 아이디어를 주며, 교사는 문제를 해결하기 위해 학습할 내용을 소개하며 수업을 시작할 수 있다. 문제 초점 학습과 문제 주도 학습은 문제해결을 위한 학습 지도로 다루어질 수 있다.

다섯째는 문제 집중(problem-centered) 학습으로, 처음으로 문제가 학습의 주요 초점이 된다. 문제를 해결하려는 노력을 하면서 해에 도달하는데 요구되는 원리와 규칙을 학생들이 학습하도록 한다. 학습할 내용은 교사의 강의나 교과서 등의 자료를 참조하여 얻을 수 있는 것이며, 학생들이 스스로 답을 찾는 것은 별로 강조되지 않는다. 문제를 처음 접한 후 학생들은 알고 있는 몇몇 사실을 조합해야 한다. 좀더 확장하여 학생들이 문제를 해결하면서 수학적 원리를 발견하는 발견학습 과정을 모형에 포함시킬 수도 있다. 학생들은 문제해결을 통해 원리와 규칙을 학습할 수 있으나 학습에 대한 책임 정도가 약하다.

마지막은 문제 중심(problem-based) 학습이다. 문제해결에서 특정한 학습 내용을 마스터하게 하며, 논의 중인 문제에서 다른 상황으로까지 일반화하는데 강조가 주어진다. 즉, 특정 문제에 대한 해결과 아울러 지식과 기능의 학습, 학습한 지식과 기능을 다른 맥락에 일반화하는 것까지 포함된다. 문제를 다루는 것이 여러 주제를 학습하는 매체가 되며, 문제로부터 다른 영역으로 일반화하는 것이 중요하다.

각각의 학습 유형을 보면 학습의 주체가 교사에게서 학생에게로 점차 양도되고 있으며 학습에서 문제의 비중 또한 커지고 있음을 알 수 있다. 학습할 내용 또한 특정한 원리에서 보다 넓은 일반화로 향하고 있다. 이를 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 문제해결 학습의 유형

학습 유형	특징	도식
문제 지향 학습	문제해결을 교사가 보여줌	원리
문제 보조 학습	학생들에게 실제 예에 적용할 기회를 제공	원리→예
문제 초점 학습	내용을 학습 후 문제에 적용하고 그 원리를 다시 학습	원리→예 →원리
문제 주도 학습	문제가 학습 초반에 조종의 역할	예→원리
문제 집중 학습	문제에 대한 연구가 원리와 규칙을 학습하게 함	예→원리(특정)
문제 중심 학습	문제의 해결이 학습 내용의 일반화를 포함	예→원리(일반)

위의 유형 중에서 구성주의 학습 이론을 가장 충실히 반영한 수업 모형은 문제 중심 학습이라 할 수 있다(최욱, 이연경, 김민수, 2000). 구성주의의 밑바탕이 되는 학습자의 능동적 구성의 원리와 지식에 대한 적응성과 합의성의 원리를 수용한다면, 교사는 학습내용을 철저히 재구성하여 내면화하고, 그런 터전 위에 여러 모델을 고찰하고 비판하여 적용하고, 학습의 안내자, 조력자, 격려자, 코치의 역할을 각각 수행하면서 교수-학습 활동을 진행해 나가야 한다. 그리고 학습내용과 직접 관련된 실제적인 문제를 정점으로 그 문제와 관련된 실제현

상을 자신의 의미로 파악하고, 혼자 힘으로 학습내용을 구성해 나가면서 다른 학습자와의 사회화 즉 협동학습을 통해, 제시된 문제에 대한 자신의 관점과 구성된 지식을 동료 학습자와 공유하여 자신의 지식을 시험, 개선해 나가는 활동에 임해야 한다. 문제 중심 학습은 이러한 활동을 가능하게 한다.

수학학습에서 문제해결은 늘 중시되어 왔으나, 학습 과정과 방법으로서의 문제 중심 학습은 수학 이외의 분야에서 시작되었다. 1970년대에 캐나다의 McMaster의 의과대학에서 학생들이 의대 수업에서 배우는 것이 전문 의사가 사용하는 기술, 지식과 확연히 다르다는 것이 확인되면서 문제 중심 학습에 대한 연구가 시작된 것이다. 문제 중심 학습은 문제에 대한 이해나 해결책을 향한 활동의 과정으로 초래된 학습(Barrows와 Tamblyn, 1980), 학생들이 조교의 관리 하에 소집단으로 문제를 다루는 교수학습 접근(Schmidt, 1993), 문제해결 기술과 내용을 가르치고 자기주도적 학습을 위하여 설계된 교수 전략(Eggen, Kauchak, 2001)이라 정의되기도 한다(조연순, 우재경, 2003, 재인용). 여기서 가장 핵심적인 개념은 새로운 지식의 획득을 위한 출발점으로서 문제를 사용한다는 점이다.

학생들은 문제가 의미 있고 자신과 관련되어 있다고 생각할 때 문제에 집중하게 되며, 자신들이 쉽게 이해할 수 없는 상황이 함께 제시되었을 때 지식의 부족을 메우기 위하여 문제에 열중할 수 있으므로, 문제에서 시작하여 새로운 지식을 마스터하게 하는 학습 지도는 수학교육에서도 권장할 사항이다. 이때 교사는 학생들에게 일련의 문제를 제시하고, 학생들은 문제를 분석하고 탐색, 토의, 분석하며 인지적인 설명, 해결방안이나 가설 등을 만들어내는 역할을 해야 한다(김홍래, 2000). 문제가 신중하게 구조화되어 학생들이 가치 있는 지식을 만나고, 문제가 학습의 중심이 되고, 특정한 교육목적에 따라 설계되어야 하는 것은 문제 중심 학습 지도에서 중요하다. 즉, 학생들에게 구조화되지 않은 복잡한 실세계 문제를 해결하는 경험을 제공하도록 문제 중심 학습의 지도가 이루어져야 한다. 문제 중심 학습은 학생들이 문제해결을 통해 원리를 알고 일반화하는 학습을 하게 해 준다는 점에서 수학교육의 새로운 문제해결 방향에 부합한다.

