한국수학사학회지 제18권 제3호(2005년 8월), 107-118

선형 근사 헨스톡 적분방정식에 대하여*

충북대학교 수학과 **임동일**
dirim@chungbuk.ac.kr

충북대학교 수학과 **임복영**
lby590908@naver.com

본 논문에서는 선형 헨스톡 적분방정식과 조금 다른 선형 근사 헨스톡 적분방정식을 소개하고, 어떤 적분방정식이 헨스톡 적분의미에서는 해를 갖지 않지만 근사 헨스톡 적분의미에서는 해를 갖는 예를 보이고 더욱 더 우리는 선형 근사 헨스톡 적분방정식의 해의 존재성과 유일성에 대하여 연구하였다.

주제어 : 근사분산, 근사 헨스톡 적분, 헨스톡 적분.

1. 서론

뉴톤(Newton)이래로 적분은 수학뿐만 아니라 과학에도 중요한 역할을 해 왔다. 그러나 시간이 흐름에 따라 초기의 리만(Riemann)적분만으로는 수학적이거나 과학적인 문제를 해결하기에는 많은 부족함이 있었다. 이러한 시점에서 고안된 유용한 적분이 측도개념을 바탕으로 고안된 르벡(Lebesgue)적분이다. 리만(Riemann)적분이 적분구간 내에서 거의 연속인 함수를 적분할 수 있는 것에 비하여 새로운 개념의 르벡(Lebesgue)적분은 연속인 함수는 어느 정도 적분이 가능하며 리만(Riemann)적분에 비하여 훨씬 덜 까다로운 조건하에서도 적분의 중요한 수렴정리가 성립한다는 장점이 있다. 다만 측도란 개념을 도입하여야 한다는 어려움이 있어 처음 이 적분을 접하는 사람은 어느 정도의 어려움을 갖게 된다는 단점이 있다.

이 르벡(Lebesgue)적분 이래로 좀더 일반적인 적분이 나타났다. 이것이 덴조이(Denjoy) 페론(Perron) 등의 적분이다. 이 적분과 기존에 있었던 적분과의 가장 큰 차이점은 다음과 같다. 먼저 이 적분들은 비절대적분이라는 것이다. 즉 어느 함수 f가 덴조이(Denjoy) 페론(Perron)적 의미로 적분가능하다고 해서 $|f|$가 항상 적분가능하다고 말할 수 없다는 것이다[2]. 두 번째로 이 적분은 코우시(Cauchy)와 하낙(Harnack)의 확장정리가 성립한다는 것이다[3]. 이러한 적분들이 등장한 이래로 리만

* 이 논문은 2005년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

(Riemann)형의 적분의 연구가 끝날 것으로 생각해 왔으나 1950년대 쿠르트바일(Kurzweil)은 상미분방정식을 연구한데 기존의 리만(Riemann)적분의 정의를 조금 일반화한 적분을 사용했는데 이것을 체계적으로 연구한 사람은 헨스톡(Henstock)이다. 약간의 정의의 변형은 실로 커다란 의미를 지니고 있었다. 이 헨스톡(Henstock)적분이 덴조이(Denjoy) 페론(Perron)적분과 동등한 적분이라는 것을 고르돈(Gordon)[2]에 의하여 증명되었다. 그러나 이 적분이 르벡(Lebesgue)적분, 덴조이(Denjoy)적분, 페론(Perron)적분보다 배우기에 훨씬 용이하다는 것이다. 즉 리만(Riemann)적분에 어느 정도 익숙한 사람이라면 이 적분을 이해하기에 큰 어려움이 없다는 것이다. 이 헨스톡(Henstock)적분은 더욱이 측도의 개념을 거의 필요로 하지 않는다는 장점을 갖고 있으며, 복잡한 수렴의 결과도 고등 위상개념이 없이 다만 기본적인 도구를 사용하여 유도할 수 있다는 것이다. 리만(Riemann)형 합에 기초를 둔 멕쉐인(McShane)적분과 헨스톡-쿠르츠바일(Henstock-Kurzweil) 적분의 비교적 새로운 개념은 바나흐(Banach) 공간에서 함수값을 갖는 함수의 적분방정식을 연구하는데 유용하다.

이 논문에서는 고전적인 적분 형태와 약간 다른 근사 헨스톡(approximate Henstock) 적분의미에서 선형 근사 헨스톡(Henstock) 적분방정식을 소개하고, 그 적분방정식의 해가 유일하게 존재하는 조건을 구하는데 그 목적이 있다.

