

< 논문 >

플로케이론을 이용한 일반회전체의 복소 모드해석

한 동 주[†] · 이 종 원^{*}

(2005년 3월 17일 접수, 2005년 9월 12일 심사완료)

Complex Modal Analysis of General Rotor System by Using Floquet Theory

Dong-Ju Han and Chong-Won Lee

Key Words : Floquet Theory(플로케이론), General Rotor System(일반회전체), Periodically Time-Varying System(주기적 시변계), Adjoint Problem(수반문제), Modal Analysis(모드해석), Stability(안정성), Harmonic Analysis(조화해석)

Abstract

Based upon the Floquet theory, the complex modal solution for general rotor systems with periodically time-varying parameters is newly derived. The complete modal response can be obtained from the orthonormality condition between the time-variant eigenvectors and the corresponding adjoint vectors. The harmonic solutions such as the response and *directional spectra* patterns are then derived in terms of harmonic modes whose coefficients are obtained from the modal analysis. The stability analysis by the Floquet's transition matrix and the eigen-analysis is also performed.

1. 서 론

주기적 시변계의 대표적인 경우에는 회전체를 들 수 있다. 회전체는 일반 산업기계는 물론 실생활에 보편적으로 사용되는 주요 기계시스템으로서, 성능 및 내구성 향상을 위해서는 설계/제작은 물론 정확한 시스템의 특성 규명과 이론적인 해석기술 등이 필수적이다. 회전체의 동특성 규명을 위한 이론적인 해석모형을 개발하기 위해 회전시스템을 크게 네 가지로 대별하면, 정지부(stator)와 회전부(rotor)가 대칭(symmetric)인 등방회전체(isotropic rotor), 정지부가 비대칭(asymmetric)이고 회전부가 대칭인 비등방회전체(anisotropic rotor), 정지부가 대칭이고 회전부가 비대칭인 비대칭회전체(asymmetric rotor), 정지부와 회전부가 모두 비대칭인 일반회전체(general rotor)가 있다.⁽¹⁾

그간 일반회전체를 제외한 나머지 회전체들에

대한 동적해석을 포함한 모드해석은, Lee 등^(1,2)에 의해서 복소모드를 이용한 방향성스펙트럼 및 주파수응답함수(*directional spectrum and frequency response: dFRFs*) 예측기법이 개발되어 일반 구조물과 구분되는 비 자기수반(non-self-adjoint) 특성과 방향성(*directivity*)의 개념을 정립함으로써 정확한 모드분석을 가능하게 하여 일반구조물과의 특이성을 제시한 바 있고, 회전체 뿐만 아니라 일반구조물에 있어서도 포괄적인 모드해석을 가능하게 하였다.^(1~3)

여기서 비대칭회전체 중에서도 축의 개폐균열(*breathing crack*)이나 축어긋남(*misalignment*) 등이 아닌 단순히 축강성이나 회전체 질량 또는 관성모멘트 불균형, 열린균열(*open crack*) 등에 의한 비대칭의 경우는 회전좌표계(*rotating coordinate*)를 이용한 좌표계 변환을 통해서 시불변계로 변환되어 일반적인 시불변계의 특성을 그대로 반영하게 되므로, 시불변계의 해석범주로 취급된다.^(1,2) 따라서 본 연구에서는 이러한 단순 비대칭회전체가 아닌 일반적인 주기적 시변계(*periodically time-varying system*)로서의 일반회전체를 대상으로 한다.

시변계는 비 자율계(*non-autonomous system*)로 구분되어 계의 고유특성을 일관적으로 정할 수 없으

[†] ㈜썬에어로시스 기술연구소
E-mail : djhan@sunaerosys.com
TEL : (041) 864-2177 FAX : (041) 864-2035

^{*} 한국과학기술원 기계공학과

나,⁽⁷⁾ 주기적인 경우에는 천이함수(transition function)를 이용한 플로케(Floquet)이론을 바탕으로 연구가 진행되어 왔다.^(3,4) 대개 주기적 시변계는 좌표 치환기법에 의해 시불변계로 변환하는 수학적 해로 취급하였으나,⁽³⁾ 모드형상으로서의 도출은 곤란하였다. 이에 관해서는 Irretier(1993)에 의해 실수영역에서 모드응답 및 주파수영역 해석에 관한 연구가 있었으나⁽⁵⁾ 시변 우.좌고유벡터간의 모드관계, 모드변수의 도출을 통한 해의 존재성, 주파수응답함수의 명백한 형태(definite form) 등에 대한 부족으로 인하여 실제적인 적용에는 한계가 있었다. 다만 Robert(1984)에 의해 모드제어를 위한 모드해석의 기초적인 근거를 제시한 바 있고,⁽⁴⁾ Sinha(1996)는 이의 수치해를 위한 기법을 제시하였다.⁽³⁾ 그러나 이들 결과들은 계의 근본해에만 입각하였을 뿐이고 입출력에 근거한 계의 완전한 응답 모드특성에 대해서는 연구된 바가 없다. 여기서 주기적 시변계의 입출력 모드해석을 위해서는 입력특성에 대한 모드형태의 분리가 가능하여야 하는데, 이를 위해서는 수반문제로부터 고유벡터(eigenvector)와 그의 수반벡터(adjoint vector)가 직교성을 갖기 위한 조건이 선행되어야 한다.

본 연구에서는 이러한 주기적 시변계로 대변되는 일반회전체의 모드해석을 위해, 플로케이론을 바탕으로 수반문제를 도출하여 직교성을 유도하고, 그간 시불변계에서 얻어진 복소 모드해석의 연구결과^(1,2)를 이용하여 완전한 모드형태의 해를 제공한다. 이를 조화해(harmonic solution)를 통해 확인함으로써, 시불변계에서 확인된 복소 모드기법의 장점을 주기적 시변계의 모드해석에 확장 응용될 수 있도록 새로이 제시하고자 한다.

