한국학교수학회논문집 제 8 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 8, Number 2, 203-222, June 2005

그래핑 계산기를 이용한 함수의 개념적 이해

고상숙[1] · 이윤경[2]

본 연구는 그래핑 계산기를 이용한 함수학습이 학생의 개념이미지의 개념정의로의 변화에 어떠한 영향을 미치고 학생들은 그래프를 통해 어떤 정보를 얻어내며 그래프와 수식사이를 어떤 과정을 통해 이해하는가를 정성연구를 통해 조사하였다. 그 결과 첫째, 함수에 대한 사전학습이 없었던 학생은 그래핑 계산기 환경에서 많은 정보를 얻으면서 개념정의를 가지게 되었고 스스로 탐구하는 학습을 하였다. 반면 사전 학습이 있었던 학생은 함수에 대해 많은 개념이미지를 가지고 있어서 그래핑 계산기의 사용을 불필요하게 생각하였고 그 효과도 다른 학생에 비해 미비하였다. 세 학생 모두 그래프를 비교하는 문제와 평행이동을 조사하는 문제에서는 계산기를 유용하게 사용하면서 학습해나갔다. 그래프처럼 시각적인 것을 통한 학습이 대수식을 통한 학습보다 함수의 변화 등 역동적인 학습을 통해 개념정의로 접근이 용이하였으며 학생들의 학습과정에서 그래핑 계산기의 역할에 따른 학습모델을 제시 가능하였다.

주요용어 : 함수, 개념이미지, 개념정의, 그래핑 계산기, 시각화

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

수학을 배우면서 누구나 '왜 수학을 배우지?'라는 생각을 한번쯤은 가져봤을 것이다. 우리가 왜 수학을 배워야 하는가에 대한 해답 중 하나로 클라인(Klein)은 정신 능력의 신장을 이야기하면서 정신도야의 핵심은 개념적 사고 방법에서 개념적 사고 방법은 함수적 사고 습관의 도야에서 찾고 이 함수 개념이 수학 수업에 스며들어 학생들에게 살아있는 수학을 가르쳐야 한다고 주장했다(우정호, 재인용, 1998). 황우형 외 2인(1995)은 많은 학생들이 함수의 정의를 외운 뒤 여러 번의 문제 풀이를 통해 정의의 의미를 유추한다고 한다. 이렇게 문제를 풀면서 형성된 개념이미지는 오류가 발생할 수도 있고 그 수정도 쉽지 않다. 다시 말해 학생들이 수학적 정의를 접할 때 그들은 한 영역만을 접하게 되고 이것은 그들의 개념이미지를 왜곡시켜 나중에 인지적 갈등의 원인이 된다(Tall & Vinner, 1981). 학생들이 잘못

1) 단국대학교(sangch@dankook.ac.kr)
2) 단국대학교 대학원(jeongsuk@knue.ac.kr)

된 개념이미지를 가지고 있을 때에 바람직하지 않은 수학적 행동을 하는데 Vinner(1997)는 이런 행동을 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동의 2가지 유형으로 분류하고 있다. Vinner는 학생의 문제 행동에 주목하면서 교사의 기대와 학생의 행동과의 엇갈림이라는 문제점의 해결을 시도하고 학생들의 바람직하지 않은 수학적 행동을 개선해 나가는 방법을 모색하는 것이 수학에서 해야 할 중대한 과제임을 제시하고 있다.

또한, 지필 환경의 문제점들을 해결하고자 교육부가 발표한 7차 교육과정에서는 도구의 사용을 다음과 같이 적극 권장하고 있다.

> 21세기의 정보화 사회에서는 각종 자료와 정보를 수집, 분석하여 종합, 판단할 수 있는 능력이 요구된다. 이를 위해서는 지금까지의 지필 위주의 학습에서 벗어나 멀티미디어, 인터넷 등을 활용하여 자기 주도적으로 지적 가치를 창출하고 실생활의 문제를 해결할 수 있는 다양하고 풍부한 경험을 가지게 할 필요가 있다(교육부, 1999, p. 3).

이런 이유로 본 논문에서는 컴퓨터가 가지고 있는 장점을 지니면서도 휴대가 간단하고 가격이 저렴하고 시간과 장소의 구애를 받지도 않으며 다루기 쉽다는 장점을 가지고 있는 휴대용 테크놀로지(hand-held technology)의 대표적인 예인 그래핑 계산기(그 중 TI-92 plus)를 활용하고자 한다. NCTM(2000)에서도 함수의 그래프에 대한 해석 능력을 향상시키는 도구 중 하나로 그래핑 계산기의 활용을 제시하고 있다.

본 연구를 통해 학생들이 그래핑 계산기를 사용했을 때의 함수의 개념적 이해에 대해 세부 연구문제를 가지고 알아보고자 한다. 학생들이 함수에 대한 어떤 개념이미지를 가지고 있고 잘못된 개념이미지를 가졌을 때 수정과정을 통해 함수의 개념정의를 이해하는 과정과 함수를 그래핑 계산기 TI-92 plus를 이용해 그래프로 시각화하여 관찰함으로써 단편적 공식 암기가 아닌 사고력 증진과 학생 활동을 통하여 학생들을 수업에 적극 참여시켜 수학을 이해하는데 도움이 되고자 한다.

2. 연구문제

그래핑 계산기 환경에서

1) 학생들은 어떤 개념이미지를 가지고 있고 개념 정의로 어떻게 발달하는가?
2) 학생들의 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동은 어떻게 나타나는가?

3. 용어의 정의

1) 함수 : 두 집합 A, B에서 A의 각 원소 x에 어떤 규칙에 의해 B의 원소 y가 단 하나 정해질 때, 그 대응 규칙을 함수라고 한다.

2) 함수의 그래프 : 함수의 값을 좌표(공간에서의 점의 위치를 나타낸 수의 쌍)에 의해서 나타낸 것이 함수의 그래프이다.

3) 개념정의(Concept definition) : Vinner(1983)가 주장한 비순환적인 방법으로 개념을

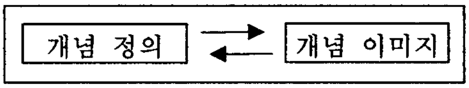
정확히 설명하는 언어적 정의를 말한다.

4) 개념이미지(Concept image) : Vinner(1983)가 주장한 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조를 말한다.

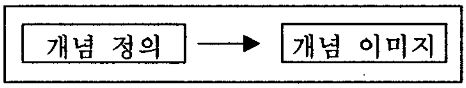
Ⅱ. 이론적 배경

1. 개념정의와 개념 이미지

개념은 명확히 언어로 정의하기는 어렵지만 수학적 개념은 원시 용어를 제외하고는 모두 공식적인 정의를 갖고 있다. 그런데 학생들은 수학적 개념의 공식적인 정의를 배우기 이전에 이미 여러 형태로 그 개념과 접한 적이 있고 그에 따라 형성된 복잡한 인지 구조가 학생들의 마음속에 들어와 있다가 의식적으로나 무의식적으로 개념의 의미와 사용법에 영향을 준다. 여기서 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조를 '개념이미지(concept)'이라 하는데 개념이미지는 사람에 따라 다르며 여러 해에 걸쳐서 모든 종류의 경험을 통해 형성되며 개인이 새로운 자극을 만나거나 성숙해짐에 따라 변화된다. 그리고 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 '개념정의(concept definition)'라 한다(Vinner, 1983). Vinner(1991)가 말한 개념 정의와 개념 이미지의 관계를 보면 처음의 개념 형성 단계에서는 다음과 같은 형태로 나타난다.