2. 용어정의 및 예제

X, Y와 Z는 실수치 바나흐(Banach) 공간이고 $X \times Y$에서 Z로의 겹선형사상(bilinear mapping) B가 존재한다고 하자. X에 속하는 x와 Y에 속하는 y에 대하여 겹선형사상(bilinear mapping) B의 값은 $xy = B(x, y)$로 나타내기로 한다. 그리고 $\|xy\|_Z \leq \|x\|_X \|y\|_Y$ 라고 한다. 이러한 성질을 갖는 바나흐(Banach) 공간 X, Y, Z의 쌍을 겹선형조(bilinear triples)라고 부르고 $B = (X, Y, Z)$로 나타낸다. $\mathbb{R}$의 부분집합 $[a, b]$, $[c, d]$는 유계구간이라 하고, X는 한 바나흐(Banach) 공간이라고 가정하자. 그러면 x는 $[a, b] \times [c, d]$에서 X로의 함수이고, $[a, b]$ 안에 있는 폐구간 $J = [c, d]$에 대하여

$$x(\tau, [c, d]) = x(\tau, d) - x(\tau, c)$$

로 정의한다. 태그구간(tagged interval) $(\tau, [c, d])$는 $[a, b]$의 부분집합인 한 구간 $[c, d]$와 $[c, d]$의 원소인 τ로 이루어진 것이다. $[a, b]$ 위에서의 양함수 δ에 대하여 $[c, d] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$을 만족할 때 태그구간(tagged interval)

$(\tau, [c, d])$는 계기(gauge) δ에 대한 δ-세분(δ-fine)이라고 한다[2]. 지금 P를 서로 겹치지 않는 태그구간(tagged interval)들의 유한개의 집합이라고 하자. 그리면 P는

$$P = \{(\tau_j, [c_j, d_j]) : 1 \leq j \leq m\}$$

로 나타낸다. 만일 각 j에 대하여 $(\tau_j, [c_j, d_j])$이 δ-세분이라면 P를 δ-세분이라 부르고, 또 만일 P가 δ-세분이고 $\bigcup_{j=1}^{m}[c_j, d_j]=[a, b]$이면 P는 $[a, b]$의 δ-세분분할(δ-fine partition)이라고 부른다. $d_\tau T_\tau = 1$ 이고 T_τ의 원소 τ를 갖는 $[a, b]$의 부분집합 T_τ [2, p.223]가 가측집합이라 하자. 그러면

$$T = \{T_\tau : \tau \in [a, b]\}$$

를 $[a, b]$ 위에서 근사분산(approximate distribution)이라 한다. δ-세분 태그구간 $(\tau, [c, d])$의 원소 c, d가 T_τ의 원소라면 $(\tau, [c, d])$는 $\delta(T_\tau)$-세분이라 한다. 모든 $j=1, 2, \cdots, m$에 대하여 $(\tau_j, [c_j, d_j])$이 $\delta(T_{\tau_j})$-세분이고

$$\bigcup_{j=1}^{m}[c_j, d_j] = [a, b]$$

이면 태그분할 $P = \{(\tau_j, [c_j, d_j]) : 1 \leq j \leq m\}$을 $[a, b]$의 $\delta(T)$-세분분할이라고 부른다. T_1, T_2가 $[a, b]$위에서 두 근사분산이라고 하면 T_1의 원소 T_τ^1과 T_2의 원소 T_τ^2에 대하여 $d_\tau(T_\tau^1 \cap T_\tau^2) = 1$ [2, 정리 14.2]이기 때문에

$$T = \{(T_\tau^1 \cap T_\tau^2 : \tau \in [a, b]\}$$

도 또한 $[a, b]$위에서 근사분산이다. 함수 $y : [a, b] \to X$가 $[a, b]$ 안에 있는 모든 점에서 한쪽 극한을 가지면 함수 y를 regulated라 부른다. 또 함수 $x : [a, b] \times [a, b] \to X$가 $[a, b] \times [a, b]$의 모든 점에서 한쪽 근사극한을 가지면 함수 x를 $[a, b]$ 위에서 근사 regulated라 부른다[7].

$P = \{(\tau_j, J_j) : j=1, 2, \cdots, k\}$가 $[a, b]$의 δ-세분분할이고

$$S(dx, y, P) \equiv \sum_{j=1}^{k} x(\tau_j, J_j) y(\tau_j)$$

인 $S(dx, y, P)$에 대하여 $\| S(dx, y, P) - I \|_Z < \varepsilon$인 δ가 $[a, b]$ 위에서 존재한다면 $d[x]y$가 $[a, b]$ 위에서 헨스톡(Henstock) 적분가능하다고 하고

$$I = (H)\int_a^b [dx(\tau, t)]y(\tau)$$

로 나타낸다[7].

