



# 반응표면법에 의한 최적설계

□ 김성일, 홍정표 / 창원대학교 전기공학과

## 서론

환경 및 에너지 고갈 문제가 대두되면서 전기 에너지의 효율적인 사용을 위한 전기기기의 최적설계는 고효율, 고성능의 특성을 갖는 제품 개발에 필수적인 요소가 되었다.

일반적으로 공학적인 설계 문제는 주어진 요구 사항에 대해 최적의 해결책을 찾으려는 자연스러운 과정이다. 그러나 전기기기의 설계에 있어서는 많은 설계변수들과 그 설계변수들 사이의 상호작용 그리고 자기적인 비선형성 등과 같은 이유 때문에 매우 복잡해진다. 이러한 전기기기의 설계 문제에 기존 도함수에 기반을 둔 최적화 방법을 적용하는 것은 비효율적인 측면을 가지고 있다. 이는 대부분의 최적화 문제가 부여된 제약조건을 만족하는 목적함수를 최소 또는 최대화 시키는 작업이라 정의된다면 전기기기와 같은 복잡한 설계 문제에 있어서는 실질적인 목적함수 형태를 정의하는 것은 쉬운 일이 아니다. 그것은 설계변수들이 최적화할 대상과 어떤 관계를 가지고 있는지에 대해 수식적으로 정확히 나타내기 어렵기 때문이다.

최근 전기기기 설계에 있어 효과적인 최적화 방법으로 주목 받고 있는 반응표면법(Response Surface Method : 이하 RSM)은 통계적인 근사 기법으로써 여러 설계변수가 복합적인 작용을 하여 어떤 시스템의 응답을 생성할 때, 이들의 관계를 근사 다항식의 형태

로 만든 뒤 이를 이용하여 최적화를 수행하는 방법이다. 또한 이 근사 다항식은 설계변수의 함수로써 설계 공간내의 시스템 응답을 쉽게 예측할 수 있게 해줄 뿐만 아니라 제약조건을 가지는 실질적인 목적함수를 쉽게 만들 수 있어 최적화 수행에 필요한 계산 시간도 많이 단축할 수 있게 해준다. 하지만 설계 영역의 선택에 따라 최적화의 정도(精度) 및 실험의 반복 횟수가 달라지며, 설계변수가 많아지면 근사 다항식을 만들기 위해 수행되어야 하는 실험의 수가 증가하게 된다.

본 글에서는 영구자석 매입형 동기전동기(Interior Permanent Magnet Synchronous Motor : 이하 IPMSM)의 성능을 향상시키는 최적설계 과정을 통해 RSM에 대해 좀더 자세히 설명하고자 한다.

## 본론

### RSM의 개념

RSM은 여러 개의 설계변수  $x_1, x_2 \dots x_k$ 가 복합적인 작용을 하여 어떤 반응변수  $\eta$ 에 영향을 주고 있을 때, 이러한 반응의 변화가 이루는 반응표면에 대한 통계적인 분석방법을 말한다. 즉, 임의의 시스템으로부터 관측된 자료를 근거로 실제 응답과  $k$ 개의 설계변수들 사이의 인과관계를 규명하게 된다. 여기서, 설계변수는 반응에 영향을 주는 독립변수 또는 인자를 말하고, 반응변수는 설계변수의 영향을 받아서 어떤 반응을 나타

내는 종속변수를 말한다. 설계변수에 대응되는 응답 또는 출력값은 일반적으로 실제 실험이나 컴퓨터에 의한 해석으로 얻어지게 된다.  $k$ 개의 설계변수에 대한 실제 응답  $\eta$ 는 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta = F(x_1, x_2 \dots x_k) \quad (1)$$

실제로 식 (1)과 같은 반응함수  $F$ 는 미지의 함수로 취급되며, 설사 알려져 있다 하더라도 매우 복잡한 함수의 형태로 표현되거나 나타내기가 매우 어려워진다. 따라서 반응함수로 가정되는 간편하고 실용적인 반응 표면 모형은  $k$ 개의 설계변수에 대한 중회귀 모형 (Multiple regression model)으로 나타내며, 이 가정은 실험자가 흥미를 가지고 있는 설계영역에서만 만족하면 된다.