2. 일반회전체의 복소 모드해석

2.1 운동방정식의 설정

베어링 질량효과를 무시한 Fig. A-1 과 같은 xyz 좌표계와 비대칭 축과 원판, 비대칭 베어링부로 구성된 일반회전체의 복소 운동방정식은 다음과 같다.^(1,2)

$$M_r \ddot{\mathbf{p}}(t) + C_r \dot{\mathbf{p}}(t) + K_r \mathbf{p}(t) + \{C_b \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + K_b \bar{\mathbf{p}}(t)\} + e^{j2\Omega t} \{M_r \ddot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + C_r \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + K_r \bar{\mathbf{p}}(t)\} = \mathbf{g}(t). \quad (1)$$

여기서 $\bar{\mathbf{p}}(t)$ 는 복소 좌표벡터 $\mathbf{p}(t)$ 의 복소공액을 표시하며 각 변수와 구성요소는 부록에 명시하였다. Nx1 응답벡터 $\mathbf{p}(t)$ 와 입력벡터 $\mathbf{g}(t)$ 는 다음과 같은 실수성분의 응답벡터 $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ 와 입력벡터

$\mathbf{f}_y(t), \mathbf{f}_z(t)$ 로 이루어진다.

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{y}(t) + j\mathbf{z}(t), \quad \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{y}(t) - j\mathbf{z}(t), \quad (2)$$

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}_y(t) + j\mathbf{f}_z(t), \quad \bar{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{f}_y(t) - j\mathbf{f}_z(t),$$

여기서 j 는 허수부, Ω 는 회전수, $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 는 NxN 복소 질량, 감쇠, 탄성행렬을 각각 표시하는데, 이때 하첨자 f, b, r 은 등방, 비등방, 비대칭 성분을 각각 의미한다.

식 (1)을 다시 정리하면

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3)$$

단,

$$\mathbf{q}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \bar{\mathbf{p}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \bar{\mathbf{g}}(t) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r e^{j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{M}}_r e^{-j2\Omega t} & \bar{\mathbf{M}}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_b + \mathbf{C}_r e^{j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{C}}_b + \bar{\mathbf{C}}_r e^{-j2\Omega t} & \bar{\mathbf{C}}_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r & \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r e^{j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{K}}_b + \bar{\mathbf{K}}_r e^{-j2\Omega t} & \bar{\mathbf{K}}_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

식 (3)을 상태공간형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (5)$$

여기서,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{C}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

2.2 모드응답 해석

2.2.1 고유값 및 고유/수반벡터(eigenvector and its adjoint)의 직교성 유도

식 (5)와 같은 주기적 시변계에 대해 플로케이론으로부터 모드응답 형태의 해를 유도한다. 천이함수, $\Phi(t)$ 를 이용하여 4Nx1 상태벡터 $\mathbf{w}(t)$ 의 다음과 같은 근본해로부터⁽⁵⁾

$$\mathbf{w}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{w}(0), \quad (7)$$

여기서 $\Phi(t, 0)$ 는 다음과 같은 천이식을 만족하며 초기값은 $\Phi(0, 0) = \mathbf{I}_{4N \times 4N}$ 을 갖는다.

$$\dot{\Phi}(t, 0) = [\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)]\Phi(t, 0). \quad (8)$$

이 식에 대해서 플로케이론을 적용하면 $\Phi(t, 0)$ 가 다음과 같이 $\mathbf{R}(t), \mathbf{J}$ 로 분리되고⁽⁴⁾

$$\Phi(t,0) = \mathbf{R}(t) e^{Jt} \mathbf{R}^{-1}(0), \quad (9)$$

\mathbf{J} 는 대각항이 λ_i ($i = 1 \sim 4N$)로 구성된 조르단 형태의 행렬이고 이때의 λ_i 는 *Poincare* 지수 (exponent)로서, 시불변계에서는 고유값의 역할을 하게 된다. 이때 행렬, $\mathbf{R}(t)$ 는 식 (6)의 계의 주기와 같은 주기를 갖게 되며 시불변계일 경우는 고유 벡터로 구성된 행렬이 된다.

식 (9)는 한주기 T (식 (4)로부터 π/Ω)에 대해 $\mathbf{R}(t)$ 의 주기성의 관계인 $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$ 와 λ_i 로 구성된 조르단 행렬, \mathbf{J} 에 대해 다음과 같다.

$$\Phi(T,0) = \mathbf{R}(0) e^{JT} \mathbf{R}^{-1}(0), \quad (10)$$

이때 $\mathbf{R}(0)$ 는 행렬 $\Phi(T,0)$ 의 고유벡터로 구성된 행렬이고 다음 식 (11)로부터 후에 안정성 문제를 논할 ω_i 는 $\omega_i = e^{\lambda_i T}$ 인 관계를 갖는다.

$$[\Phi(T,0) - \omega \mathbf{I}] \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

식 (7),(9)를 식 (5)에 대입하면 다음과 같고

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = [\mathbf{A}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)] \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t) \mathbf{J}. \quad (12)$$

이 식은 시불변계일 경우 λ_i 는 고유치가 되며 일반적인 고유치문제로 귀착된다.