문제 중심 학습에서 많이 인용되고 성공적으로 사용된 수업 모형에는 Delisle의 학습지도 모형이 있다(1997, 조연순, 2001, 재인용). 이 모형은 문제에 직면하기, 구조 설정하기, 문제 확인하기, 문제 재확인하기, 산출물 또는 수행 산출하기, 수행과 문제 평가하기의 여섯 단계로 이루어져 있으며, <표 Ⅱ-2>과 같은 특징이 있다. Delisle의 모형에 따르면, 각각의 문제가 제시될 때 학생들은 문제 상황의 심각성을 파악하고 시간을 투자할 가치가 있다고 여기게 된다. 그리고 나서 문제를 해결할 아이디어, 사실을 기록하고 활동을 계획하면서 구조를 설정하는데, 문제가 학생들의 탐색을 요구하지 않는 경우에는 이 모형의 각 단계가 모두 적용되지 않을 수 있으며, 문제에 직면하여 구조를 설정한 후 바로 산출물을 내고 평가하는 과정이 진행될 수도 있다. 모형의 세 번째 단계인 문제 확인하기에서는 문제해결 계획을 세운 후 그룹별로 조사할 아이디어와 학습 문제를 선택하며, 네 번째 단계에서는 수행된 작업을 발표하고 학생들이 사용한 자원, 시간, 활동의 효과 등을 생각하여 문제를 재확인하면서 본래의 아이디어를 돌아보고, 아직 그것을 연구하고 싶은지, 증명하기 위해서는 어떤 정보가 필요한지 생각할 기회를 준다. 다섯 번째 산출물 또는 수행 산출하기 단계에서는 문제에 대해서 산출물을 내고

발표하게 하고, 마지막 여섯 번째 단계에서 학생들이 자신의 수행, 그룹 수행, 문제 자체의 질에 대한 자기 평가를 하게 한다.

<표 Ⅱ-2> Delisle의 문제 중심 학습 모형

단계	특징
문제에 직면하기	문제의 심각성을 파악하고, 시간과 주의집중을 하게 한다.
구조 설정하기	문제해결의 전체적인 계획을 세우는 단계로, 아이디어, 사실, 학습문제, 활동계획 등의 내용을 생각한다.
문제를 확인하기	문제를 다시 읽고 조사할 아이디어와 학습 문제를 선택한다.
문제를 재확인하기	수행된 작업을 발표하고, 교사의 평가를 받는다. 새로운 아이디어나 질문을 생각하거나 어떤 정보가 필요한지 알아본다.
산출물 또는 수행 산출하기	산출물이나 수행을 한다.
수행과 문제 평가하기	학생 자신의 수행, 그룹 수행, 문제 자체의 질에 대한 자기 평가를 실시한다.

하지만 이 모형은 다른 맥락에서 제시되는 문제에 대해서도 해결 방법을 모색할 수 있도록 학습한 원리를 일반화하거나 그 원리를 탐색하는 과정에 대한 자세한 소개가 없다. 수학에서의 문제 중심 학습은 문제 상황의 핵심적인 내용을 수학 개념과 연결하여 수학적으로 해결하고 문제 상황으로 다시 해석해야 하는데, 이 모형에서는 그러한 안내 없이 학생들에게 자기주도적으로 문제의 해를 산출하라고 하고 있어 위계적인 수학 내용을 학습해야 하는 학생에게 방법적 절차를 안내하지 못한다. 수학적 개념이나 원리의 학습은 문제 해결을 통해 발견되는 것에서 끝나는 것이 아니라 그에 대한 깊이 있는 탐색과 구성요소의 분석 등이 필요하기 때문에, 얻어낸 산출물이 문제 상황에 알맞은 결과인지 확인하는 것 뿐 아니라 학생들은 수학에서 사용되는 표현에 친숙해지고 그 과정에서 수학적 개념의 의미를 풍부히 경험할 수 있어야 한다. 이에 본 연구는 수학 교과에서 문제 중심 학습으로서 적용될 수 있는 수학적 모델링 방법을 제안하고자 한다.

Ⅲ. 수학적 모델링

문제해결을 통한 지도를 위한 교수학습 방법으로 문제 중심 학습이 부각되고 있으나, 수학적 지식의 학습이라는 특성에 비추어 볼 때 문제 중심 학습을 수학 교과에 어떻게 적용할지 구체적인 방안이 필요하다. 수학을 지도할 수 있는 방법적 측면의 제안으로 이 글에서는 수학적 모델링을 제시한다.

1. 모델과 모델링

수학적 모델은 문제 상황을 수학적으로 묘사한 것으로, 외적 표현의 형식을 가지고 있으며 상황에 따라 해석될 수 있는 수학적 개념이다. 이때 문제 상황은 학생들이 수학의 개념 체계를 구성하고 조작하고 예측하도록 제시되는 것으로, 수학적으로 해결될 수 있다. 문제 상황을 수학적으로 해결할 때는 그래프, 표, 식 등의 수학적 표현을 사용하게 되는데, 여기서 학생들은 수학적 표현이 갖고 있는 의미에 대해 생각해 보고 그것이 현실에 주어진 문제 상황과도 적합한지 생각하게 된다. 그러한 수학적 모델을 도출하고 탐색하고 적용하면서 발전시키는 활동이 바로 모델링이다.

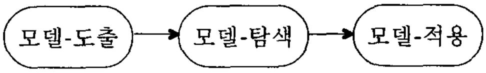
모델링에서 학생들은 조건과 목적을 해석하기 위해 유용한 방법 및 개념 체계를 개발해야 하고, 전통적인 문제해결에서 교사나 문제가

생략해주었던 부적절한 정보를 직접 걸러내고 분류하며, 가능한 결과를 검증하고 교정하며, 문제 상황과 관련된 해석, 설명, 예측, 서술 과정에서 추론을 해야 한다. 또 자신이 알고 있는 지식과 정보를 적용하여 실제 상황에 비추어 수학적 모델을 해석하고, 수학적 모델을 문제 상황으로 해석하기도 해야 한다.

수학적 모델링의 결과는 수학적 구조, 패턴, 규칙성에 초점을 둔 복합적인 수학 모델이다. 학생들은 수학적 원리와 법칙을 교사나 교과서로부터 받아들이지 않고 스스로 탐구 과정을 통해 모델을 구성하므로, 자신의 내적 개념 체계와 외적 표현을 함께 발전시킬 수 있는 노력을 하게 되며 표현을 통해 개념 체계가 발전하고 다시 그 개념을 표현하면서 세련된 표현 체계를 완성하게 된다. 즉, 수학적 모델링은 학습을 위해 문제 상황을 적극 활용하며, 문제를 해결하면서 도출된 모델을 학습내용으로 한다는 점에서 문제 중심 학습의 취지에 부합한다. 학생들이 특정한 문제를 해결함으로써 일반적인 원리와 개념을 파악하고, 위계적이고 형식적인 수학 내용을 학습하게 한다는 것은 문제해결을 통한 수학 학습 지도로 모델링이 활용될 수 있음을 말해 주는 것이다.