대부분의 경우에 실제 응답함수  $F$ 의 근사함수인  $y$ 는 Taylor 급수 전개를 기본으로 하여 1차 또는 2차의 다항식 모형으로 나타낼 수 있게 된다. 여기서 2차 다항식 모형은 다양한 함수의 모양을 표현할 수 있을 뿐만 아니라 근사 다항식의 계수를 쉽게 구할 수 있으며 상당히 많은 연구에 의하여 그 유효성이 검증되어 있다. 그러나 3차 이상의 고차 다항식을 반응표면 모델로 가정한다면, 근사 다항식의 계수를 추정하기 위한 실험의 수가 많아지며, 반응표면 모델의 비선형성이 증가하게 되어 효과적인 최적설계를 수행할 수 없게 된다. 따라서 실제 응답함수  $F$ 와 2차 근사함수의 관계는 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{j=1}^k \beta_{jj} x_j^2 + \sum_{i \neq j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (2)$$

여기서 변수  $x_1, x_2 \dots x_k$ 는 설계변수,  $\beta$ 는 회귀계수,  $\epsilon$ 는 응답의 통계적인 오차항으로, 평균이 0이고 분산  $\sigma^2$ 을 가지는 정규분포로 가정한다.

따라서 식 (2)의 근사함수로부터  $n$ 개의 실제 관측한 자료에서 추정된 출력값  $y$ 는 행렬의 형태로 식 (3)과 같이 정리된다.

$$y = X\beta + \epsilon \quad (3)$$

여기서  $X$ 는 설계변수의 행렬,  $\beta$ 는 회귀계수의 벡터,  $\epsilon$ 는 임의의 오차 벡터이다.

한편 식 (3)에서 회귀계수 벡터는 임의의 오차의 제

곱합을 최소로 하는 최소자승법을 이용하여 추정한다. 최소자승 함수는 식 (4)와 같다.

$$L = \sum_{i=1}^n \epsilon^2 = \epsilon' \epsilon = (y - X\beta)' (y - X\beta) \quad (4)$$

추정된 벡터  $b$ 는 식 (5)를 만족해야 하며, 그 값은 식 (6)과 같이 표현할 수 있다. 또한 추정된 벡터  $b$ 에 의하여 추정된 근사함수  $\hat{y}$ 은 식 (7)과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{b = -2X'y + 2X'Xb = 0} \quad (5)$$

$$b = (X'X)^{-1} X'y \quad (6)$$

$$\hat{y} = Xb \quad (7)$$

여기서 행렬  $X'$ 은 행렬  $X$ 의 전치행렬이다. 그림 1은 지금까지의 RSM 개념을 간단히 나타낸 것이다.

### 반응표면법의 적용

그림 2는 RSM을 적용하여 성능을 향상시키기 위한 IPMSM의 회전자 형상을 나타내고 있으며, 표 1은 해석조건을 나타낸다.

우선 RSM을 적용하기에 앞서 반응값과 설계변수를

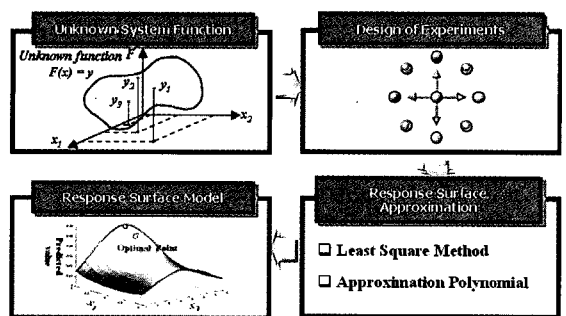


그림 1 RSM의 개념

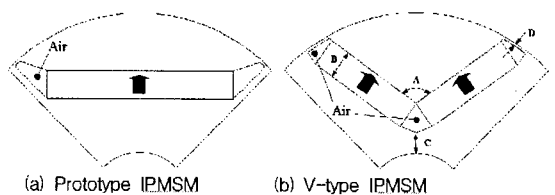


그림 2 해석모델

표 1 IPMSM의 해석조건

항 목	Prototyep	V-type
극수/슬롯수	4극/24슬롯	
공극 길이	0.3[mm]	
권선 방식	분포권	
영구자석	1.2[T]	
정격 출력	3.5[kW]	
정격 전압	42[V]	
정격 전류	100[A]	
정격 속도	3500[rpm]	
영구자석 길이/개수	27[mm]/4개	15[mm]/8개

표 2 2<sup>3</sup> FFD의 실험계획표

실험순서	A[°]	B[mm]	C[mm]	Ratio[%]
1	100(-1)	3.5(-1)	1.0(-1)	70.09
2	120(+1)	3.5(-1)	1.0(-1)	32.17
3	100(-1)	4.5(+1)	1.0(-1)	55.29
4	120(+1)	4.5(+1)	1.0(-1)	32.32
5	100(-1)	3.5(-1)	3.5(+1)	72.72
6	120(+1)	3.5(-1)	3.5(+1)	33.89
7	100(-1)	4.5(+1)	3.5(+1)	72.31
8	120(+1)	4.5(+1)	3.5(+1)	27.55
9	110(0)	4.0(0)	2.25(0)	52.83

결정해야 한다. 반응값은 평균토크와 토크 리플의 비(Ratio)로, 설계변수는 반응값에 영향을 줄 수 있는 인자로 결정하였다. 각각의 설계변수는 다음과 같다.