$-\left[\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t)\right]^T$ 와 결부시킨(단, T 는 전치를 표시하며 이하같다) 수반문제(adjoint problem)⁽⁷⁾

$$\dot{z}(t) = -\left[\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t)\right]^T z(t), \quad (13)$$

로부터 식 (12)와 같은 수반행렬(adjoint matrix) $\bar{\mathbf{L}}(t)$ 를

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}}(t) = -\left[\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t)\right]^T \bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}(t) \mathbf{J}, \quad (14)$$

로부터 구할 수 있고, 식 (14)를 다시 쓰면

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}}(t)^T = -\bar{\mathbf{L}}(t)^T [\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)] + \mathbf{J}\bar{\mathbf{L}}(t)^T. \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}(t) = \mathbf{I}$ 를 미분하고 이를 식 (12)에 대입하면

$$\dot{\mathbf{R}}^{-1}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{A}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)] + \mathbf{J}\mathbf{R}^{-1}(t), \quad (16)$$

로부터 $\mathbf{R}^{-1}(t)$ 구할 수 있다. 이를 식 (15)와 비교하면

$$\bar{\mathbf{L}}(t)^T \mathbf{R}(t) = \mathbf{I} \quad (17)$$

의 직교관계(orthonormality condition)를 얻는다. 이 식을 다시 쓰면

$$\mathbf{l}(t)_i^T \mathbf{r}(t)_j = \delta_{ij} \quad (18)$$

여기서 $\mathbf{r}_j(t)$, $\mathbf{l}(t)_i$, $\mathbf{I}(t)_i$ 는 각각 $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ 의 j -th, i -th 열벡터 이고 δ_{ij} 는

$$\delta_{ij} = 1, \quad \text{: when } i=j, \quad 0 \text{ : otherwise.} \quad (19)$$

2.2.2 고유값, 고유/수반벡터의 관계식

식 (5)의 제차방정식 (homogeneous equation)에

$$\mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{r}(t)\eta(t) \text{ 로부터 얻어진 } \mathbf{q}(t) = \mathbf{u}_c(t)\eta(t)$$

를 식 (12)와 함께 대입하면 고유값에 대해서는

$$\mathbf{r}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_c(t) + \lambda \mathbf{u}_c(t) \\ \mathbf{u}_c(t) \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

이고, 식 (12)는 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left[(\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)) - \lambda \mathbf{I} \right] \mathbf{r}(t). \quad (21)$$

마찬가지로 수반벡터에 대해서도 $\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \\ \boldsymbol{\alpha}(t) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{l}}(t)\zeta(t)$

과 같은 관계로부터 $\bar{\mathbf{l}}(t) = \bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{l}}(t)$ 로 정의할 경우 식 (14)와 함께 식 (13)에 대입하면 다음과 같고

$$\bar{\mathbf{l}}(t) = \begin{Bmatrix} -\dot{\bar{\mathbf{v}}}_c(t) + \left(\lambda - \left[\bar{\mathbf{M}}(t)\bar{\mathbf{M}}^{-1}(t) \right]^T \right) \bar{\mathbf{v}}_c(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_c(t) \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

식 (14)는 다음과 같다.

$$\dot{\bar{\mathbf{l}}}(t) = -\left[(\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t))^T - \bar{\lambda} \mathbf{I} \right] \bar{\mathbf{l}}(t), \quad (23)$$

여기서 고유 및 수반벡터는 각각

$$\mathbf{u}_c(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_c(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{Bmatrix} \text{ 으로 표시된다.}$$

2.2.3 고유값, 고유/수반벡터의 유도

“임의 시간의 해는 한주기에서의 해를 기본으로 주기적인 형태로 표시된다”는 플로케 이론으로부터 우.좌고유벡터 $\mathbf{u}_c(t)$, $\mathbf{v}_c(t)$ 는 다음과 같이 급수해 형태로 표시된다.^(7,9)

$$\mathbf{u}(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_k e^{j2k\Omega t}, \quad \dot{\mathbf{u}}(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{u}}_k e^{j2k\Omega t}, \quad (24a)$$

$$\mathbf{v}(t) \equiv \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_s e^{j2s\Omega t}, \quad \dot{\mathbf{v}}(t) \equiv \sum_{s=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}_s e^{j2s\Omega t}, \quad (24b)$$

여기서 계수로 표시된 모드변수 \mathbf{u}_k , $\dot{\mathbf{u}}_k$, \mathbf{v}_s , $\dot{\mathbf{v}}_s$ 를 구하기 위해, 두 경우를 고려할 수 있다. 우선 엄밀하게는, 식 (11)로부터 고유값을 구하고 식 (12)

및 식 (18)로부터 우.좌고유벡터를 이용하여 구할 수 있으나 고유값들 중 일부 지배적인 값 이외에는 수치해석상 많은 오차를 유발할 수 있어 비현실적이다. 다만 고유값중 지배적인 것을 이용하여 안정성 해석에 유용하게 사용할 수는 있다. 다른 하나는, 식 (26)의 형태를 유도된 고유값의 관계식인 식 (20)~(23)에 직접 대입하거나, 이로부터 유도된 고유값문제 $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}_k(t)e^{t'}$ 에 대입하여 구하는 것으로 전자보다 효과적이다. 후자의 방법을 사용하면, 고유값문제로부터

$$\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{u}(t)e^{t'} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_k e^{(j2k\Omega + \lambda)t}, \quad (25a)$$

$$\bar{\mathbf{p}}(t) \equiv \bar{\mathbf{u}}(t)e^{t'} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k e^{(j2k\Omega + \lambda)t}. \quad (25b)$$

이를 제차식 (3)에 대입하면 각 시간지수값에 대한 항등관계(harmonic balance)로부터 다음과 같이 $\mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{u}}_k$ 에 대한 선형방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{D}}_1 & & & & & \\ \mathbf{C}_1(\lambda) & \mathbf{A}_1(\lambda) & \mathbf{E}_0(\lambda) & & & & \mathbf{0} \\ & \bar{\mathbf{F}}_1(\lambda) & \bar{\mathbf{B}}_0(\lambda) & \bar{\mathbf{D}}_0(\lambda) & & & \\ & & \mathbf{C}_0(\lambda) & \mathbf{A}_0(\lambda) & \mathbf{E}_{-1}(\lambda) & & \\ \mathbf{0} & & & \bar{\mathbf{F}}_0(\lambda) & \bar{\mathbf{B}}_{-1}(\lambda) & \bar{\mathbf{D}}_{-1}(\lambda) & \\ & & & & \mathbf{C}_{-1}(\lambda) & \mathbf{A}_{-1}(\lambda) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_0 \\ \mathbf{u}_0 \\ \hat{\mathbf{u}}_{-1} \\ \mathbf{u}_{-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