2. 수학적 모델의 발달 절차

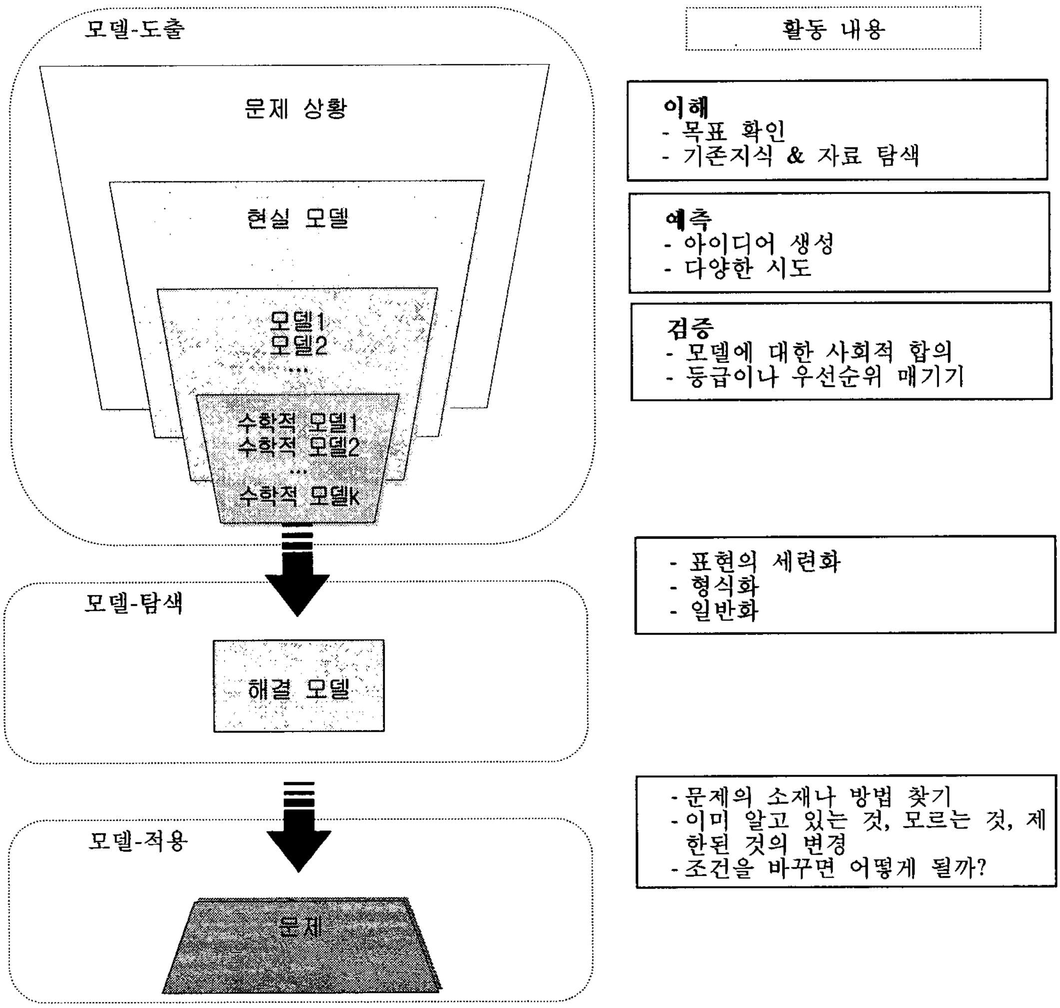
수학적 모델링의 과정이나 수학적 모델의 발달에 대한 설명은 여러 가지가 있다. 그 중에서, Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski (2003)은 모델 발달이 [그림 Ⅲ-1]과 같이 모델-도출, 모델-탐색, 모델-적용 활동으로 이루어진다고 보았다. 이것은 문제 상황에 적합한 수학적 모델을 도출하는 것에서 그치는 것이 아니라, 학생들이 그 모델을 구성하는 체계에 대한 더 상세한 탐색을 하고, 그 모델을 일반화하고 적용할 수 있는 새로운 문제까지 만들어 보게 하는 과정을 포함한 것으로, 문제 중심 학습의 절차를 수학학습에 더 구체화시킨 것이라 볼 수 있을 것이다. 문제의 해를 얻는 것을 목적으로 한다면 모델-도출에 초점이 주어지나, 이를 확장하여 모델의 탐색과 적용이 이루어질 수 있다. 문제 상황에서 해결에 필요한 수학적 모델을 도출하고 그를 통해 문제를 해결하며, 그 모델에 대한 탐색을 통해 수학의 개념, 원리, 법칙에 대한 형식적 내용에 대해서도 접근하고, 다시 새롭게 문제를 바꾸어 적용하거나 새로운 문제를 직접 창출하는 과정으로 진행되기 때문에, 수학적 모델링은 문제 중심 학습을 취하면서 수학 개념에 대한 학습도 함께 이루어져 문제해결을 통한 학습 지도가 실현될 수 있는 방법이 된다.



[그림 Ⅲ-1] 수학적 모델의 발달 절차

각 절차를 살펴보면, 모델-도출 활동에서 학생들은 문제 상황에서 고려해야 하는 양과 양적인 관계를 고려하고, 적합한 개념인 모델을 도출해야 한다. 학생들은 토론을 통해 구조적으로 관련이 있는 과제 사이의 유사성과 차이점을 조사하면서 모델을 도출한다. 이때 교사는 학생들을 안내하려는 질문에 의존하지 말고 학생 스스로 모델을 도출하도록 토론을 이끌고 발문을 제시해야 한다.

모델-탐색 활동은 학생들이 발전시키고자 하는 개념 체계를 이해하기 위해 세련된 표현을 개발하려는 목적을 갖는다. 컴퓨터 그래픽, 다이어그램, 애니메이션 등의 활용도 가능하며, 학생들은 목표로 하는 개념을 이해하고 세련화할 수 있는 강력한 표현 체계를 탐색해야 한



[그림 Ⅲ-2] 수학적 모델링을 적용한 수업 모형

다. 도출된 모델에 대해 깊이 있게 생각하고 강력한 언어와 표현 체계를 개발하는 단계이다.