“A”, 두 영구자석 사이의 각, “B”, 영구자석 두께, “C”, 축으로부터 높이, “D”, link 폭. 이 중 설계변수 D는 누설 자속 및 기계적 강성 등을 고려하여 0.4[mm]로 고정시켰다. 만약 설계변수가 이보다 더 많고 어느 변수가 반응값에 중요한 영향을 미치는지 알 수 없을 때는 일부요인실험(Fractional Factorial Design) 등을 통해 주요 설계변수들을 고를 수 있으며, 이를 screening 이라고 부른다.

두 번째로 RSM을 적용할 설계영역을 설정해야 한다. 설계영역은 이전의 실험 데이터나 설계자의 경험에 의존하는 경우가 많다. 그리고 그 외에는 설계변수 하나하나를 개별적으로 변화시켜 그 반응을 살핀 후 영역을 설정하게 되는데 이는 많은 모델링과 해석이 필요하게 되며 설계변수간의 상호작용을 정확하게 예측하기 어려워진다. 따라서 본 논문에서는 위와 같은

불합리한 상황을 피하면서도 객관적인 데이터를 얻기 위해 실험계획법 중의 하나인 2<sup>3</sup> 완전요인실험(Full Factorial Design : 이하 FFD)을 수행하였으며 그 결과를 바탕으로 RSM에 적용하기 위한 설계영역을 설정하였다.

FFD의 이점은 설계변수들의 모든 조합을 조사할 수 있고 각 설계변수의 주효과 및 교호작용을 평가할 수 있다는 것이다. 그러나 설계변수가 많아지면 실험의 횟수가 기하급수적으로 많아지는 단점이 있다. 표 2는 각 설계변수의 변화에 따른 평균토크와 토크 리플의 비(Ratio)를 조사하기 위한 2<sup>3</sup> FFD의 실험계획표 및 결과를 나타낸다. 그림 3과 그림 4는 각 설계변수의 주효과 및 교호작용을 각각 나타내고 있다. 여기서 주효과와 교호작용에 대해 간단히 설명하면, 주효과는 각 설계변수 (+1)수준에서의 반응값들의 평균과 (-1)수준에서의 반응값들의 평균 차이를 나타내는 것이며, 교호작용은 어떤 설계변수의 낮은 수준에서 다른 설계변수

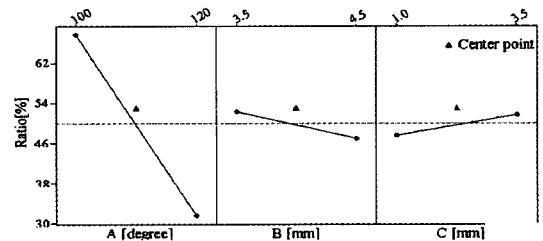


그림 3 각 설계변수의 주효과

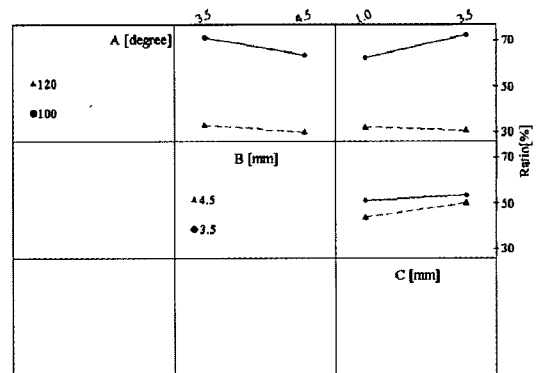


그림 4 각 설계변수의 교호작용 효과

표 3 중심합성계획

실험순서	A[°]	B[mm]	C[mm]	Ratio[%]
1	-1.0	-1.0	-1.0	33.07
2	1.0	-1.0	-1.0	31.64
3	-1.0	1.0	-1.0	32.61
4	1.0	1.0	-1.0	32.32
5	-1.0	-1.0	1.0	26.17
6	1.0	-1.0	1.0	26.11
7	-1.0	1.0	1.0	26.23
8	1.0	1.0	1.0	27.69
9	-α	0.0	0.0	29.15
10	α	0.0	0.0	29.77
11	0.0	-α	0.0	27.62
12	0.0	α	0.0	28.55
13	0.0	0.0	-α	34.56
14	0.0	0.0	α	25.93
15	0.0	0.0	0.0	27.89