이는 3N 폭(band)을 갖는 힐(Hill)의 행렬형태를 갖고, 여기서 각각의 동강성계수(dynamic stiffness matrices)는

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= (j2k\Omega + \lambda)^2 \mathbf{M}_r + (j2k\Omega + \lambda) \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r, \\ \bar{\mathbf{B}}_k &= (j2k\Omega + \lambda)^2 \bar{\mathbf{M}}_r + (j2k\Omega + \lambda) \bar{\mathbf{C}}_r + \bar{\mathbf{K}}_r, \\ \mathbf{C}_k &= (j2k\Omega + \lambda) \mathbf{C}_b + \mathbf{K}_b, \\ \bar{\mathbf{D}}_k &= (j2k\Omega + \lambda) \bar{\mathbf{C}}_b + \bar{\mathbf{K}}_b, \\ \mathbf{E}_k &= (j2k\Omega + \lambda)^2 \mathbf{M}_r + (j2k\Omega + \lambda) \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r, \\ \bar{\mathbf{F}}_k &= (j2k\Omega + \lambda)^2 \bar{\mathbf{M}}_r + (j2k\Omega + \lambda) \bar{\mathbf{C}}_r + \bar{\mathbf{K}}_r, \end{aligned} \quad (27)$$

\mathbf{A}_k 및 $\bar{\mathbf{B}}_k$, \mathbf{C}_k 및 $\bar{\mathbf{D}}_k$, \mathbf{E}_k 및 $\bar{\mathbf{F}}_k$ 는 각각 등방(isotropy), 비등방(anisotropy), 비대칭(asymmetry) 회전체의 특성을 대변한다.

이 경우 각각의 모드변수는 람다행렬법 (λ -matrix)⁽¹⁾을 사용함으로써 구할 수 있는데, 근사 행렬규모(matrix order)를 6 으로 설정하였을

경우 λ -matrix 는 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1(\lambda) & \bar{\mathbf{D}}_1(\lambda) & & & & \\ \mathbf{C}_1(\lambda) & \mathbf{A}_1(\lambda) & \mathbf{E}_0(\lambda) & & & \mathbf{0} \\ & \bar{\mathbf{F}}_1(\lambda) & \bar{\mathbf{B}}_0(\lambda) & \bar{\mathbf{D}}_0(\lambda) & & \\ & & \mathbf{C}_0(\lambda) & \mathbf{A}_0(\lambda) & \mathbf{E}_{-1}(\lambda) & \\ & \mathbf{0} & & \bar{\mathbf{F}}_0(\lambda) & \bar{\mathbf{B}}_{-1}(\lambda) & \bar{\mathbf{D}}_{-1}(\lambda) \\ & & & & \mathbf{C}_{-1}(\lambda) & \mathbf{A}_{-1}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$= \lambda^2 \mathbf{E}_2 + \lambda \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_0,$$

여기서

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_r + j2\Omega \bar{\mathbf{C}}_r & \bar{\mathbf{K}}_b + j2\Omega \bar{\mathbf{C}}_b & & & & \\ -4\Omega^2 \bar{\mathbf{M}}_r & & & & & \\ \mathbf{K}_b + j2\Omega \mathbf{C}_b & \mathbf{K}_r + j2\Omega \mathbf{C}_r & \mathbf{K}_r & & & \mathbf{0} \\ -4\Omega^2 \mathbf{M}_r & & & & & \\ \bar{\mathbf{K}}_r + j2\Omega \bar{\mathbf{C}}_r & \bar{\mathbf{K}}_r & \bar{\mathbf{K}}_b & & & \\ -4\Omega^2 \bar{\mathbf{M}}_r & & & & & \\ & \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_r & \mathbf{K}_r - j2\Omega \mathbf{C}_r & & \\ & & & -4\Omega^2 \mathbf{M}_r & & \\ \mathbf{0} & & \bar{\mathbf{K}}_r & \bar{\mathbf{K}}_r - j2\Omega \bar{\mathbf{C}}_r & \bar{\mathbf{K}}_b - j2\Omega \bar{\mathbf{C}}_b & \\ & & & -4\Omega^2 \bar{\mathbf{M}}_r & & \\ & & & & \mathbf{K}_r - j2\Omega \mathbf{C}_r & \\ & & & & \mathbf{K}_b - j2\Omega \mathbf{C}_b & -4\Omega^2 \mathbf{M}_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_r + j4\Omega \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{C}}_b & & & & \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_r + j4\Omega \mathbf{M}_r & \mathbf{C}_r & & & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}}_r + j4\Omega \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{C}}_r & \bar{\mathbf{C}}_b & & & \\ & & \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_r - j4\Omega \mathbf{M}_r & \\ & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_r & \bar{\mathbf{C}}_r - j4\Omega \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{C}}_b & \\ & & & \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_r - j4\Omega \mathbf{M}_r & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_r & & & & & \\ \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r & & & & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{M}}_r & & & & \\ & & \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r & & \\ \mathbf{0} & & \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{M}}_r & & \\ & & & & \mathbf{M}_r & \end{bmatrix}. \quad (29)$$

2.2.4 모드 응답해의 유도 복소 상태벡터는

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{r=1}^{4N} [\mathbf{r}(t)\eta(t)]_r, \quad (30)$$

와 같이 정의되고, 이를 회전체의 모드특성을 표시하는 식으로 다시 쓰면

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N [\mathbf{r}(t)\eta(t)]_i. \quad (31)$$

여기서 $\eta(t)$ 는 주 좌표계(principal coordinates)이고, 상첨자 B 와 F 는 각각 전후방(forward and backward)모드, 합 기호에서의 '는 $r \neq 0$ 를 의미 한다. 입력항에 대해서 유도한 직교성에 관한 식 (18)을 적용하면

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_r^i(t) &= \lambda_r^i \eta_r^i(t) + \bar{v}_c(t)_r^T f(t), \\ & ; r = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N ; i = B, F. \end{aligned} \quad (32)$$