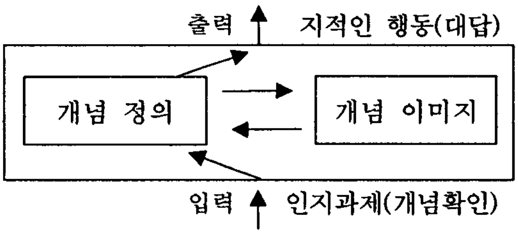


<그림 1> 개념정의와 개념이미지의 상호작용

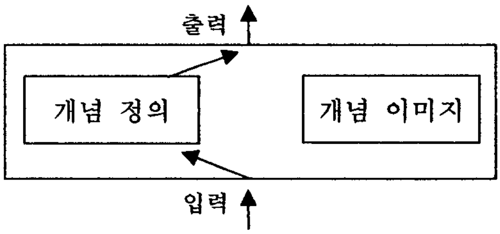


<그림 2> 형식적 개념의 인식적인 성장

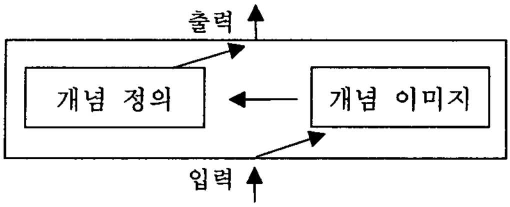
Vinner에 따르면 다음 그림과 같이 4가지 경우의 인지모델이 있다. 여기서 교사들은 학생들의 사고과정에서 <그림 3, 4, 5>와 같은 인지모델 중의 하나를 기대하고 있지만 실제로 학생들의 사고 과정은 <그림 6>의 인지모델을 따르는 경우가 많다는 것이다(박선화, 1993).



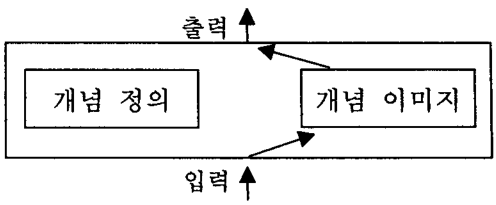
<그림 3> 정의와 이미지의 상호작용



<그림 4> 완전 형식적 연역



<그림 5> 직관적 사고를 따른 연역



<그림 6> 직관적 반응

2) Vinner의 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동3)

가. 의사지식(pseudo-knowledge)

의사지식이란 참지식(true-knowledge), 즉 바람직한 이상적 지식과는 상반된 개념으로 학생들이 실제로 참 지식을 가지고 있지 못함에도 교사나 다른 평가체계로부터 참지식을 가지고 있는 것으로 인정받을 수 있도록 하는데 사용되는 지식을 말한다(Vinner, 1997).

교육체계로부터 좋은 평가를 받기 위해서 의사지식을 사용하는 학생들은 첫째, 자신을 인정받기 위해 의사지식을 사용하고 있다는 사실을 알고 있는 경우, 둘째, 의사지식을 사용하고 있다는 사실을 모르는 경우의 두 가지 경우로 구분한다. 전자의 경우는 좋은 평가를 받기 위해 자신이 알지 못하고 있다는 사실을 알면서도 감추는 것이다. 특히 후자의 경우는 의사지식을 사용하고 있다는 사실을 모르고 있기 때문에 전자보다 심각한 교육적 상황이다. 학습자가 자신이 알고 있는 지식이 그릇된 것이 아닌 올바른 것이라고 생각하기 때문에 교실 상황에서 이런 일이 일어났다면 교사가 수학을 가르치는데 실패한 것으로 볼 수 있다.

나. 의사 개념적 행동

의사 개념적 행동은 수학 수업에서 개념을 논의하는 상황에서 그 개념과 관련된 여러 다른 개념과 그것들의 의미, 상호관계를 명확히 알지 못하면서도 개념적인 것으로 보이는 설명을 제시할 때 그것은 의사 개념적 사고 양식(Pseudo-Conceptual mode of thinking)에 의한 것이다(Vinner, 1997). 실제로 학교 현장에서 수학적 개념의 의미나 정의에 대해 학생들과 논의하는 상황에서 학생들이 개념에 대한 정확한 이해를 하고 있지 못함에도 그 개념이 사용되는 상황과 관련된 주요 용어를 사용하면서 그 개념을 잘 알고 있는 것처럼 행동하는 경우를 흔히 볼 수 있다. 이 때 의사지식을 사용하고 있다는 사실을 모르는 학생의 경우 그 학생이 지니는 개념은 개념 정의가 아니라 개념 이미지이기 때문에 형식적인 수학적 개념의 정의와 일치하지 않는다. 학생들은 교사가 말한 개념이 그들의 마음속에 어떤 연상을 일으킨다는 것을 알고는 있지만 그 개념에 대한 이해가 결여되어있을 때에는 자신의 마음속에 일어난 연상이 올바른 것인지 검토할 수 없고 그것들이 옳은 결과를 내는 것인지 아닌지 판단하기도 어려워한다. 따라서 교사는 학생들로 하여금 자신의 마음속에 일어난 연상이 무엇인지를 파악할 수 있게 하고 그것들이 주어진 상황에서 어떤 의미를 만들어내는지를 판단하는 심리과정을 올바로 수행할 수 있도록 하여 학생들이 그릇된 결과를 만들어 내는 행동

3) 김남희(1997). Vinner이론에 따른 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동에 관한 소고, 대한수학 교육학회 논문집 7(2), 337-348

의 조절을 통해 직관을 바로 잡아나갈 수 있도록 유도해야 한다.

다. 의사 분석적 행동

의사 분석적 행동은 학생들이 틀에 박힌 수학문제를 해결하는 상황에서 주로 발생하는 행동유형으로 문제 해결을 위한 절차를 선택할 때 이전에 비슷한 유형의 문제에서 옳은 답을 내었던 풀이 과정을 그대로 적용하여 문제를 해결하는 경우에서 발견되는 방법과 같이 다소 임의적이며 주관적인 방법으로 문제를 해결하는 것이다. 의사 분석적 행동양식은 주로 틀에 박힌 문제를 해결하는 수학수업에서 공통적으로 나타나는 활동이다. 이런 행동이 문제가 되는 이유는 비슷한 유형의 문제들에 대한 습관적 학습을 통해 학생들에게는 그들 나름대로의 해결방법을 몸에 익히는 경우가 생길 수 있고 그런 결과로 의사 분석적인 문제 해결 방법이 무의식중에 연상되면서 문제 해결에 자연스럽게 사용될 수 있다는 것이다. 교사는 학생들의 문제 해결과정에서 바람직하지 않은 의사 분석적 행동을 발견했을 때, 어떤 절차가 왜 바람직한 결과를 가지고 오는지 그 이유를 알고 그 절차를 어떻게 실행해야 하는지에 대한 이해를 명확히 할 수 있도록 지도해야 한다.

3) 시각화

우리는 학교수학의 많은 개념과 과정을 쉽게 시각적 해석과 연결할 수 있고, 기저를 이루는 수학적 구조를 반영하여 시각적 모델을 세울 수 있다. 예를 들면 두 미지수를 지닌 선형방정식의 해는 두 직선의 교점으로서, 한 미지수로 된 연속함수의 근은 함수의 그래프가 x축과 만나는 점으로서, 또 양 함수의 적분을 면적으로서 나타낼 수 있다. 우리는 이러한 예들을 얼마든지 찾을 수 있지만 연구의 초점은 수학교육에서 시각적 모델의 가능성으로부터 일어나는 문제를 해결하고 교수-학습적 잠재력을 증가시키는데 있다. 이러한 논의는 현장 교실에서 증가하는 테크놀로지 사용의 효과가 시각적 표상과 그러한 시각적 표상에 대한 학생의 행동의 역량을 대폭 증가시키는 요즘 더욱 적절하게 이루어질 수 있다(Steen, 1987).

그 동안 시각화를 통한 수학교육의 반대 입장으로는 기본적인 시각적 개념 이미지(concept image)은 학생의 추상화 능력을 저해한다는 것이다. 예를 들면, 5학년 학생에게 분수를 가르칠 때 파이 차트(pie chart)를 생각하게 했다면 분수 곱셈과 비율을 어떻게 가르칠 것인가 하는 문제가 대두된다. 그래서 시각화 사용 목적은 학생으로 하여금 개념의 추상화로 인도될 수 있는 충분하고 풍부한 개념 이미지(concept image)을 성취하도록 돕는 것이여야하고 중요한 것은 추상화로 가는 계단의 한 걸음으로 시각화가 어떻게, 어느 정도로 사용되어야 하느냐에 있다.