모델-적용 활동은 모델링 활동에서 개발된 개념 체계를 사용하는데 그 목적이 있다. 학생들이 실제 문제를 만들어 자신들이 개발한 모델을 적용시켜보는 활동을 할 수도 있다. 때로 문제 상황에서 쉽게 공유할 수 있었던 개념 도구가 새로운 상황의 문제에서는 적합하지 않을 수도 있기 때문에 새로운 모델링 활동이 시작될 수도 있다.

수학적 모델링은 문제 중심 학습을 수학 교과에서 구현한 것으로 볼 수 있으나 차별되는 점도 발견할 수 있다. 즉, 문제 중심 학습은 모델-도출 활동에 초점을 두었으나 수학의 체계와 내용을 이해하고 형식화하여 세련화시킬 수 있는 활동은 모델-탐색 활동에서 구현될 수 있으며, 알게 된 수학 개념을 가지고 새로운 문제를 창조하고 일반화 가능성을 탐색하는 것이 모델-적용 활동에서 이루어질 수 있다.

수학은 학문적 성격상 위계적이고 형식적으로 구성되어 있어 용어와 기호를 정의하고 그를 바탕으로 개념을 이해하고 원리나 법칙을 만들고 문제에 적용하는 방식의 학습지도가 선호되어 왔으나, 문제해결을 통한 수학 학습이

나 수학 교육에서의 문제 중심 학습이 이루어지기 위해서는 수학적 모델링을 실행하는 것이 적당하다. 수학적 모델링은 학습자가 학습의 중심이 되어 수학적 지식을 스스로 발견하고 다루고 평가하며 동료들과의 대화 속에서 그 지식의 타당성에 대한 합의 등을 도출한다는 점에서 구성주의 철학과 맥이 닿아 있으며, 문제 해결 속에서 필요한 자료와 지식을 조사하고 생성하고 탐색해 보기 때문에 문제 해결이 바로 학습이 된다. 학생들은 수학적 모델링을 통해 수학이 실생활에 응용됨을 알 수 있고, 스스로 수학적 모델을 도출하고 그에 대해 탐색하고 적용해 보기 때문에 수학 개념을 내면화할 수 있고, 현실 상황을 수학적 모델로 바꾼 후 계산하고 잘 정의된 수학문제를 해결하기 때문에 문제해결력 또한 향상될 수 있다.

3. 수학적 모델링의 수업 모형

수학 교과에서 문제 중심 학습을 실현하기 위해 수학적 모델링을 적용하는 수업 모형을 [그림 Ⅲ-2]와 같이 제시하고자 한다. 수학적 모델링을 모델-도출, 모델-탐색, 모델-적용의 단계에 따라 제시하고자 했으며, 각 단계에서의 활동 내용을 설명했다.

모델-도출 단계에서 학생들은 문제 상황에서 시작하여 문제를 분명히 이해하고 목표를 확인하는 현실 모델을 구성해야 하고, 문제를 해결하기 위한 모델을 예측해야 한다. 다양한 아이디어를 생성하여 문제를 해결할 수 있는지 시도해 보기 때문에, 학생마다 그룹마다 여러 모델이 구성될 수 있다. 생성된 모델들은 문제를 해결하기에 적합한지 검증을 받아야 하며, 이를 통해 수학적 모델들이 선정된다. 여기서의 수학적 모델들은 문제를 해결하는데 사용될 수 있는 것이지만 그 표현이 다르고 그로 인해 해석될 수 있는 의미가 다르다. <그림 Ⅲ-2>에서 문제 상황, 모델, 수학적 모델 등이 겹쳐 있는 것은 나중에 생성된 수학적 모델이 문제 상황의 맥락 속에서 계속 반성, 참고될 수 있다는 것을 보여주려는 것이다.

모델-탐색 단계에서 학생들은 이미 도출된 여러 수학적 모델을 탐색하면서 표현을 세련되게 하고 내용을 형식화, 일반화시킨다. 이 단계에서 학생들은 모델링을 통해 학습해야 하는, 문제의 해가 되는 해결 모델에 대해 심도 있는 연구 활동에 참여하게 되고 형식적인 수학을 경험할 수 있다.

해결 모델에 대한 학습이 이루어지면 학생들은 모델 적용 단계에서 조건을 약간 바꾼 문제나 새로운 문제에 학습한 해결 모델을 적용할 수 있다. 이때 문제의 소재나 방법을 약간 변형하여 학생들에게 제시할 수 있고, 조건을 바꾸면 어떻게 될지 생각해보는 전략을 사용할 수도 있다. 그리고 학생들이 직접 모델을 적용할 수 있는 문제를 만드는 것을 문제 적용 단계에서 시도할 수도 있다.

Ⅳ. 수학적 모델링의 지도 예시

문제 중심 학습으로서 문제해결을 통한 학습 지도가 수학적 모델링을 통해 이루어질 수 있으며, 그 안에서 학생들이 새로운 지식을 스스로 발견하고 정교해나감을 보여주고자 이 장에서는 모델링의 지도 예시를 제시한다.

1. 연구 대상

모델링을 수학 수업에 적용하기 위해서는 교사가 수업 내용을 모델링 관점에서 재구조화해야 하며, 문제해결에 비교적 긴 시간을 필요로

한다. 본 연구는 학교 정규과정 이외에 별도의 교육을 받고 있는 영재 학생들을 연구 대상으로 모델링 수업을 실시하였다. 모델링 수업이 일반 학생들을 대상으로도 가능할 수 있지만, 그 가능성을 영재 학생들을 대상으로 미리 살펴본 것이다. 연구 대상은 서울시의 S교육청 영재교육원에서 수업을 받고 있는 중학교 1학년 19명이다. 이 영재교육원에서는 수학영재에게 적합한 수업이 모델링임을 인식하고 모델링 관점에서 학습 지도를 하고자 노력하고 있으며, 교육을 담당하고 있는 교사들도 이에 동의하고 있었다.