표 4 설계변수의 범위

설계 변수	설계변수의 수준				
	-α	-1.0	0.0	1.0	α
A[°]	114.64	116	118	120	121.36
B[mm]	4.23	4.3	4.4	4.5	4.57
C[mm]	0.32	1.0	2.0	3.0	3.68

의 낮은 수준과 높은 수준의 평균 변화가 어떤 설계변수의 높은 수준에서도 동일하면 두 설계변수 사이엔 교호작용이 없는 것이며 그와 반대일 땐 교호작용이 존재한다고 볼 수 있다.

끝으로 2<sup>3</sup> FFD를 수행한 결과, 각 설계변수 사이의 교호작용 및 곡면적인 변화가 크게 없으므로 평균토크와 토크 리플의 비를 개선하기 위한 설계영역은 주효과 그래프에 나타난 변화에 의해 결정되었다.

세 번째로 주어진 설계영역 안에서 설계변수와 반응값 사이의 관계식을 구하기 위한 실험계획법을 수행해야 한다. 일반적으로 중심합성계획법을 많이 사용하는데 이는 3수준의 FFD보다 적은 횟수의 실험으로 반응곡면을 추정할 수 있으며, 축점을 결정하는 계수 값에 따라서 실험 계획의 직교성 또는 회전성을 부여할 수 있기 때문이다. 표 3과 표 4는 각각 중심합성계획표 및 설계영역을 나타내고 있다.

네 번째로 중심합성계획을 통해 얻은 결과를 바탕으로 식 (3)~(6)의 과정을 거쳐 구한 V-type IPMSM의 평

균토크와 토크 리플의 비를 나타내는 2차 근사 다항식은 식 (8)과 같다.

$$\hat{y}_{ratio} = 3152.5 - 41.9A - 281.2B - 36.9C + 0.1A^2 + 9.5B^2 + 0.9C^2 + 1.7AB + 0.2AC + 1.8BC \quad (8)$$

마지막으로 이 근사 다항식이 얼마만큼의 정확성을 가지는지를 분석해야 한다. 다시 말하면 유한요소법에 해석된 값과 근사 다항식을 통해 얻어지는 값 사이에 어느 정도의 근사 오차가 존재하는지를 확인해야 한다. 이것을 분산 분석이라고 하며, 그 방법에는 F-test, t-test, R<sup>2</sup>(결정계수), adjust R<sup>2</sup> 등이 있다. 이 중 R<sup>2</sup>, adjust R<sup>2</sup>를 나타내면 각각 식 (9)와 식 (10)과 같다.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad (9)$$

$$adjust R^2 = 1 - \frac{SSE/(N-k)}{SST/(N-1)} \quad (10)$$

여기서, N은 중심합성계획의 총 실험 횟수, k는 설계변수의 개수를 나타내며, SST와 SSR 그리고 SSE는 다음과 같다.

$$SST = \sum_{a=1}^N (y_a - \bar{y})^2 \quad (11)$$

$$SSR = \sum_{a=1}^N (\hat{y}_a - \bar{y})^2 \quad (12)$$

$$SSE = \sum_{a=1}^N (y_a - \hat{y}_a)^2 \quad (13)$$

여기서 y는 실제 반응값,  $\bar{y}$ 는 실제 반응값들의 평균,  $\hat{y}$ 은 근사 다항식에 의한 추정된 반응값이다. R<sup>2</sup>와 adjust R<sup>2</sup>는 0과 1사이의 값을 가지며, 1에 가까울수록 근사화가 잘 되었음을 의미한다.

위와 같은 과정을 거쳐 최적설계를 수행하기 위해 설계변수와 평균토크와 토크 리플의 비를 나타내는 2차 근사 다항식을 목적함수로 정의하고 각 변수들의 상한과 하한을 다음과 같이 제한하였다. 최적화 문제의 해를 구하기 위해서 순차 이차계획법을 사용하였다.