Galindo(1994) 는 시각화는 수학을 이해하는데 두 가지 요인을 갖는다고 하였다; 직관적 인지와 관계한 즉각적 반응으로써 하나의 요인과 정신적 표상이 존재하게 되는 과정으로써 요인이 그것이다. 그러한 직관적인 지식을 스스로 증명하여서 사람에게 그 자체를 나타낼 수 있는 인지의 하나의 형태인 즉각적으로 받아들여지는 지식(p. 6)이라고 Fischbein(1987)은 정의하였다. Fischbein 에게 수학교육에서 직관의 역할은 생산적인 추론의 역동성이 요구하는 직접적인 연합의 한 종류(p. 207)로 보였다. 몇 가지 요인이 직관의 직접성에 기여한다. 이에 주요한 요인인 시각화는 중요하여서 직관적인 지식은 시각적 표상이라고 자주 말

해진다. 사람이 시각적으로 상상할 수 없는 것을 정신적으로 깨닫기는 어렵고 비록 시각적인 표상이 그 자체가 직관적 지식이 아니더라도 적절한 인지적 활동에 들어있는 시각화는 직관적인 이해에 기여하는 필수적인 한 요인이다(p. 103).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 논문의 목적은 그래핑 계산기를 사용하는 학습 환경에서 학생이 개념을 이해하는 과정을 구체적이고 심도 있게 연구하기 위하여 정성연구(qualitative research) 방법을 선택하였다. Merriam(1998)에 따르면 정성연구는 구성요소들을 조사하기 위해 현상을 따로 따로 구분하는(연구의 변인들이 되는) 정량연구와는 달리, 모든 부분들이 하나의 전체로 형성되기 위해 어떻게 함께 영향을 미치는지를 보일 수 있다. 의미가 사람들의 경험에 녹아들고 이러한 의미는 연구자 자신의 이해를 통해 중재된다고 볼 수 있다.

정성 연구방법을 통해 학생들의 함수 그래프에 대한 전체적인 의미를 해석하고 그래프에 대한 함수적 관계를 해석할 수 있는 능력을 길러 함수 개념의 효과적인 형성과정을 파악하고 또 어떠한 개념이미지를 가지고 있고 잘못된 개념이미지에 대한 수정과정과 의사지식의 사용에 대해 살펴보고자 한다. 특히, 정성연구 중 면접, 관찰, 문서 기록 등을 할 수 있는 사례연구 방법을 택하였다. 일정비교 분석법을 사용하여 3명의 학생을 비교, 분석하여 문제해결 시 나타나는 점들을 관찰하고자 하였다. 그리고 일대일 수업 방식으로 연구 대상자는 문제에 대한 해답을 구두로 설명 또는 지면에 설명을 하고 연구자는 대상자의 문제해결 과정과 범하는 오류 등에 대해 지면에 기록하거나 녹음기를 이용해 기록하였다. 본 연구는 함수에 대한 문제 풀이 능력에 초점을 맞추기보단 함수 그래프를 통해 함수 개념에 대한 학생의 이해와 해석능력을 알아보고자 함이다.

1. 연구 대상

연구 대상은 함수에 대해 학원이나 과외 등의 학교 밖에서 학습을 받지 않는 경기도 부천에 살고 있는 3명의 학생이었으며 이들은 본 연구에 자발적 참여하였다. 학생의 학습성취도, 흥미도, 태도에 있어 다양성을 인정하고 그 다양성안에서 수학적 개념이미지와 개념정의에 대한 통찰력을 조사하기 때문에 오히려 학습에서 학생이 지니는 다양한 요인은 연구에 영향을 미칠 것으로 가정하였다.

M학생은 부천의 K고등학교 2학년생으로 함수부분의 내용을 거의 끝마쳤고 수학성적과 학업열의는 높은데 비해 수학에 흥미를 가지고 있지 않고 특히 그래프 문제와 응용문제를 어렵게 생각하였다. 그리고 지필 환경에 익숙한 학생으로 수학시간에 어떠한 수학적 도구를 한번도 사용해 본적이 없는 학생이다. 이 학생은 수학의 이해나 흥미보다는 우수한 성적에만 관심을 가지고 있었다.

A학생은 서울의 K외국인 학교 10학년 학생으로 이차함수까지의 그래프 형태에 대한 내용과 함수에 대한 기본적인 과정을 그래핑 계산기(TI-82)를 사용하여 배우고 있고 수학성

적이 우수한 학생이다. 하지만 수학에 흥미가 없고 특히 함수는 외워야 할 것이 많다고 여기며 어려워하였고 함수 학습에 대한 학업 열의도 비교적 낮은 학생이다.

C학생은 부천의 B고등학교 1학년 학생으로 수학성적은 중하 수준이지만 수학에 대한 흥미와 함수 학습에 대한 열의가 다른 학생에 비해 높은 학생이다. 이 학생은 고등학교 함수는 이제 막 배우는 학생으로 중학교 때 배운 정비례나 반비례 그래프의 내용조차 거의 알고 있지 못해 함수에 대한 사전학습이 전혀 이루어지지 않은 수준이었다.

2. 연구도구

1) 수행지

수행지에서 탐구하고자 하는 내용은 고등학교 10-(나)에 나오는 부분 중 중학교 함수 과정과 유사한 유리함수까지를 연구 내용으로 선택하여 주로 그래프의 표현과 해석에 관한 내용으로 그에 따른 반응을 관찰하는 방법으로 진행하였다. 함수의 본질 중 그래프로서의 함수도 중요한 부분을 차지하고 있다. 그래프는 대수식보다는 함수를 한눈에 볼 수 있어 잘못된 개념이미지를 손쉽게 찾을 수 있고 문제 해결 능력 향상에 도움을 줄 수 있다.

수행지는 총 5차시로 1차시부터 3차시 문제는 현재 나와 있는 10-(나) 교과서를 참고로 하여 그대로 옮겨온 것이고 특히, 1차시 중 그래프를 통해 함수를 찾는 문항은 Vinner & Dreyfus(1989)의 연구를 참고한 것이다. 4차시 문제는 Hooper(1996)의 논문에서 가져온 것이고 5차시 문제는 성호금(2000)의 수학적 모델링 지도 자료에서 가져온 것이다. 각 차시의 문제 유형과 연구내용은 위의 표와 같다.

2) 그래핑 계산기 TI-92 plus

학생들이 그래프와 대수식 사이의 번역에 어려움을 느끼고, 그래프와 대수식에 대한 지식이 서로 모순된 채 별개의 지식으로 존재한다. 따라서 함수에 관한 지도를 할 때에는 절편, 기울기, 교점을 구하는 절차적 지식만을 강조하지 말고 그것들이 갖는 의미에 대한 개념적 지식을 충분히 이해시킨 뒤에 절차적 지식을 가르치고, 함수의 대수식과 그래프를 서로 연관시켜 가르치도록 제안하고 있다(신인숙, 1996). 짧은 시간 내에 많은 함수의 그래프를 정확하게 그려주고 함수의 대수적, 그래프적 표상을 동시에 나타내는 그래핑 계산기를 사용해 학생들이 단지 그래프를 그려보는 데서 벗어나 함수와 그래프의 다양한 성질을 탐구할 수 있고 이런 시각화를 통해 직관적인 수학적 추론의 향상 및 수학적 개념의 이해에 크게 도움을 받을 수 있다(Berry & Francis, 1996). 그래서 소형 컴퓨터라 불리는 그래핑 계산기 TI-92 plus를 본 논문의 학습 도구로 사용하였다.