2. 연구 방법

모델링 수업은 2004년 9월에 실시되었으며 90분 동안 진행되었다. 학생들은 이전 시간에 비례 관계에 의하여 발자국을 보고 키를 예측하는 모델링 활동을 하였다. 연구자는 관찰 그룹에 주로 머물며 학생들이 모델을 선택하는 과정에 개입하지 않고 연구 결과에 영향을 주는 질문을 피하면서 학습과정을 관찰하였다. 학생들의 사고 과정에 대한 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리 내어 사고하기를 요구했다. 비디오 두 대를 사용하여, 한 대는 교사에게 고정시키고 한 대는 관찰 그룹의 활동을 녹화하였다. 그리고 학생들의 수업 활동지와 수업보조 교사의 현장노트, 비디오 녹취록을 기반으로 자료를 분석하였다.

3. 모델링 문제

학생들에게 주어진 문제는 몇 가지 주어진 정보에 의해 산에서의 기온을 예측하는 것이다. 문제해결 결과로 도출될 수 있는 수학 모델은 정의역에 따라 식이 다른 일차함수이다. 기온은 일정하게 내려가지만 일정 비율이 바뀌는 순간이 있어 고도와 기온의 관계를 그래프로 나타내면 꺾어진 직선이 된다. 학생들은 정의역이 분할되어 꺾어진 직선의 그래프를 배우거나 접해보지 못했지만, 이 문제를 해결하면서 그에 대한 개념 모델을 도출하고 탐색해 가야 한다. 학생들은 정비례와 함수의 기본 개념에 대해서는 학교 교육과정에서 이미 학습했으며, 본 연구에서 제시한 문제의 모델이 되는 정의역이 영역으로 나누어진 함수는 알지 못한 상태였다. 학생들에게 주어진 정보는 다음과 같다:

★ 평지 기온: 29℃
해발 700m 지점 기온: 22℃
해발 2400m 마을의 기온 12℃
해발 3000m 마을의 기온 9℃.

학생들이 등반해야 하는 산은 6350m 고도이며 이 산을 등반하려면 추위에 대비한 준비를 해야 하므로, 학생들은 위의 자료를 이용하여 기온 변화를 예측하고 그 예측 이유를 설명할 수 있는 표현을 만들고, 특히 해발 800m와 4200m에서의 기온을 구해야 했다.

영재교육원 영재팀 광장산맥 최고봉 등정 도전!!!

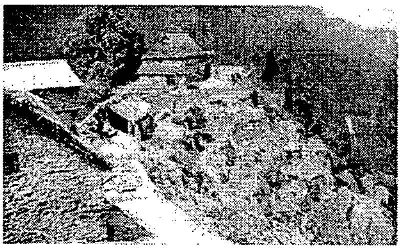
영재교육원은 이번 여름 광장산맥 최고봉인 가우스봉(해발 6350m) 등정을 계획하고 있다. 그 중 오일러반이 맡은 일은 최고봉까지 이르는 동안 베이스 캠프가 설치되어 있는 지점의 기온을 예측하고 등산에 필요한 의복과 방한용품을 준비하는 것이다. 이를 위해 현지 기온에 대한 사전 조사가 필요한데, 오일러반이 입수한 현지 기온 자료는 다음과 같이 단 네 가지 뿐이다.

이 네 가지 자료를 가지고 오일러 반이 맡은바 임수를 잘 수행해 낼 수 있을 것인가?

자!! 이제 여름 등정을 위해 우리가 맡은 일을 시작해 보자~~!

<오일러 반이 입수한 현지 자료>

평지 기온 29°C



고산지대(해발 3000m) 기온 9°C

평지 기온:29°C
해발 700m 지점 기온:22°C
해발 2400m 마을의 기온 12°C
해발 3000m 마을의 기온 9°C

★ 가우스봉 등정을 하기 위해 어느 정도의 추위에 대비해야 할까?

★ 해발 800m와 4200m에서의 기온은 얼마일까?

4. 학생들의 모델 발달

모델링 수업은 모델-도출과 모델-탐색, 모델-적용으로 이루어졌으며, 모델-도출에서는 4명이 한 조를 이룬 조별 활동이, 모델-탐색에서는 전체 학급 토의가 이루어졌다. 본 연구는 모델링 활동을 통해, 학생들이 학습하지 않은 내용인 정의역에 따라 그래프가 다르게 정의된 일차함수 개념이 발전되는 것을 살펴봄으로써 문제라는 예를 통해 수학적 원리를 찾아가는 모습을 보여주려 했다. 그래서 수학적 모델 발달 절차 중에서 모델-탐색 활동에 초점을 두었고, 모델-적용 활동은 제시하지 않는다. 모델-도출과 모델-탐색 활동에서 학생들이 경험한 내용을 살펴본다.

가. 모델-도출 활동

등산을 할 때는 기온 하강에 대비하여 여러 준비물을 챙겨야 한다. 학생들은 6350m의 산을 오르는 동안 기온의 변화에 대해 예측해야 하며, 그 변화를 예측하기 위하여 그래프나 수식의 수학적 모델을 도출했다. 관찰된 학생들은 조별 활동을 통해 꺾어진 그래프라는 수학적 모델을 도출하였으며, 모델을 도출하기까지 관찰된 학생들의 조별 활동은 아래와 같다.

1) 문제 이해

처음에 문제가 주어졌을 때 학생들은 문제의 내용을 이해하기 위해서 먼저 해발이라는 용어에 초점을 두었다. 해발의 의미가 무엇인지, 왜 해발이라는 용어를 사용하는지에 대해 생각했다. 그리고 과학 시간에 배운 대류권, 성층권, 중간권, 열권 등의 내용을 생각하며, 산의 정상까지는 대류권에 속하므로 기온이 내려갈 것이라는 예측을 했다.

또한 학생들은 문제를 이해한 후 무엇을 알

아내야 하는지 해결의 목표를 확인하였다. 그리고는 단지 정상의 높이가 아니라 정상에 이르기까지 여러 곳의 기온을 알아낼 수 있는 방법을 구해야 함을 확인했다.

2) 모델의 예측

학생들은 그래프를 그려보면 기온의 변화를 예측하고 알아낼 수 있을 것이라 생각했다. 그래프를 그리기 위해서는 점을 찍어야 하므로 문제에서 주어진 네 가지 정보를 사용하면 된다고 생각한다. 하지만 네 곳의 위치와 기온을 순서쌍으로 좌표평면에 나타냈을 때, 학생들은 점들이 일직선으로 나열되지 않는 것을 보고 당황해 했다. 학생들은 정의역에 따라 그래프가 다르게 정의되는 일차함수의 그래프를 본 적이 없었다. 그래서 학생들은 그래프가 곡선이 되지 않을까 하는 예측을 해본다.