의 4N 개의 모드방정식을 구할 수 있다. 따라서 주기적 시변계인 일반회전체의 입력대비 응답하는

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N [u_c(t) \eta(t)]_r^i \\ &= \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N u_c(t)_r^i e^{\lambda_r^i t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_r^i \tau} \bar{v}_c(\tau)_r^T f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

이고, 플로케이론에 의한 식 (24a), (24b)에 의한 주기성을 갖는 우고유벡터 $u_c(t)$ 및 좌고유벡터 $v_c(t)$ 를 대입하면 응답성분은

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda_r^i + j2k\Omega)(t-\tau)} (u_k \bar{v}_s^T g(\tau) \right. \\ & \left. + u_k \bar{v}_s^T \bar{g}(\tau)) e^{j2(k-s)\Omega\tau} d\tau \right\}_r^i \end{aligned} \quad (34a)$$

이고, 공액(conjugate)성분은

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda_r^i + j2k\Omega)(t-\tau)} (\hat{u}_k \bar{v}_s^T g(\tau) + \hat{u}_k \bar{v}_s^T \bar{g}(\tau)) e^{j2(k-s)\Omega\tau} d\tau \right\}_r^i, \end{aligned} \quad (34b)$$

으로 표시되며, 이로부터 모드변수간 관계를 도출하면

$$\bar{u}_{-rk}^i = \hat{u}_{rk}^i, \bar{v}_{-rs}^i = \hat{v}_{rs}^i. \quad (35)$$

여기서 모드벡터 u_k 와 그의 수반벡터 v_s 는 다음과 같이 구성되는데

$$u_k = [u_k^{1T} \ u_k^{2T} \ \dots \ u_k^{NT}]^T, v_s = [v_s^{1T} \ v_s^{2T} \ \dots \ v_s^{NT}]^T, \quad (36)$$

$u_k^1, v_s^1, \dots, u_k^N, v_s^N$ 는 각각 1st, ..., N-th 방향 좌표계의 모드벡터와 수반벡터의 k-th 및 s-th 성분을 의미한다.

식 (34a)로부터 일반적인 입력에 대한 복소모드 응답특성을 구한다.

2.3 조화응답 모드해

입력응답해인 식 (34a)에 대한 자명해(definite solution)는 조화입력일 경우 확인할 수 있는데, 이 경우 모드변수를 고유값문제로부터 구하여 식 (34a)에 대입함으로써 확인할 수 있다. 식 (34a)에서 조화입력 $g(t) = g e^{j\omega_0 t}$ 에 대해, 안정계(stable system)일 경우 $e^{\lambda_r^i t} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ 인 조건에서 응답하는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{u_{rk}^i \bar{v}_{rs}^i T g}{j[\omega_0 - 2s\Omega] - \lambda_r^i} e^{j[\omega_0 + 2(k-s)\Omega]t} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{u_{rk}^i \bar{v}_{rs}^i T \bar{g}}{-j[\omega_0 + 2s\Omega] - \lambda_r^i} e^{-j[\omega_0 - 2(k-s)\Omega]t} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{u_{rk}^i \bar{v}_{r,k-n}^i T g}{j[\omega_0 - 2(k-n)\Omega] - \lambda_r^i} e^{j[\omega_0 + 2n\Omega]t} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{-u_{rk}^i \bar{v}_{r,k+n}^i T \bar{g}}{j[\omega_0 + 2(k-n)\Omega] + \lambda_r^i} e^{-j[\omega_0 + 2n\Omega]t} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ p_n e^{j(\omega_0 + 2n\Omega)t} + \bar{p}_n e^{-j(\omega_0 + 2n\Omega)t} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

이때의 조화계수 p_n, \bar{p}_n 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_n &\equiv \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_{rk}^i \bar{v}_{r,k-n}^i T g}{j[\omega_0 - 2(k-n)\Omega] - \lambda_r^i} \right), \\ \bar{p}_n &\equiv \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-u_{rk}^i \bar{v}_{r,k+n}^i T \bar{g}}{j[\omega_0 + 2(k-n)\Omega] + \lambda_r^i} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 모드변수들은 앞서의 고유값문제에서 구한다.

조화입력 $g(t) = g e^{j\omega_0 t}$ 에 의한 응답을 구하면 근사 행렬규모를 6으로 하였을 경우 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(t) &\cong p_{-1} e^{j(\omega_0 - 2\Omega)t} + \bar{p}_{-1} e^{-j(\omega_0 - 2\Omega)t} + p_0 e^{j\omega_0 t} \\ &+ \bar{p}_0 e^{-j\omega_0 t} + p_1 e^{j(\omega_0 + 2\Omega)t} + \bar{p}_1 e^{-j(\omega_0 + 2\Omega)t}. \end{aligned} \quad (39)$$

이로부터 조화입력에 의한 스펙트럼은 각각의 조화모드(harmonic modes)로 표시된다.

2.4 안정성 해석

시불변계 또는 일부 시변계(비대칭회전체 등)의 경우 일반적으로 계의 안정성은 고유값중 하나라도 양의 실수부를 갖거나 도시적으로는 선회선도(whirl chart)상에서 모드 불연속 등의 영역 존재여부로부터 알 수 있다. 주기적 시변계에 있어서는 특별히 식 (11)에서 제시한 바와 같이 플로케 천이함수의 특성승수(characteristic multipliers), ω_i 로부터 그 안정성을 판별한다.^(7,8) 즉, 식 (11), $(\Phi(T) - \omega I)r(0) = 0$ 에서 ω_i 의 안정성을 갖기 위한 조건으로부터 판별하게 되는데, $|\omega_i| \leq 1$ 일 경우 안정계가 되고 $|\omega_i| > 1$ 일 경우 불안정계가 된다. 이

는 $\lambda_i = \frac{1}{T} \log(\omega_i)$ 에서 $\text{Re}[\lambda_i] \geq 0$ 인 조건(Re:실수부)을 의미한다. 여기서, $\Phi(T)$ 는 초기조건, $\Phi(0)$ 로부터 수치적분을 통해서 구한다. 물론 이는 시불변계의 경우에도 적용되나 이 경우에는 일반적인 고유값문제로 해석함이 더 용이하다.