Objective function : minimize  $f(x) = \hat{y}_{ratio}$

$$114.64 \leq A \leq 121.36$$

Subject to :  $4.23 \leq B \leq 4.57$

$$0.32 \leq C \leq 3.68$$

표 5 최적조건

설계 변수	최적조건	Ratio by RSM	Ratio by FEA
A[°]	117.75	24.98[%]	25.23[%]
B[mm]	4.23		
C[mm]	3.68		

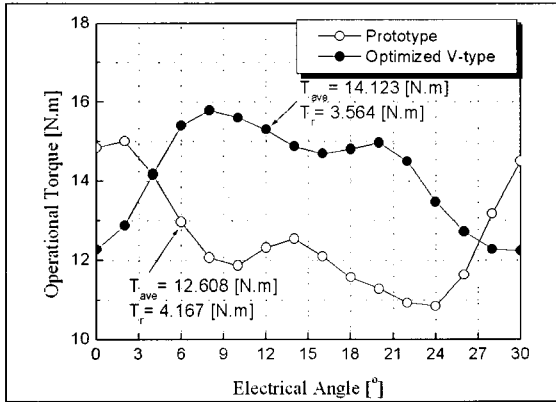


그림 5 Prototype과 optimized V-type IPMSM 발생 토크 비교

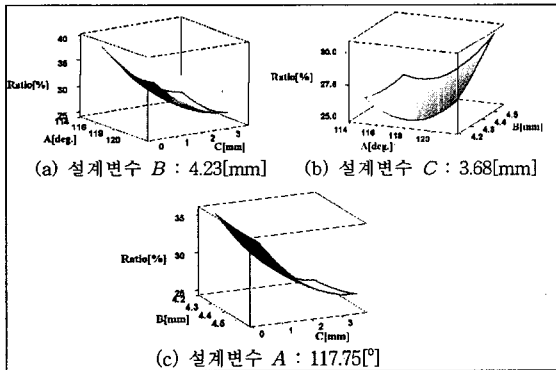


그림 6 평균토크와 토크 리플 비(Ratio)의 반응표면

최적화 수행 결과 토크 리플은 14.5%, 평균 토크는 12%가 개선되었으며, 평균토크와 토크 리플의 비는 prototype에 비해 8.2% 감소되었다. 또한 R<sup>2</sup>와 adjust R<sup>2</sup>이 각각 0.994 및 0.99로 근사 다항식의 정확성이 매우 높다는 것을 알 수 있다. 표 5는 평균토크와 토크 리플의 비가 최소가 되는 최적 점을 나타내고 있으며, 그림 5는 prototype과 최적화된 V-type IPMSM의 성능 비교를 보여주고 있다. 그림 6에서는 설계변수의 변화에 따른 반응표면의 변화 양상을 나타내고 있다.

## 결론

RSM은 설계변수와 응답에 대한 관측 자료로부터 근사 다항식을 만듦으로써 제약조건을 가지는 실질적인 목적함수를 쉽게 만들 수 있었으며, 최적해를 찾기 위한 계산 시간도 많이 단축할 수 있었다. 또한 기존의 최적화 방법들이 전역적 또는 국부적인 최적해만을 제공하는 반면에 설계변수의 변화에 따른 기기의 성능 변화에 대한 전반적인 현상을 쉽게 예측할 수 있었다. 따라서 통계적 근사방법인 RSM은 설계영역 설정에 있어서의 문제만 개선된다면 전기기기의 최적설계 방법으로서 유용할 것으로 사료된다.

## [참고문헌]

- [1] J. T. Li, Z. J. Liu, M. A. Jabbar, and X. K. Gao, "Design optimization for cogging torque minimization using response surface methodology", IEEE Trans.Magn., Vol 40, No. 2, pp. 1176-1179, March 2004.
- [2] S. Vivier, F. Gillon, and P. Brochet, "Optimization techniques derived from experimental design method and their application to the design of brushless direct current motor", IEEE Trans.Magn., Vol 40, No. 2, pp. 1176-1179, March 2004.
- [3] 김영균, "확률반응표면법을 이용한 전기기기의 공차분석 및 설계에 관한 연구", 박사학위논문, 창원대학교, 2003.
- [4] 최재학, "반응표면 모델링을 이용한 전자기 장치의 근사 최적설계 연구", 박사학위논문, 한양대학교, 2005.
- [5] John M. Miller, Propulsion systems for hybrid vehicles, The Institution of Electrical Engineers, London, UK, 2004.
- [6] T. Ohnishi, and N. Takahashi, "Optimal design of efficient IPM motor using finite element method," IEEE Trans.Magn., Vol 36, No. 5, pp. 3537-3539, March 2004.
- [7] Douglas C. Montgomery, "Design And Analysis of Experiments", John Wiley & Sons, 2001.
- [8] R. H. Myers, D. C. Montgomery, "Response surface methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments", John Wiley & Sons, 1995.
- [9] 박성현, 현대실험계획법, 민영사, 2001.
- [10] 박성현, 회귀분석, 민영사, 2001.