51. WJ: 근데요 이게요. 온도가 틀려요, 직선이 안 나와요.

하지만 교사의 힌트에 의해 그래프가 곡선이 아니라 직선 형태일 것이라 생각했으며, 기온이 꾸준히 낮아질 것이라는 예측도 했다.

조별 활동에서 학생 스스로 모델을 도출할 때, 그 모델은 수학적으로 옳지 않거나 적합하지 않을 수 있다. 교사는 이때 개입하여 모델링의 방향을 안내해야 한다. 이 연구의 모델-도출 활동에서 교사는 '푄현상을 아는가?'하는 질문으로 기온의 변화 패턴이 갑자기 바뀔 수 있음을 암시했다. 그리고 그 패턴의 변화가 해발 1000m에서 일어날 것이라는 것도 알려주었다.

3) 수학적 모델의 검증

수학적 모델링에서는 형식적으로 학습하지 않은 수학 개념을 도출해야 하기 때문에 학생들은 자신이 갖고 있는 지식을 활용하여 자신의 모델에 대한 검증을 했다.

60. TK: 아!~~뭐더라....? 아!! 맞다 100m씩 올라갈 때, $\frac{1}{100}$도씩 낮아져.

61. WJ: 그럼 그게 어느 순간에 딱 $\frac{1}{100}$씩 낮아지는 게 아닐게 아냐.

그래프가 꺾어진 직선임을 알게 된 후 꺾이는 곳이 어디인지 생각할 때 학생들은 그래프를 그려 그 점의 x좌표가 1000임을 알아냈다. 그리고 그 점이 교사가 알려준 것과 일치함을 보면서 교사의 정보가 확실한 것이며 알려주지 않아도 스스로 찾을 수 있었던 것임을 깨닫는다. 그래프라는 시각적 표현이 모델링 과정에서 선택한 정보의 유용함과 옳고 그름의 판단에 사용되었다.

74. WJ: 여기랑 여기 직선 그리잖아. 그럼 여기서 만나는데 이 지점...

결국 관찰된 조의 학생들은 높이에 따른 기온 변화를 예측하는 그래프 모델을 완성했다. 이 그래프는 푄현상 때문에 기온 하강 패턴이 갑자기 변화된 모양이며, 그에 대한 학생의 설명은 다음과 같다.

94. WJ: 선생님께서 1000m에서 달라진다고 하신 말을 듣고 3000m와 2400m의 기온을 두 점으로 나타내고 그 사이에 직선을 그리고, 700m와 평지기온을 잇는 그래프를 나타내었는데, 두 그래프의 교점에서 꺾인다고 생각했습니다. 그 지점이 1000m이었고 그래서 1000m 이상에서는 200m에 1도씩, 1000m 이하에서는 100m에 1도씩 떨어집니다. 그래서 답은 800m: 21도, 4000m: 4도입니다.

이 결과에 대한 검증은 학급 전체 발표를 통

해 이루어졌다. 학급은 조별로 자신들이 만든 모델을 설명했다. 어떤 조는 나중에 변화하는 비율에만 초점을 두어 1000m보다 높은 경우에는 100m에 0.5℃가 변한다고 말했다. 전체 학생들은 모델-도출 활동의 관찰대상이었던 그룹의 그래프 모델과 그 발표 내용을 생각해 보면서, 1000m에서 패턴이 바뀔 것이라는 교사의 힌트가 필요 없는 것이었음을 함께 깨달았다. 이를 통해 학생들이 도출한 개념에 대한 사회 구성원간의 검증이 이루어졌다.

나. 모델-탐색 활동

모델-탐색 활동에서 학생들은 정의역에 따라 다르게 정의된 일차함수의 수식을 해결 모델이라 생각하고, 그것이 문제의 해를 찾는데 적합하다고 했다. 그래서 학생들은 수식이라는 해결 모델을 세련화하고 형식화하였다.

교사가 기온의 변화 예측이 그래프로만 가능한지 질문했을 때, 학생들은 식으로도 나타낼 수 있다고 했다. 그리고 식으로 모델을 도출한 그룹이 발표를 했다. 그 학생들이 만든 수식은 다음과 같이 두 개의 식이었다.

109. $$y = -\frac{1}{100}x + 29$$
$$y = -\frac{1}{200}x + 24$$

학생들은 자발적으로 위의 수식에 대해 부족한 점이 있음을 지적했다. 그리고 한 사람씩 칠판으로 나와 자신의 생각을 설명했다. 학생들은 꺾어진 직선 모양의 그래프에 대해 하나의 식을 쓸 수 없음을 지적하고, x의 범위에 따라 식이 구분되어야 함을 말했다. 정의역이 구간으로 분할되는 함수 그래프를 만난 적이 없지만, 학생들은 x의 범위에 따른 식을 다음과 같이 표현하여 함수의 표현을 정교하게 하였다.

111. WJ: 범위에 따라 식을 써요.

$$y = -\frac{1}{100}x + 29 \ (1000 \geq x \geq 0)$$
$$y = -\frac{1}{200}x + 24 \ (10000 \geq x \geq 1000)$$

이후 학생들은 두 번째 식의 상수항을 24, 19로 계속 바꾸며 어떤 식이 옳은지 토론하면서 일차함수의 상수항이 갖는 의미에 대해 생각했다. 한 학생은 꺾어진 그래프가 연속이어야 함에 착안하여 두 식의 그래프가 만나는 곳에서 y값이 19이므로 두 번째 수식은 19에서 시작하여 x값에 따라 변해야 한다고 했다. 즉, $y = -\frac{1}{200}x + 19$의 식이 되어야 한다고 제안했다. 이것은 일차함수에서 상수항이 갖는 의미를 생각해 보게 한다. 결국 학생들은 x에 1000을 대입하여 24가 정확하다는 판단을 하게 되었고, 함수식의 상수항은 $x = 0$일 때의 값이라는 것을 말하였다. 전통적인 수업에서 일차함수를 가르칠 때 교사가 상수항과 y절편을 설명하는 것과 같이, 학생들이 스스로 일차함수에서 상수항이 무엇을 뜻하는지 논의한 것이다.