3. 수치 예

Fig. A-1 과 같은 일반회전체의 해석모형에 대한 사양은 다음과 같다.

원판(disk)

$$\rho = 7,850 \text{ kg/m}^3, M = \rho \pi l_o D^2 / 4 = 29.6 \text{ kg}, D = 400 \text{ mm},$$

$$l_o = 30 \text{ mm}, J_p = M(3D^2/4 + l_o^2) / 12 = 0.298 \text{ kg.m}^2,$$

$$J = MD^2/8 = 0.592 \text{ kg.m}^2, \Delta J = \epsilon J, \epsilon = 0.3,$$

불균형량(unbalance):

$$m e^{j\beta} = M/10000 \times 0.75 D e^{j30^\circ} = 76.9 + j44.4 \text{ (g.cm)},$$

축(shaft)

$$E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, l_1 = 0.3 \text{ m}, l_2 = 0.2 \text{ m}, L = 0.5 \text{ m},$$

$$d = 40 \text{ mm}, I_s = \pi d^4 / 64,$$

$$k_{rr} = 3EI_s (1/l_1^3 + 1/l_2^3) = 1.1 \times 10^7 \text{ N/m}^{(12)}, \Delta k_r = \delta k_r,$$

$$k_{\theta\theta} = 3EI_s (1/l_1 + 1/l_2) = 5.85 \times 10^5 \text{ N/rad}^{(12)}, \Delta k_{\theta\theta} = \delta k_{\theta\theta},$$

$$k_{r\theta} = 3EI_s (1/l_2^2 - 1/l_1^2) = 1.46 \times 10^6 \text{ N/rad.m}^{(12)}, \Delta k_{r\theta} = \delta k_{r\theta},$$

$$c_r = 50 \text{ Ns/m}, c_\theta = 10 \text{ Ns/rad}, \delta = 0.3,$$

베어링

$$k_{b1} = k_{b2} = 2 \times 10^7 \text{ N/m}, \Delta k_{b1} = \Delta k_{b2} = \sigma k_{b1}, \sigma = 0.3,$$

$$c_{b1} = c_{b2} = 2,000 \text{ Ns/m}, \Delta c_{b1} = \Delta c_{b2} = 0.$$

Fig. 1 은 일반회전체 모형에 대한 고유값 해석 결과를 선회전도(whirl chart)로 보인 것이다. 힐(Hill)의 행렬 증[식 (26)] 4x4 및 6x6 정도의 행렬로 근사한 결과로서, 비등방성 회전체와 비대칭 회전체의 특성을 포괄하며 근사정도를 높힐수록 각각의 모드에 인접하는 잔여모드(adjacent residual modes)로서의 밀도는 높아진다. 전반적으로 비등방 회전체와 비대칭회전체가 결합된 모드형상을 보여주고 있어 일반회전체의 특징을 잘 대변하고 있다. 이를 보면 4620 rpm 과 5450 rpm 사이에서 불안정 영역을 도시적으로 볼 수 있는데, 이는 플로케 천이행렬 $\Phi(T)$ 로부터 특성승수를 이용한 안정성

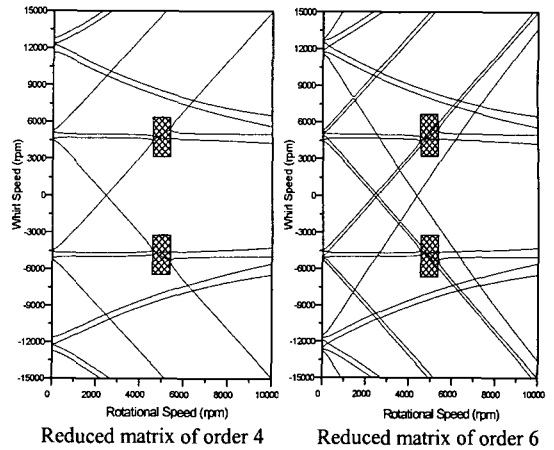


Fig. 1 Whirl charts of the general rotor system (■ : unstable region)

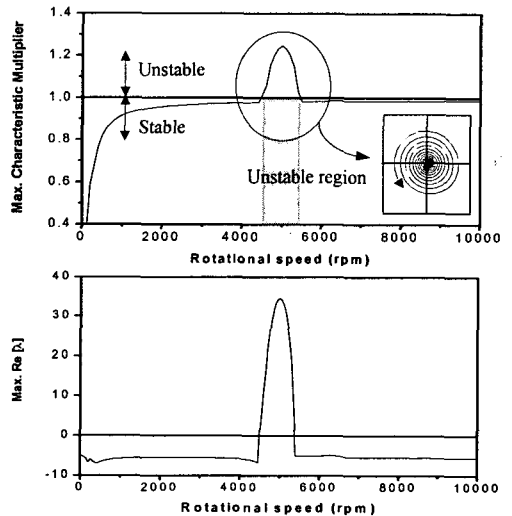


Fig. 2 Stability check of general rotor system from Floquet's Transition Matrix

판단방법과 비교하였을 때 동일한 결과를 보이고 있고, 이 구간에서 실제 고유값의 실수부 최대값이 양의 값을 표시하고 있다. (Fig. 2 참조) $\Phi(T)$ 를 구할 수 있는 수치 해가 아닌 효과적인 방법이 있을 경우 플로케 방법에 의한 안정성판단은 고유값해석에 의한 방법보다는 더 직접적이다.

Fig. 3 은 불균형력(unbalance)에 대해서 마찬가지로 4x4 또는 6x6 정도의 행렬로 근사하여 모드 해석을 통해 얻은 응답해[식 (41)]와 실제 수치해를 통한 결과와 비교한 것이고, Fig. 4 는 6x6 정도로 근사하여 응답해의 조화계수로부터 모드를 구분하여 구한 방향성스펙트럼(directional spectrum)을 조화모드로 표시하였으며 이를 수치해의 FFT(Fast Fourier Transform)로부터 구한 결과와 비교한 것이다.