3. 연구절차

연구 대상 학생 중 A만이 수학 수업시간에 그래핑 계산기를 사용하여 보았고 학생 C와 M은 칠판, 노트, 펜 등 기본으로 주어지는 도구 이외의 도구를 한두 번 정도밖에 사용해 본 경험이 없었다. 그래서 본 연구에 들어가기 전에 그래핑 계산기의 조작법에 대한 수업이 먼

저 진행되었다. 연구 날짜는 8월 마지막 주에서 11월 첫째 주까지(8월 27일~11월 4일) 연구 학생들의 편한 날로 정해 약 1시간 30분에서 2시간가량으로 본 검사 5회에 걸쳐 진행되었다. 문제 해결 시 그래핑 계산기를 이용하여 문제를 풀도록 유도하였으며 그래핑 계산기의 조작법에서 학생들이 모르는 부분은 연구자가 설명해 주는 식으로 진행하였다. 수행지 문제는 학생들 스스로 해결하도록 하고 문제 해결시간에 제한을 두지 않았다. 연구자는 학생들을 관찰하며 관찰지를 쓰고 학생들이 도움을 필요로 할 때 안내자로서의 역할을 하였다. 연구를 시작할 때 간단한 설명을 해주는 것 외에는 연구자는 관찰자로서의 참여자의 입장으로만 진행하려 하였지만 생각과 다르게 많은 부분에 개입하게 되면서 참여자로서의 관찰자가 되었다. 처음에는 수학 수업과 무관하게 그래핑 계산기 사용법 때문에 시간이 많이 걸리는 경우가 있었고 학생 스스로 문제를 해결하다보니 모르는 부분에서는 많은 시간이 걸리기도 하였다. 하지만 연구 학생들이 차츰 그래핑 계산기에 익숙해지면서 처음 의도대로 관찰자로서의 참여자가 될 수 있었다.

<table>
<tr><th>연구차시</th><th>문제유형</th><th colspan="3">연구내용</th></tr>
<tr><td>1차시</td><td>함수 찾기</td><td rowspan="5">· 함수 학습에서 어떤 개념정의와 개념이미지를 가지고 있는가.

· 의사개념적 행동과 의사 분석적 행동은 어떻게 나타나는가

· 그래프에 대한 해석 능력</td><td colspan="2">·수식과 그래프를 통해 함수의 개념을 정확히 알고 있는지 알고자 하였다.</td></tr>
<tr><td>2차시</td><td>일차함수</td><td rowspan="3">· 정의역과 치역 찾기
·식과 그래프의 연관성
·계수의 변화에 따른 함수의 변화와 관계성</td><td>·중학교 수준의 내용을 알고 있는가.</td></tr>
<tr><td>3차시</td><td>이차함수</td><td>·주어진 구간에서 최대값, 최소값 찾기</td></tr>
<tr><td>4차시</td><td>유리함수</td><td>·점근선의 의미 이해</td></tr>
<tr><td>5차시</td><td>실생활문제</td><td colspan="2">함수가 실생활에서 어떻게 쓰이고 있는지 알고 실생활 문제를 통해 식과 그래프로 표현하는 능력과 해석능력을 알고자 하였다.</td></tr>
</table>

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 그래핑 계산기 환경에서 학생들은 어떤 개념이미지를 가지고 있고 개념 정의로 어떻게 발달하는가?

1) 학생들이 주로 다음과 같은 잘못된 개념이미지를 가지고 있었다.

가. 함수(함수의 그래프)는 연속적이어야 한다. 특히 정의역은 연속된 선의 형태이어야 한다.

프로토콜 1> '다음의 그래프가 함수의 그래프인가?'라는 문제에서

M : 위 그래프는 함수가 아니죠. 정의역이 끊겨 있잖아요.

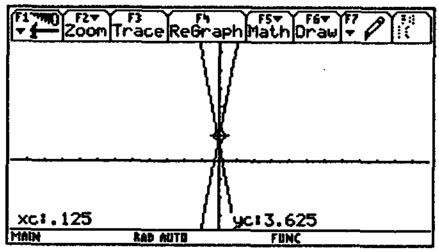
프로토콜 2> A학생의 경우

A : 유리함수에서 정의역 구할 때요 왜 제외되는 점이 있는 거죠?
함수가 되려면 x값이 모두 대응되어야 하잖아요. 함수가 되려면 연속이어야 하는 데 유리함수에서는 제외되는 점이 있으니까 함수가 아니죠.
연속이란 건 끊긴 데가 있으면 안 되는 거잖아요.

프로토콜 3> *유리함수에서의 정의역과 치역에 대한 M학생의 학습과정 중*
M : $y=\frac{4x+20}{x+12}=\frac{4(x+12)-28}{x+12}=4-\frac{28}{x+12}$ *가 되니까, 정의역 :* $x\neq-12$인 모든 실수,
치역 : $y\neq 4$인 모든 실수가 *되잖아요.* 그럼 $y=\frac{2(x+1)}{x+1}$은 약분해서 $y=2$가 되니까
정의역은 실수전체, 치역은 2가 되요.

나. $y=ax^2+bx+c$에서 a의 부호가 다르면 꼭지점(x축)에 대하여 대칭이다.
프로토콜 4> 대칭에 관한 C학생이 학습과정 중
C: $y=x^2-4x+2$*의 꼭지점에 대한 대칭 그래프 식은* $y=-x^2-4x+2$
연구자 : x^2*의 부호만 바뀌었네? 왜 그렇게 되는 거지?*
C : $y=x^2$*과* $y=-x^2$*을 보면요 x축을 기준으로 대칭이잖아요. 그럼* $y=x^2-4x+2$*도*
x축으로 대칭이 되려면 x^2*의 부호가 바뀌어* $y=-x^2-4x+2$*이 되죠*

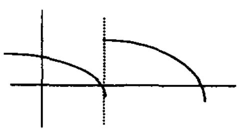
다. 함수에서의 증가와 감소
프로토콜 5> $y=-5x+3$, $y=5x+3$*에 대한 A학생의 학습 과정 중*



A : 이 두 식은 x값이 커지면 y값도 커져요.
연구자 : 그럼 그래프를 한번 그려볼까?
A : 네....(그래프를 본 후) 어? 아니네.
$y=-5x+3$*은 x값이 커지면 y값은 작아지네요.*
연구자 : 그럼 우리 잠시 다른 식을 볼까?
$y=\frac{1}{x}$*은 어떻지?*

A : x값이 커지면 y값이 작아져요. 그럼 $y=-5x+3$*하고* $y=\frac{1}{x}$*은 같은 모양의 그래프가 되네요.* $y=-5x+3$*은 정비례 그래프이고* $y=\frac{1}{x}$*은 반비례 그래프인데 이상하네요.*

프로토콜 6> $y=2x-1$*에 대한 C학생의 학습 과정 중*



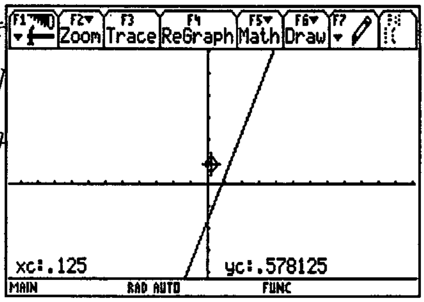
C : 이 그래프는 x가 0일 때 y는 -1이고 y가 0일 때 x는 $\frac{1}{2}$*, 그리고 x가 증가하면 y도 증가하구요. 맞죠?*

연구자: 그래 잘 아는데.

C : 참 이전 기울기도 알겠어요. x가 늘어난 만큼 y도 늘어났으니 증가하는 그래프고, x가 $\frac{1}{2}$만큼 늘어날 때 y는 -1만큼 감소했으니까 기울기는 $-\frac{1}{2}$이죠?

연구자: 더 자세히 설명해 볼래?

C: 아이참. 잘 들어보세요. 중심(0, 0)을 기준으로 x는 $+\frac{1}{2}$만큼 움직였고, y는 -1만큼 움직였으니까 $-\frac{1}{2}$이죠. 아니다..... $\frac{\text{y가이동한거리}}{\text{x가이동한거리}}$ 니까 $\frac{1}{-\frac{1}{2}}$이니까.... 아차 $-\frac{1}{2}$이 아니라 -2요.