125. ST: 대입해 보니까 그렇게 나와요
126. HW: 24는 $x = 0$일 때 값이니까 $x = 1000$일 때는 19가 나오겠죠.

함수식의 수학적 모델을 정교하게 하면서 학생들은 문제 상황과의 관련성을 생각했고, 가능한 의사소통을 구상했다. 개념을 외적 표현으로 나타내는 것은 내용의 기억 용량을 줄이고 또 다른 정보 처리가 가능하게 하는 개인적 기능 뿐 아니라 다른 사람이 보고 이해할 수 있도록 나타내는 사회적 기능을 포함한다. 이

것을 자연스럽게 인식한 학생들은 함수식에 사용된 변수 x, y가 무엇을 뜻하는지도 알려주어야 한다고 했으며, 그것을 식의 표현에 포함시켰다. 학생들은 함수를 표현한 수식과 문제 상황을 계속 연관 지어 문제 중심 학습에 임했으며, 수학 개념의 탐색이 문제해결 활동과 계속 연결되어 있음을 보여주었다.

128. HW: x : 고도
y : 기온

일차함수의 식을 세련화하는 과정에서 학생들은 두 식의 정의역에 x가 중복되어 있음을 발견했다. x값이 하나 정해지면 y값이 하나로 정해져야 한다는 함수의 정의를 생각해낸 어느 학생은 구간에 중복되어 있는 값이 한 쪽에만 속하도록 한 쪽의 등호는 삭제해야 한다고 주장했다. 모델링 활동을 통해 이 학생은 기존에 알고 있는 지식을 자연스럽게 수학 개념 탐색에 활용한 것이다.

130.
$$y = -\frac{1}{100}x + 29 \ (1000 \geq x \geq 0)$$
$$y = -\frac{1}{200}x + 24 \ (10000 \geq x > 1000)$$

학생들은 정의역에서 1000이 어느 식에 속해 있는 것인지를 토론하면서 $x > 1000$인지, $x \geq 1000$인지 결정했다. 학생들의 최종적인 수식 모델은 다음과 같았다.

132.
$$y = -\frac{1}{100}x + 29 \ (1000 \geq x \geq 0)$$
$$y = -\frac{1}{200}x + 24 \ (10000 \geq x > 1000)$$
(x :고도, y : 기온)

수학적 모델의 탐색 활동에서 학생들은 수학적 모델의 외적 표현 체계를 좀 더 정교하게 하려는 노력을 했으며, 이를 통해 식이 갖고 있는 의미에 대해서도 깊이 있는 이해를 하게 되었다. 수학에서의 표현 형식은 수학자들이 만들어 놓은 수학의 가공물 체계와 일치되어야 하며, 그런 이유로 학교 현장에서는 외적 표현이 교사들에 의해 고정된 지식으로 전달되는 경향이 있다. 수학적 모델링에서는 실제로 표현에 대한 개념 요소까지 학생 스스로 탐색해야 하므로 수학에서 사용되는 엄밀한 표현으로 발전될 수 있을지 의문이 될 수 있지만, 이 연구에 참여한 학생들은 표현의 세부적인 형식과 의미를 스스로 발전시켜 갔으며 그 타당성에 대해서도 동료와 함께 검증했다. 학생들이 세련화시킨 외적 표현은 학생들에게 내적 표상을 형성하게 하면서 가공물 체계와의 관계를 탐색하게 해 주었다. 그래프 표현은 학생들에게 패턴이 일정하지 않음을 확연하게 보여주었고 패턴의 변화가 어느 지점에서 일어나는지도 알게 해 주었고, 기울기가 다른 두 직선을 함수식으로 나타낼 때 어떤 매개변수가 변해야 하는지에 대해서도 생각하게 해 주었다.

산 위에서의 기온을 알아내야 하는 문제를 해결하면서 학생들은 일차함수의 표현과 y절편 등의 형식적인 내용을 학습할 수 있었다. 학생들은 모델링 활동에서 꺾어진 직선 모양의 일차함수 그래프를 고도와 기온의 관계식으로 묘사하여, 그래프와 함수식 모델을 도출하고 탐색했다. 일차함수는 종속변수가 독립변수의 일차식으로 표현되는 함수로, 중학교 1학년 학생들이 알고 있는 정비례를 포함한 상위 개념이다. 따라서 학생들이 일차함수를 표현하고 그것을 설명하는 것은 보다 고차원의 함수 개념을 받아들이고 그것을 사용했다는 증거라 할 수 있다. 특히, 정의역이 분할된 일차함수는 단순히 비례 관계에 의해 설명될 수 없기 때문에, 학생들은 함수에 대한 인식을 새로이

해야 한다. 독립변수인 x의 값이 하나로 정해지면, 종속변수인 y의 값이 하나로 정해진다는 함수의 정의를 재고해서, $y = ax$가 아닌 $y=ax+b$도 함수로 받아들여야 하는 것이다. 또 일차함수의 식에서 x의 계수와 상수항이 무엇인지 그래프와 관련한 탐색이 이루어져야 한다. 학생들은 문제를 해결하면서 이렇게 새로운 개념을 알아내고 학습하였고, 문제해결을 통한 수학 학습에 임할 수 있었다.

5. 교사의 안내

수학적 모델링에서 학생들은 여느 수학 수업보다 적극적인 활동자가 되고 스스로 학습을 진행시켜 나갈 수 있다. 이때 교사의 역할은 학생들이 문제 상황에 적합한 수학 모델을 도출하고 계획했던 수학적 성취를 이룰 수 있도록 돕는 것이다. 이 연구에서 수업을 이끈 교사는 모델-도출 활동에서 약간의 힌트를 주기도 했으나 개입을 자제하고 학생들이 자유롭게 생각을 표출하도록 했다. 다만 모델-도출 활동에서 학생들이 어떤 모델을 생성해야 할지 더 이상 진전하지 못할 때 힌트를 주고, 모델-탐색 활동에서 여러 표현을 만들도록 권하여 표현 간의 연결을 도왔다. 그리고 모델-탐색 활동에서 학생들의 모델에서 부족한 점이나 올바른 표현에 대하여 지도하였다.

수학적 모델링에서 교사는 수업을 장악하기보다 올바른 방향에 대한 제시나 정보의 활용, 문제를 해결하는 방법의 구상 등을 안내하고, 탐색된 모델의 타당화와 사회적 함의를 도출하는데 있어 수학 사회의 구성원 자격으로 역할을 담당한다. 이런 점에서 볼 때, 수학적 모델링에서는 학생들이 주도적인 역할을 하고 있으나 교사에게 더 많은 수업 준비와 수학 학습 지도의 철학과 수업 방법의 변화가 요구된다.