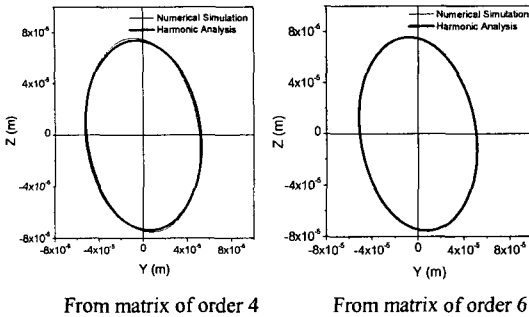


Fig. 3 Responses by an unbalance @ 4,000 rpm

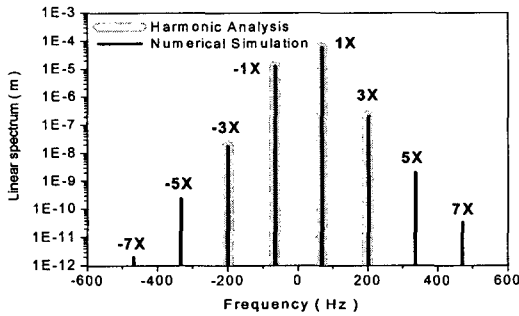


Fig. 4 Directional Spectrum by an unbalance @ 4,000 rpm (from matrix of order 6)

스펙트럼의 입출력특성을 표시하는 방향성 주파수 응답함수(directional frequency response functions : dFRFs)는 추후 주파수 해석을 통하기로 하고 여기서는 출력특성만으로부터 그 결과를 검증하기로 한다. 변위응답의 경우 4x4 정도의 행렬을 취한 근사해에서도 비교적 실제 수치해와 잘 일치하고 있는데 더 고차의 6x6 정도의 행렬을 취한 근사해를 이용하였을 경우 거의 일치하는 결과를 보이고 있다.

방향성스펙트럼의 경우, 잔여모드(-3X)가 가미된 6x6 정도의 행렬을 취한 근사해에서 실제 수치해와 잘 일치하고 있다. 여기서 더 고차의 근사해를 이용하였을 경우 ±5X 와 같은 잔여모드를 보이게 된다. Fig. 4 를 보면 모드해석을 통한 모드계수가 각 모드(±1X, ±3X, ...)에서 실제의 스펙트럼과 잘 일치함으로, 플로케이론을 이용한 주기적 시변계인 본 일반회전체 모드해석의 타당성을 보이고 있다. 여기서 실제로는 일반회전체의 경우 ±3X, ±5X, ... 이상의 잔여모드 형상을 보이고 있음을 알 수 있는데 행렬크기(matrix order)를 높일 경우 고차모드를 더 파악할 수 있겠으나 그 이상(±5X, ...) 잔여모드의 영향은 미미하여 무시할 정도이므로 더 이상의 의미가 없다.

4. 결론

주기적 시변계는 플로케이론으로부터 그 기본해를 유도할 수 있는데, 이때 모드해석의 가능한 형태를 위해서는 입력항과 결부되는 수반벡터를 분리하기 위한 직교성이 성립되어야 한다. 이를 위해 플로케이의 기본이론으로부터 직교성을 도출함으로써 모드해를 유도하였고 이로부터 시불변계를 포함하는 완전한 모드해석을 정립하였다. 이를 조화해의 존재성으로부터 조화입력에 응답 및 방향성스펙트럼을 구하여 본 모드해석 결과의 타당성을 검증하였다. 또한 천이함수를 이용한 안정성해석과도 비교 확인하였다.

본 연구를 통해서 기존 시불변계는 물론 주기적 시변계의 일반적인 모드해석이 가능하게 되었으며, 향후 주파수 응답특성으로부터 좀 더 세부적인 모드특성을 검토하게 될 것이다.

후 기

본 연구는 항공우주연구원의 민군겸용개발사업 과제인 “차세대 헬리콥터 로우터 시스템 개발”의 일환으로 수행되었으며, 지원하여 주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Lee, C. W., 1993, "Vibration Analysis of Rotors," Kluwer Academic Publishers.
- (2) Lee, C. W., 1991, "A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.5, No.2, pp. 119~137.
- (3) Sinha, S. C., Pandiyan, R. and Bibb, J. S., 1996, "Liapunov-Floquet Transformation: Computation and Applications to Periodic Systems," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 209~217.
- (4) Robert, A. C., William, E., 1984, "Control of Time-Periodic Systems," *J. GUIDANCE*, Vol. 7, No.6, pp. 671~676.
- (5) Genta, B., 1988, "Whirling of Unsymmetrical Rotors: A Finite Element Approach Based on Complex Co-ordinates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124(1), pp. 27~53.
- (6) Ardayfio, D. and Frohrib, D. A., 1976, "Instability of an Asymmetric Rotor with Asymmetric Shaft Mounted on Symmetric Elastic Supports," *Journal of Engineering for Industry*, pp. 1161~1165.
- (7) Meirovitch, 1970, "Methods of Analytical Dynamics," McGraw Hill.
- (8) Friedmann, P. and Hammond, C. E., "Efficient

Numerical Treatment of Periodic Systems with Application to Stability Problems, 1977, "International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 1117~1136.

(9) Irretier, H., "Mathematical Foundations of Experimental Modal Analysis in Rotor, 1993, "Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 13, No. 2, pp. 183~191.

(10) Kramer E., 1993, "Dynamics of Rotors and Foundations," Springer-Verlag.

(11) Weaver, J. and Gere, J. M., 1980, "Matrix Analysis of Framed Structures," D. Van Nostrand Company, Second Edition.

부록 : 일반회전체 모형의 운동방정식

일반회전체의 해석모형으로서, 비등방성베어링과 비대칭원판 및 회전축으로 구성된 경우를 고려한다(Fig. A-1).