가, 나, 다와 같이 세 학생은 개념정의 보다는 주로 개념이미지를 가지고 문제를 해결해 나갔는데 개념이미지를 가지고 있을 때는 잘못된 개념이미지인 경우가 많이 있었다. 함수학습에서 다양하고 많은 문제를 풀어본 학생은 문제를 통한 경험으로 잘못된 개념이미지를 수정해 나가면서 개념 이미지를 가지고도 옳은 답을 도출하였지만 사전학습이 이루어지지 않거나 문제를 풀어본 경험이 적은 학생은 잘못된 개념이미지를 가지고 있는 경우가 많아 옳지 못한 답을 도출하였다.

2) 개념정의로의 발달

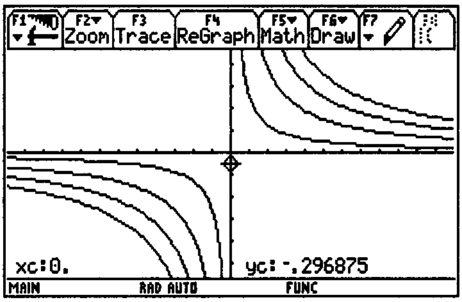
프로토콜 2> 유리함수 문제에 대한 A학생의 학습 과정 중

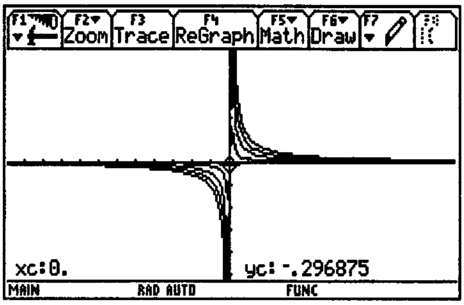
A : 유리함수는 함수가 아니에요. 그래프를 보면 x값에 대응되지 않는 y값이 있으니까 함수가 아닌거죠.

연구자 : $y=\frac{1}{x}$을 생각해 보자. x값이 커지면 y값은 어떻게 되지?

A : 점점 작아져요. 그리고 x축에 계속 가까워져요.

(그래핑 계산기의 zoom-in 기능을 사용하여 그래프를 확인)



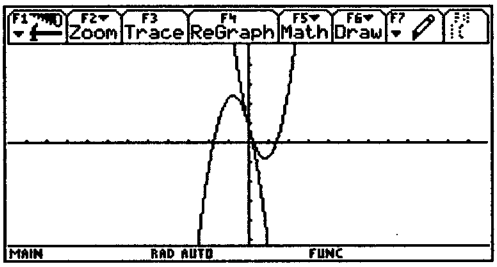


연구자 : 그럼 반대로 y값이 커지면 x값은 어때?

A : y축에 계속 가까워져요.

연구자 : 이번엔 $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{5}{x}$, $y=\frac{7}{x}$를 생각해 볼까?
A : 이제 무한히 간다는 건 알겠는데...
이건 각 3배, 5배,7배씩 x축과 y축으로 가까워져요.

프로토콜 4> 이차함수의 대칭에 대한 C학생의 학습 과정 중
C: $y=x^2-4x+2$의 꼭지점에 대한 대칭 그래프 식은 $y=-x^2-4x+2$입니다.
연구자 : x^2의 부호만 바뀌었네? 왜 그렇게 되는 거지?
C : 예를 들어서요. $y=x+1$의 그래프를 보면 이거에 대한 대칭은 $y=-x+1$이잖아요.
연구자 : 그래프를 한 번 그려볼까?



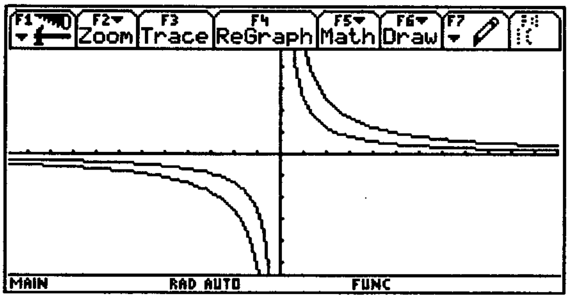
C : 어??아니네..왜 틀렸을까? 우선 꼭지점은 (2, -2)로 같아야 해요.
그런데 $y=-x^2-4x+2$의 꼭지점은 (-2, 6)이네요. 그렇구나. 꼭지점이 틀리네요.
음~그럼. $y=x^2$을 기준으로 다시 해보면 x축으로 2만큼 이동, y축으로 -2만큼 이동. 그리고 반대 그래프니까. $y=-x^2$을 기준으로 이동해서 $y=-(x-2)^2-2$. 어때요. 맞죠? 이젠 식으로 하는 것도 완벽하지 않지만 조금은 알겠어요. 그래프를 생각하면서 푸니까 식도 별로 어렵지 않네요.

프로토콜 6> $y=2x-1$에 대한 C학생의 학습 과정 중
(앞의 내용에 이어서)
연구자: 자 그럼. 우리 $y=x$의 기울기를 알아볼까?
C: 그러니까, 0인데, 어 이상한데요. 음, 가르쳐주지 마세요.
(얼마 후) 아~ (0, 0)이 기준이 아니구나. $y=2x-1$그래프에서 두 점.. 예를 들어 (2, 3) (-1, -3)을 꼭 찍어서 변화된 상태를 보면 기울기 2요. 이제 진짜 알겠어요.

프로토콜 7> 유리함수에서의 점근선에 대한 C학생의 학습 과정 중
C: 문자가 많은 건 어려우니까 좀 쉬운 문제부터 해요.
연구자: 그럼 중학교 때 배운 반비례 $y=\frac{1}{x}$을 먼저 생각해보자.
C : $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 보면 x축과 y축으로 무한히 가까이 가요.
정의역, 치역은 0이 아닌 모든 실수요. 처음에 식만 봤을 때는 함수가 아니라고 생각했어요. 무한히 가까이 간다는 말이 이해가 안 되었었는데, 이젠 알겠어요.

연구자 : 그러면 $y=\frac{2}{x}$ *의 그래프는 어떨까?*

C : 음...(그래프를 그려본 후)



$y=\frac{1}{x}$ *의 그래프보다 위에 있는걸요. 그러면 분자의 수가 커지면 0에서 그러니까 원점에서 점점 멀어지지만 여전히* x*축과* y*축으로 무한히 가까이 가겠네요.*

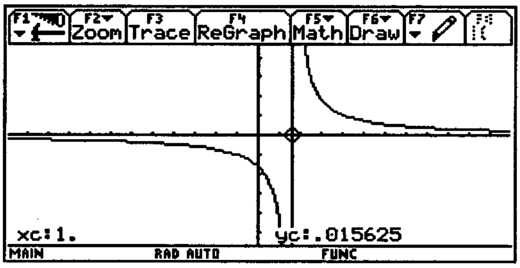
연구자 : 이젠 $\frac{1}{x-1}$ *을 생각해 볼까?*

C : 정의역과 치역은 1을 뺀 실수....아닌가요?

연구자 : 그럼 확인해 볼까?

C : 치역은 맞았는데 정의역이 틀렸네요...

OK..알겠습니다. 정의역 치역만 알면 점근선이 뭔지 알겠군요..



2)와 같이 학생들에게 함수그래프나 함수식, 둘 중 하나만을 가지고 문제를 해결할 때는 어려움을 호소하였지만 그래프와 식을 적절하게 이용하였을 때 훨씬 잘 이해하였다. 이 점은 바로 함수를 배울 때 함수식과 함께 그의 그래프로부터 변화 상황을 추측해 보거나 개략적인 형태로 변화하는 양들 사이의 관계를 조사하는 것이 우선이 되면 개념적 정의에 쉽게 도달함을 알 수 있다. 즉, 함수 그래프와 함수식의 두 표상을 동시에 관찰하였을 때 시각화의 효과에 의해 관계성을 파악하기 쉬워져서 함수의 성질과 특성을 쉽게 인식할 수 있기 때문이다. 그래서 그래핑 계산기의 활용은 개념정의의 도달을 용이하게 하였다고 말할 수 있다. 그리고 학생들이 개념이미지를 가지고 문제를 풀었을 때 한 번에 문제를 맞춘 경우보다는 오류를 범하고 그 오류의 수정과정을 통해 문제를 해결했을 때 그 다음 문제를 풀 때 틀릴 확률이 더 적었고 개념정의로의 발달도 잘 이루어졌다.