V. 결론 및 제언

수학 교육에서 문제해결은 많은 관심을 받아온 주제였으며, 그와 관련된 학습 지도와 연구 노력이 지속적으로 있어 왔다. 시대와 사회적 요구가 변하고 수학교육 철학의 변화로 현재 문제해결 교육은 문제해결을 통한 지도로 향하고 있으며, 이에 대해 본 연구는 수학적 모델링을 수학 교과의 문제 중심 학습으로서 새로운 문제해결 지도로 제안하였다. 실세계를 수학적 내용으로 해석하여 수학적 표현으로 나타내고 수학적 조작 과정을 거쳐 다시 실세계에 적용시키는 모델링 과정을 문제 중심 학습 방법으로 모색해 볼 수 있었다. 수학적 모델링은 문제 중심 학습의 장점을 수용하면서 수학 교육에서 강조해야 하는 개념, 원리 등에 대해서도 학습 지도에서 함께 다룰 수 있기 때문에, 문제해결을 통한 학습 지도로 적용하기에 알맞다.

수학적 모델링은 문제 상황을 해결하는 과정이기도 하지만 수학 개념을 도출하고 그에 대한 탐색과 적용을 하는 것이기도 하다. 수학이 어느 분야에서 활용될 수 있는지 깨달으면서 학생들이 문제해결을 통해 수학적 개념을 생성하고 조직해 나가도록 하는 것은 현재 교육과정에서 목표로 하고 있는 수학적 힘의 신장을 위해서도 필요하다. 수학적 모델링을 통해 학생들은 기본적인 원리와 개념의 학습 뿐 아니라 문제를 수학적으로 해석하고 해결하는 경험을 하게 되며 이로써 수학에 대한 긍정적인 태도와 인식을 갖게 될 수 있다.

이 연구에서 학생들이 도출한 수학 모델은 정의역에 따라 정의되는 일차함수이었다. 본 연구는 이 개념에 대해 학습하지 않은 상태에서 학생들 스스로 그 개념을 찾아 가는 것을 분석해 보았다. 학생들은 모델링을 통해 일차함수의 표현을 정교하게 하고 그에 대한 의미

를 파악하여 내적 표상을 발전시키려 했다. 이로써 학생들은 일차함수에 대하여 더 확실하고 분명한 이해를 갖게 되었으며, 함수의 표현에 대해서도 설득력 있고 타당한 설명을 할 수 있게 되었다. 그 과정에서 학생들은 수학 모델 즉 수학 개념을 이루는 개념 요소간의 상호작용을 촉진했으며, 외적 표현을 세련화하면서 그 의미를 파악해 갔다.

연구에 참여한 학생들이 수학에 재능이 있다고 판별된 영재이었기 때문에 모델링 수업이 효과적으로 진행되었을 수도 있다. 하지만 이를 통해 일반 학생들에게도 수학의 발견을 경험하고 수학의 유용성을 경험할 수 있는 학습지도가 지속적으로 모색될 수 있을 것이며, 그에 대한 연구가 후속적으로 진행되어야 한다.

본 연구에서는 수학 개념이 발전되는 것을 살펴보기 위해 모델 도출과 탐색 단계에 초점을 두어 진행된 수업을 분석하였으나 모델링 과정에 수학 모델을 적용하는 단계를 이어 진행할 수 있다. 수학 모델의 적용은 학생들이 탐색하여 사회적으로 공유된 모델이 다른 문제 상황에 적용될 수 있음을 확인하고, 학생들의 마음속에 지식으로 자리 잡은 수학 개념을 가지고 여러 가지 추론에 임하고 다른 개념과 연결시켜 볼 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 또 학생들이 직접 문제를 만들어 개념을 적용시켜 볼 수도 있다. 수학적 모델링 활동을 수학 모델 도출에 국한시키기보다 이러한 여러 절차를 통합하여 전개한다면, 수학에 대한 형식적 체계에 대한 지도와 사고를 요하는 고차적 문제해결까지도 연계한 수학 개념 학습 지도가 이루어질 것이며 그간의 수학 학습 지도에 대한 새로운 제안이 될 수 있을 것이다.

참고문헌

김부윤 · 이영숙(2003). 우리나라에서의 수학적 문제해결연구. **수학교육, 42**(2), 137-157.

김홍래(2000). 문제중심학습모형을 적용한 컴퓨터 교과 교수 · 학습 개선 방안. **한국정보교육학회 하계 학술발표논문집, 5**(2), 152-164.

신인선 · 권점례(2002). 문제 중심학습을 통한 초등학교 학생들의 수학적 태도 변화에 대한 연구. **수학교육, 41**(2), 189-202.

조연순(2001). 창의적 · 비판적 사고력과 교과지식의 융합을 위한 교수-학습 모형으로서의 문제중심학습(PBL) 고찰. **초등교육연구, 14**(3), 295-316.

조연순 · 우재경(2003). 문제중심학습(PBL)의 이론적 기초: 지식관과 교육적 가치. **교육학연구, 41**(3), 571-600.

최욱 · 이연경 · 김민수(2000). 초등학교에서의 인터넷활용 문제중심학습 모형. **초등교육연구, 14**(1), 329-354.

Harden, R. M., & Davis, M. H. (1998). The continuum of problem-based learning. *Medical Teacher, 20*(4), 317-322.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. In R. Lesh (ed.), *Mathematical thinking and learning, 5* (2&3), 109-129.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. In R. Lesh & H. M. Doerr (eds.), *Beyond constructivism* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum Associates.

Consideration of Mathematical Modeling as a Problem-based Learning Method

Kim, Sun Hee (KICE)

If students can use mathematics to solve their problems and learn the mathematical knowledge through it, they may think mathematics useful and valuable. This study is for the teaching through problem solving in mathematics education, which I consider in terms of the problem-based learning and mathematical modeling. I think mathematical modeling is applied to teaching mathematics as a problem-based learning. So I developed the teaching model, and showed the example that students learn the formal and hierarchic mathematics through mathematical modeling.

* key words : problem-based learning(문제 중심 학습), mathematical modeling(수학적 모델링)

논문접수 : 2005. 8. 2
심사완료 : 2005. 9. 6