축과 베어링의 질량효과 및 병진(translation)과 회전(rotation)과의 연성효과는 무시하기로 하고, 조임부나 이음부 효과는 $k_r, k_\theta, k_{r\theta}$ 등에 반영한다.

각 물리적변수들 $J_p, J, k_r, k_\theta, k_{r\theta}, c_r, c_\theta, c_{b1,2}, k_{b1,2}$ 는 각각 원판의 극, 직경관성모멘트, 축의 탄성계수, 축/원판의 내부점성계수, 베어링#1,2의 점성계수 및 탄성계수를 표시하고, $\Delta J, \Delta k_r, \Delta k_\theta, \Delta k_{r\theta}, \Delta c_{b1,2}$ 는 각각 이들의 편차량을 표시한다.

각각의 좌표계를 다음과 같이 표시할 경우

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y_d, \phi, y_{b1}, y_{b2}]^T, \quad \mathbf{z} = [z_d, \phi, z_{b1}, z_{b2}]^T, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{y} + j\mathbf{z} = [r_d, \phi_d, r_{b1}, r_{b2}]^T, \\ \mathbf{f}_y &= [f_{y_d}, T_{\theta y}, 0, 0]^T, \quad \mathbf{f}_z = [f_{z_d}, T_{\theta z}, 0, 0]^T, \\ \mathbf{g} &= \mathbf{f}_y + j\mathbf{f}_z = [f_{y_d} + jf_{z_d}, T_{\theta y} + jT_{\theta z}, 0, 0]^T, \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

y_d, ϕ, z_d, ϕ 와 $y_{b1}, y_{b2}, z_{b1}, z_{b2}$ 는 각각 원판의 병진 및 회전, 베어링 #1,2의 변위를 의미하고,

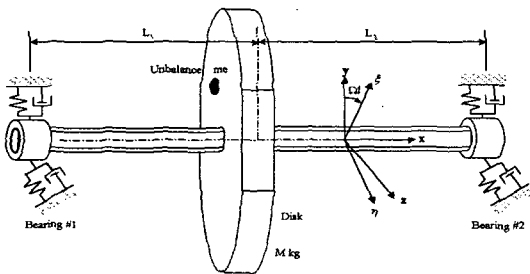


Fig. A-1 General rotor model for simulation

f_{y_d}, f_{z_d} 와 $T_{\theta y}, T_{\theta z}$ 는 각각 디스크에 작용하는 y - z 방향의 힘과 토크를 의미한다.

이들로부터 라그랑제(Lagrange) 방정식에 대입하여 유도된 운동방정식은 식 (1)과 같고 각각의 물리적 변수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{f1} &= \begin{bmatrix} c_r & 0 & -i_2 c_r & -i_1 c_r \\ 0 & c_\theta & -j c_\theta / L & j c_\theta / L \\ -i_2 c_r & j c_\theta / L & i_2^2 c_r - c_\theta / L^2 & i_1 i_2 c_r - c_\theta / L^2 \\ -i_1 c_r & -j c_\theta / L & i_1 i_2 c_r - c_\theta / L^2 & i_1^2 c_r - c_\theta / L^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{f0} &= \mathbf{C}_{f1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{b2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C}_{f0} - j\Omega \mathbf{G}_m, \\ \mathbf{C}_r &= j2\Omega \mathbf{M}_r, \\ \mathbf{C}_b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta c_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta c_{b2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta k_{b2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{r0} &= \begin{bmatrix} k_r & -jk_{r\theta} & -i_2 k_r + k_{r\theta} / L & -i_1 k_r - k_{r\theta} / L \\ jk_{r\theta} & k_\theta & -ji_2 k_{r\theta} + jk_\theta / L & -ji_1 k_{r\theta} - jk_\theta / L \\ -i_2 k_r + k_{r\theta} / L & ji_2 k_{r\theta} - jk_\theta / L & i_2^2 k_r - 2i_2 k_{r\theta} / L + k_\theta / L^2 + k_{b1} & i_1 i_2 k_r + (2i_2 - 1) k_{r\theta} / L - k_\theta / L^2 \\ -i_1 k_r - k_{r\theta} / L & ji_1 k_{r\theta} + jk_\theta / L & i_1 i_2 k_r + (2i_1 - 1) k_{r\theta} / L - k_\theta / L^2 & i_1^2 k_r + 2i_1 k_{r\theta} / L + k_\theta / L^2 + k_{b2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_r &= \begin{bmatrix} \Delta k_r & j\Delta k_{r\theta} & -i_2 \Delta k_r + \Delta k_{r\theta} / L & -i_1 \Delta k_r - \Delta k_{r\theta} / L \\ j\Delta k_{r\theta} & \Delta k_\theta & -ji_2 \Delta k_{r\theta} - j\Delta k_\theta / L & -ji_1 \Delta k_{r\theta} + j\Delta k_\theta / L \\ -i_2 \Delta k_r + \Delta k_{r\theta} / L & -ji_2 \Delta k_{r\theta} + j\Delta k_\theta / L & i_2^2 \Delta k_r - 2i_2 \Delta k_{r\theta} / L - \Delta k_\theta / L^2 & i_1 i_2 \Delta k_r + (2i_2 - 1) \Delta k_{r\theta} / L + \Delta k_\theta / L^2 \\ -i_1 \Delta k_r - \Delta k_{r\theta} / L & -ji_1 \Delta k_{r\theta} + j\Delta k_\theta / L & i_1 i_2 \Delta k_r + (2i_1 - 1) \Delta k_{r\theta} / L + \Delta k_\theta / L^2 & i_1^2 \Delta k_r + 2i_1 \Delta k_{r\theta} / L - \Delta k_\theta / L^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_r &= \mathbf{K}_{r0} - j\Omega \mathbf{C}_{f1}, \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

단, $L = L_1 + L_2, i_1 = L_1 / L, i_2 = L_2 / L.$