2. 그래핑 계산기 환경에서 학생들의 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동은

어떻게 나타나는가?

1) 의사 개념적 행동

프로토콜 8> C학생의 학습 과정 중

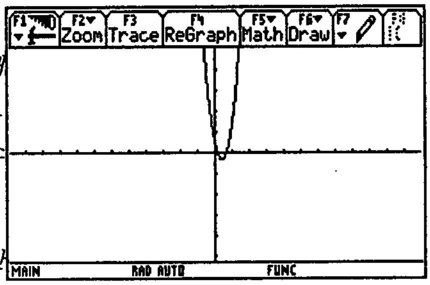
C : $y=x$와 $y=-x$는 대칭이구요. $y=x^2$와 $y=-x^2$도 대칭이잖아요. 그럼 $y=x^2+2x$하고 $y=-x^2+2x$도 대칭이죠. 또 $y=x^2+2x+2$하고 $y=-x^2+2x+2$도 대칭이 되요.

연구자 : 그럼 대칭이 뭘까?

C : 대칭이요...대칭은 대칭이죠...음. 접으면 모양이 똑같이 되는거요.

2) 의사 분석적 행동

프로토콜 9> 이차함수에서 최대, 최소 값을 찾는 문제에 대한 A학생 학습 과정 중



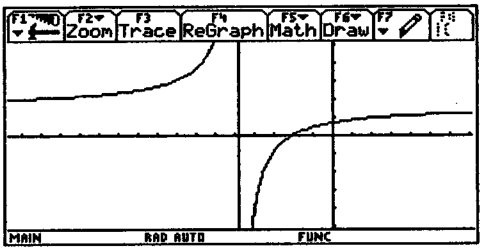
A : $y=2x^2-4x+1$에서 정의역이 $\{x|-3\leq x\leq 3\}$ 그러면 최대 값은 $x=3$일 때, 최소 값은 $x=-3$일 때니까. 최대 값 $x=3$, $y=7$, 최소 값 $x=-3$, $y=31$인데..어? 최대, 최소 값은 y값이잖아요. 그런데 최소값이 더 크네요. 이상하다.

연구자 : 그래프를 그려 그걸 보고 생각해 볼까?

A : 꼭지점이 (1, -1)이고 제일 작은 점이네요. 그치만 일차함수에서는 범위가 주어지만 x값이 제일 작은 게 최소 제일 큰 게 최대잖아요. 일차함수랑 이차함수는 틀리네요.

프로토콜10> 유리함수 문제 M학생의 학습 과정 중

M : $y=\dfrac{4x+20}{x+12}$을 우선 형태를 바꾸어 주면 $y=\dfrac{4x+20}{x+12}=\dfrac{4(x+12)-28}{x+12}=4-\dfrac{28}{x+12}$가 되니까. 점근선은 $x=-12$, $y=4$, 정의역은 $x\neq-12$인 모든 실수, 치역은 $y\neq 4$인 모든 실수이고 그래프 :



연구자 : 형태는 왜 바꾸어 주어야 하는 것이지?

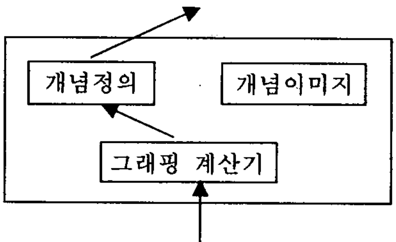
M : 점근선을 구해야 정의역, 치역을 구하고 그래프도 그리잖아요. 근데 $y=\dfrac{4x+20}{x+12}$만 보고는 점근선을 구하지 못하니까 점근선을 구할 수 있는 식으로 바꾸어주어야 해요.

연구자 : 점근선을 구하는 식은 어떻게 알게 된 거지?

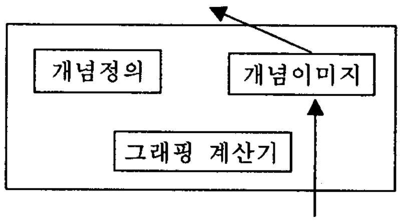
M : 책에 나오잖아요. 그래서 외웠는데요.

A학생의 경우는 의사개념적 행동을 가장 많이 보였는데 Vinner의 이론처럼 의사지식의 사용에서 연구자에게 인정받기 위해 알지 못하는 사실을 아는 것처럼 말하였다. 반면 C학생은 Vinner의 의사 개념적 행동에서 자신의 지식이 올바른 것이라고 생각하고 있다는 이론과 같은 행동을 보였다. M학생의 경우는 모든 문제 해결 시 프로토콜 10과 같은 의사 분석적 행동을 보였다. 개념 정의가 형성되기 전에 이미 개념이미지를 가지고 있었고 그리고 예시 문제를 풀면서 푸는 방법을 익혀나갔다. 이 학생의 경우는 그동안 풀어 본 문제가 많은 만큼 개념이미지와 개념정의 간의 상호작용이 잘 이루어진 편이었고 잘못된 개념이미지에 대해서는 그 수정이 쉽지 않았다.

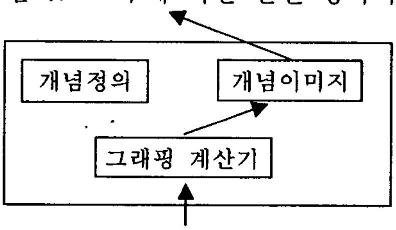
연구문제 (1)과 (2)를 살펴봤을 때 학생들은 개념정의보다는 주로 개념이미지를 가지고 함수 문제를 해결해 간다는 것을 알 수 있었다. 그리고 Vinner의 인지모델을 토대로 세 학생의 그래핑 계산기환경에서의 함수의 개념적 이해에 대한 과정을 다음과 같은 새로운 모델로 나타낼 수 있었다.



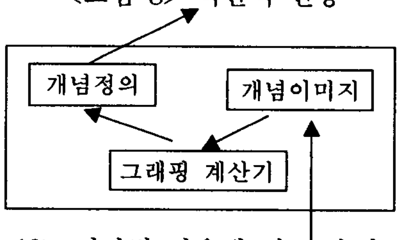
<그림 7> 도구에 의한 완전 형식적 연역



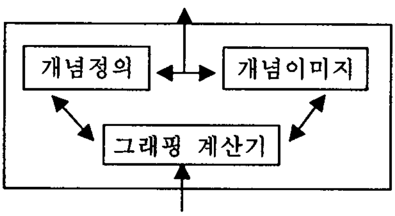
<그림 8> 직관적 반응



<그림 9> 도구에 의한 직관적 반응



<그림 10> 직관적 반응에 따른 순차적 발달



<그림 11> 순환적 상호작용

위의 모델은 연구자가 Vinner의 인지적 모델을 바탕으로 그래핑 계산기를 사용한 환경에서의 모델로 새롭게 재구성한 것이다.

<그림 7>은 그래핑 계산기를 통해 얻게된 개념정의를 가지고 문제를 해결하는 모델로 C학생의 학습과정에서 주로 나타났다. 이 모델은 내용의 전반적인 부분에서 나타나기보다는 문제를 푸는 과정에서 새로운 내용을 유추하면서 나타났다. C학생은 프로토콜 7에서 유리함

수의 그래프를 그려보면서 점근선의 내용을 배우지 않았음에도 그래핑 계산기의 조작을 통해 점근선의 의미를 파악해 갔고 프로토콜 4에서 보듯이 그래프를 통해 식까지 유추할 수 있을 정도의 실력까지 되었다.

<그림 8>은 그래핑 계산기 없이 개념이미지만으로 문제를 해결하는 모델로 M학생의 학습과정에서 주로 나타났다. M학생의 경우는 문제의 과정이나 이해보다는 옳은 답을 구하는 것을 중요시 여기고 있었고 모든 내용에 대해 개념 정의보다는 개념 이미지를 가지고 문제를 해결하였다. 하지만 이 학생은 다양하고 많은 문제를 통해 올바른 개념이미지를 가지고 문제를 해결하였다. 프로토콜 1에서 함수 그래프를 찾는 문제에서 보면 정의는 제대로 이해하지 못하지만 다른 계산문제에서는 반복학습에 의해 올바른 답을 유도해 나갔다. 하지만 이 모델은 학생이 잘못된 개념이미지를 가지게 되었을 때 그 수정이 쉽지 않은 점이 있었다.

<그림 9>는 그래핑 계산기를 통해 개념이미지를 가지고 문제를 해결하는 모델로 <그림 8>의 모델과 유사하지만 이 모델은 잘못된 개념이미지를 가졌을 때 그래핑 계산기를 통해 재확인해봄으로 오류의 수정이 용이하다는 장점이 있다. 프로토콜 2에서 A학생은 그래핑 계산기에서 함수를 그려보았을 때 무한의 의미를 이해하지 못하고 그래프를 끊어서 생각하였고 그래서 zoom-in 기능을 사용하여 그래프의 모습을 확인하면서 잘못된 개념이미지를 수정해 나갔다. 또 프로토콜 8에서 C학생은 의사지식의 사용에서 자신이 개념정의를 가지고 있다고 생각하였고 그래핑 계산기의 학습을 통해 자신이 무엇을 모르고 있었는지 알게 되었다.

<그림 10>은 개념이미지가 그래핑 계산기를 통해 개념정의로 바뀌는 모델이다. 프로토콜 4>에서 C학생은 꼭지점 대칭이 무엇인지 정확히 알고 있지 못한데다 잘못된 개념이미지를 가지고 있었고 이차함수의 그래프를 제대로 그리지도 못했지만 그래핑 계산기를 통한 그래프 학습을 통한 잘못된 개념이미지도 바로잡고 개념정의도 확실하게 학습해 나갔다.

<그림 11>은 그래핑 계산기를 통한 정의와 이미지의 상호작용 모델로 이상적인 모델이라고 볼 수 있다. 프로토콜 7에서의 C학생과 같은 학습과정을 보면 잘못된 개념이미지도 수정이 용이하고 개념정의에 대해서도 가장 확실히 이해가 되는 모델이라고 보여졌다.

연구 문제를 중심으로 결과분석의 내용을 정리해 보았다.

첫째, 함수에 대한 사전학습이 없었던 학생은 그래핑 계산기 환경에서 많은 정보를 얻으면서 개념 정의를 가지게 되었고 스스로 탐구하는 학습을 하였다. 반면 사전 학습이 있었던 학생은 함수에 대한 많은 개념이미지를 가지고 있었기 때문에 그래핑 계산기의 사용을 불필요하게 생각하였고 그 효과도 별로 나타나지 않았다.

둘째, 학습 할 때 학생들은 개념 정의가 생기기도 전에 이미 개념 이미지를 형성하였다. 처음 형성된 개념 이미지는 옳은 경우보다는 옳지 않은 경우가 좀 더 많았다. 그리고 잘못된 개념 이미지를 형성한 초기에는 그 수정이 비교적 쉬웠지만 시간이 지날수록 잘못된 개념이미지의 수정이 어려웠다. 탐구 학습을 어려워하는 학생에게는 연구자가 적절한 문제해결방안을 제시하였을 때 잘못된 개념이미지가 수정되었다.

셋째, 학생들은 자신이 개념이미지를 가지고 문제를 풀고 있음에도 스스로는 개념정의

를 가지고 있는 걸로 생각하고 있었다. 그리고 개념의 이해에 의한 문제 해결보다는 이미 풀어본 문제에 대한 경험으로 연구과정 문제를 해결해 나갔다.

연구과정을 거치면서 학생들이 가장 어려워했던 부분이 그래프에 대한 해석과 문제의 이해였다. 문제 해결과정에서 초기에 학생들은 답을 맞추는 것에 만족하려는 경향을 보이고 '왜'라는 질문에 당황해 하며 '그게 답이니까요'식의 단편적인 대답만을 하였다. 하지만 연구과정을 거치면서 학생들은 '왜'라는 질문에 조리 있게 설명할 수 있게 되었고 그래프를 통해 알 수 있는 많은 정보들을 발견하면서 함수 개념에 대한 이해도에 상당한 발전을 보였다. 이제 막 함수를 배우는 학생들에게 그래핑 계산기와 같은 도구를 이용해 그래프의 모습을 보여주고 거기서 얻어진 정보를 바탕으로 한 함수 학습은 학생들에게 흥미를 유발시켜 설명식 수업이 아닌 학생 스스로 탐구하는 수업이 진행될 수 있게 하여 결과적으로 수학을 재미있는 과목으로 인식을 바꾸어줌으로 학생들의 수학적 능력이 향상 될 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 그래핑 계산기가 제공되는 테크놀로지 환경에서 학생이 함수의 개념적 이해를 어떻게 획득하는지 이해하기 위해 학생들의 학습과정을 연구하고자 하였고, 그래핑 계산기를 사용하면 함수에 대한 학생들의 실력이 향상된다는 것, 즉 그래핑 계산기가 모든 문제 해결을 돕고 올바른 답을 찾게 해준다는 것을 보여주고자 함이 아니라 함수의 개념 발달 과정에서 도구가 효과적으로 사용되어 좀 더 재미있고 의미 있게 함수를 배울 수 있다는 것을 보여주고자 하였다.

함수에 대한 사전학습이 다른 세 학생을 선발하여 위의 연구문제를 가지고 한 명씩 원하는 시간을 정하여 정성 연구를 하였다. 연구 과정동안 참여관찰을 하면서 녹음기나 지면을 이용해 기록하였다.

본 연구는 결과분석으로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 역동적이고 스스로 탐구하는 학습이 이루어짐으로써 기존의 교사 설명식 수업이 아닌 학생 중심의 수업이 이루어질 수 있다. 교사가 용어에 대해 설명해주고 이에 대한 예를 들어주는 수업에서는 암기식 수업이 될 수 있으며 개념 정의보다는 개념 이미지가 형성되기 쉽다. 하지만 학생 스스로 자발적인 학습에서는 탐구하는 과정을 통해 개념 정의가 형성될 수 있다.

둘째, 그래핑 계산기는 함수의 그래프를 신속하고 정확하게 그릴 수 있고 시각적 효과로 학생들이 함수의 그래프를 파악하는데 도움이 되며 이는 함수에 대한 직관적이고 쉬운 개념정의 이해를 가능하게 한다. 대수식에서 쉽게 찾아낼 수 없는 정보도 그래프를 통해서 한눈에 보면서 함수정의에 대해서 교사의 적절한 질문을 통해 암기가 아닌 개념 이해로의 발달을 가능하게 한다. 그리고 함수에 대한 반례를 제공함으로써 잘못된 개념이미지에 대해 오류를 스스로 파악하고 그 수정과정이 용이해진다.

셋째, 학생들의 수학적 능력에 대한 자신감을 회복하게 해주는 계기가 될 수 있다. 수학에 공포감이 있는 학생들은 특히 쉬운 대수식의 문제조차 어려워하였다. 수학에 대한 자신

감이 없어지면서 학생들은 잘못된 개념이미지를 갖거나 그것조차 가지고 있지 않는 경우가 있다. 이런 학생들에게 그래프를 통한 함수학습을 한 후 대수식을 보여주면 별 거부감 없이 받아들일 수 있을 것이다.

수학학습의 효과를 높이기 위해선 그래핑 계산기의 사용에서도 교사의 안내가 매우 중요하다. 도구사용의 적절한 안내가 뒤따르지 않을 때 학생들은 도구에 과도하게 의존함으로써 잘못된 조작법이나 도구의 특성에 의한 수업자료로 오히려 학생들에게 오개념을 가져올 수 있다. 그리고 아직까지 우리나라의 교육환경은 일대일 수업이 불가능한 현실이라 학생 개개인의 특성을 고려하기 어려워 결국 탐구 수업이 아닌 일제수업이 될 가능성이 높은데 이에 대한 개선이 시급하다.

본 연구의 이런 모든 점을 고려하여 본 연구를 토대로 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 그래핑 계산기를 이용한 함수학습에서 함수의 개념 정의로 이끌어 줄 수 있는 학습 환경과 함께 학습 자료의 개발이 필요하다. 그래핑 계산기를 이용한 함수 학습 자료에 대한 연구가 많이 나오고 있지만 아직까지는 미흡한 상태이다. 함수 학습에서 개념정의를 위해 그래핑 계산기를 효과적으로 사용할 수 있는 학습자료의 개발이 필요하다.

둘째, 잘못된 개념이미지에 대한 교사의 대응책이 필요하다. 함수에 대한 대부분의 문제는 개념 이미지를 가지고도 풀 수 있지만 잘못된 개념이미지를 가지는 경우에는 쉬운 문제, 연구과정에서 보았듯이 함수를 찾아내는 문제조차 풀지 못한다. 그래서 개념 이미지만을 가지고 풀 수 없는 다양한 문제를 보여줌으로써 잘못된 개념 이미지를 수정할 수 있도록 교사가 지도해야한다.

셋째, 그래핑 계산기와 같은 수학 도구를 사용할 수 있는 수업환경이 요구된다. 최근에 수학수업시간에 수학적 도구들을 사용하려는 시도가 많이 있다. 하지만 교실 환경이 제대로 갖춰지지 않아 도구 사용이 제대로 이루어지지 않고 오히려 불필요하게 느껴진다.

넷째, 실생활에서 접하는 현상을 통한 함수 학습이 이루어져야 한다. 교과서나 학습지 등을 통한 한정된 함수의 내용만을 배우게 됨으로 함수의 필요성을 느끼지 못하고 있다. 함수에 대한 다양한 예를 접하게 함으로 실생활에서의 함수의 쓰임새와 그 필요성을 느낄 수 있게 해주어야 한다.

참고문헌

김남희(1997). Vinner이론에 따른 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동에 관한 소고, 대한수학 교육학회 논문집, 7(2), 337-348.

고상숙 & 한세호(1999). 중등 수학 교수-학습에서 TI-92 Graphing Calculator의 활용; 함수편, 대한수학 교육학회 추계 학술발표대회.

구광조 · 오병승 · 류희찬(공역)(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 경문사 교육부(1999). 중학교 교육과정 해설(III). 서울: 교육부.

권오남 · 김기연 · 김래영 · 박지연(1997). 수학적 시각화를 위한 그래픽 컴퓨팅 테크놀러지의 활용방안, 대한수학 교육학회 추계 연구 발표 논문집, 293~318.

남호영(1998). 함수지도의 대안-역사발생적 관점을 중심으로, 수학사랑 제 1회 Math Festival, 1~20.

박교식(1992). 함수 교육의 교육적 기초. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.
박선화(1993), 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등요인에 관한 고찰 - 개념정의와 개념이미지의 관계를 중심으로, 대한수학교육학회 논문집, 3(1), 185~194.
성호금(2000), 수학적 모델링 지도가 수학적 신념 및 학업 성취도에 미치는 영향, 한국교원대 석사학위논문.
신동선, 류희찬(1998). 수학교육과 컴퓨터. 서울: 경문사.
신인숙(1996). 중학생 함수에 대한 유개념 및 오류에 관한 연구. 한국교원대 석사학위 논문.
이중권(2003). 수학교육에서 질적연구방법, 한국수학교육학회지, 4(2), 111~119.
우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
차용순(2000). 그래픽 계산기를 활용한 이차함수 단원 구성에 관한 연구. 대한수학교육학회 2000년도 추계 논문집.
한세호(2001). 학교현장에서의 그래핑 계산기(TI-92 plus) 활용방안 연구, 수학사랑 제 3회 Math Festival, 322~335.
하양희(2000). 그래픽 계산기를 활용한 수업이 중학생들의 이차함수 학습에 미치는 효과. 한국교원대학교 석사학위 논문.
하현숙(2000). 그래픽 계산기를 이용한 실용수학 지도에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
황우형 외 2인(1995). 고등학생의 함수 개념 이해에 관한 사례연구. 대한수학교육학회 논문집, 5(2), 173~187.
황우형(1996). 그래픽 계산기 활용의 실제. 대한수학교육학회 논문집, 6(1), 45~54.
Berry, J. & Francis, B.(1996). Discovering advanced mathematics with calculator activities. In P. Gomez & B. Waits(Eds.), *Role of Calculators in the Classroom(p.*3-14), Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics,
Chandler, P. A.(1992). *The Effect of the Graphing Calculator on High School Studens' Mathematical Achievement*. University of Houston.
Demana, F. & Waits, B. K.(1997). *The Merging of Calculators and Computers : A Look to the Future of Technology Enhanced Teaching Learning of Mathematics*, The Ohio State University, Columbus.
Dugdale, S.(1993). Function and graphs-perspectives on student thinking. In Romberg, T .A., Fennema, E., & Carpenter, T. P.(Eds), *Integrating Researching on the Graphical Representation of Function.* Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
Dunham, P. H. & Dick, T. P.(1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, 87(6), 440-445.
Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics, Dordrecht: Reidel.
Galindo, E. (1994). Visualization in the calculus class: The role of students' cognitivre style in their use of a computer algebra system. *Unpublished manuscript,* Indiana University, Bloomingtion, IN.
Heid, M. & Baylor, T. (1993). Computing technology. In Wilson, P. (Ed.), *Research Ideas for the classroom: High school mathematics*. New York, N.Y.: MacMillan Publishing Co.
Hembree, R. & Dessar, D. J.(1986). Effect of hand-held Calculators in precollege

mathematics education : a meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Educations 17*, 83-99.

Jennifer J. Hooper(1996). Students' concept of rational functions as developed in a computer graphing environment. *Unpublished Doctoral Dissertation*, University of Georgia.

Merriam, S. B.(1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education,* San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

National council of Teachers of Mathematics(1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The Author.

National council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Steen, L. (1987). Paper and Pencil Maths. *The Chronicle of Higher Education.*

Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Vinner, S.(1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 14(3), 293.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definition for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 4.

Vinner, S.(1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking(pp. 65-81).* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S.(1997). From Intuition to Inhibition Mathematics, Education and other Endangered Species, *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.1,* 63~78.

Williams, S. R.(1993). Some common themes and uncommon direction. In Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Researching on the Graphical Representation of Function.* Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Yerushalmy, M., & Schwartz, G.(1993). Seizing the Opportunity Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting. In Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P.(Eds), *Integrating Researching on the Graphical Representation of Function.* Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Conceptual Understanding of Functions through a Graphing Calculator

Choi-Koh, Sangsook[4] · Lee, Yunkyoung[5]

Abstract

The purpose of this study is to investigate students' understanding of functions based on concept image and concept definition suggested by Vinner. For the study a graphing calculator was provided as a tool for students to use for their exploration. Three students participated in the study using the qualitative research method to identify their processes of understanding functions. The student with previous experiences of the functions had various concept images about the functions and did not have many opportunities to modify their images because the student did not want to depend on the calculator. However, the student who did not have many chances to study about the functions before used the calculator effectively for developing the concept definition on the functions. The calculator played an important role in connecting different representations and finding relationships between these representations supported by dynamic exploration.

Key Words: Function, Concept image, Concept definition, Graphing calculator, Visualization

4) Dankook University(sangch@dankook.ac.kr)
5) The Graduate School of Dankook University(0611yunk@hanmail.net)