또 $B=(X,\ Y,\ Z)$가 겹선형조(bilinear triples)이고
함수 $x:[a,\ b]\times[a,\ b]\to X$인 x와 함수 $y:[a,\ b]\to Y$인 y가 주어져 있고 P가 $[a,\ b]$의 δ-세분분할이라 할 때

$$\| S(dx,\ y,\ P)-I\|_Z<\varepsilon, \qquad I\in \mathrm{Z}$$

인 $[a,\ b]$위에서의 δ가 존재하는 근사분산 T가 존재하면 $d[x]y$를 근사 헨스톡(approximate Henstock) 적분가능하다고 말하고 그 적분값 I는

$$I=(AH)\int_a^b [dx(\tau,\ t)]\,y(\tau)$$

로 표시한다. 다음은 근사 헨스톡 적분방정식 (2.1)과 헨스톡 적분방정식 (2.2)의 해에 관하여 생각하기로 한다.

지금 g는 $[a,\ b]$위에서 Y로의 한 유계변동함수라 하자. 적분방정식

$$y(s_2)-y(s_1)=(AH)\int_{s_1}^{s_2} d[x(\tau,t)]\varphi(y(\tau))+g(s_2)-g(s_1),\ s_1,\ s_2\in[a,\ b] \quad (2.1)$$

에서 g와 x는 기지함수이고 y는 미지함수일 때 방정식 (2.1)의 해는 존재하지만 적분방정식

$$y(s_2)-y(s_1)=(H)\int_{s_1}^{s_2} d[x(\tau,t)]\varphi(y(\tau))+g(s_2)-g(s_1),\ \ s_1,\ s_2\in[a,\ b] \quad (2.2)$$

의 해는 존재하지 않음을 다음 예에서 알 수 있다.

예제 1.1. a_n은 모든 $n\in N$에 대하여 $a_n<a_{n+1}$인 $(0,\ 1)$안에 있는 수열이고 $n\to\infty$일 때 $a_n\to 1$이라고 하자. $f,\ g$는 $[a,\ b]$에서 $\mathbb{R}$로의 함수로서

$$f(s)=\begin{cases}1, & s\in[0,1]-\{a_n\}\\ 0, & s\in\{a_n\}\end{cases}, \qquad g(s)=\begin{cases}s, & s\in[0,1]-\{a_n\}\\ \frac{1}{2}, & s\in\{a_n\}\end{cases}$$

이라 정의하고, 또 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$에서 $\mathbb{R}$로의 함수 x를 $x(\tau,\ t)=f(\tau)g(t)$로 정의하자. 그리고 적분방정식

$$y(s)=1+(AH)\int_0^1 d[x(\tau,t)]y(\tau), \qquad s\in[0,\ 1]$$

즉

$$y(s)=1+(AH)\int_0^s fy\,dg \quad (2.3)$$

을 생각하자. 지금부터 편의상 적분기호 앞의 (AH)를 생략하고 설명하겠다. $y(s)=e^s$가 식 (2.3)의 한 해임을 다음 이유에 의하여 알 수 있다.

i) $s \in [0, 1)$ 인 경우 :

① $s \in [0,\ a_1)$ 이면 $\int_0^s fy\,dg = \int_0^s e^t dt = e^s - 1$

② $s = a_1$ 이면 정리 1.14 [6]에 의하여

$$\int_0^{a_1} fy\,dg = (ap)\lim_{d \to a_1}\left[\int_0^d fy\,dg + f(a_1)y(a_1)(g(a_1) - g(d)\right]$$

$$= (ap)\lim_{d \to a_1}\int_0^d e^t dt = e^{a_1} - 1$$

따라서 $\int_0^{a_1} fy\,dg = e^{a_1} - 1$ 이다.

유사한 방법으로 계산하면 $\int_0^{a_n} fy\,dg = e^{a_n} - 1$ 이다.

ii) $s = 1$ 인 경우 :

$\Upsilon = [0,\ 1] - \{a_n\}$ 인 Υ 을 택하면 $(ap)\lim_{d \to 1^-} g(d) = g(1) = 1$.

따라서

$$\int_0^1 fy\,dg = (ap)\lim_{d \to 1^-}\left[\int_0^d fy\,dg + f(1)y(1)(g(1) - g(d))\right]$$

$$= (ap)\lim_{d \to 1^-}\int_0^d e^t dt = e - 1$$

이다.

그러므로 i)와 ii)에 의하여 $[0,\ 1]$ 의 모든 원소 s에 대하여 $y(s) = e^s$는 식 (2.1)의 한 해이다.

다음은 적분방정식

$$y(s) = 1 + (H)\int_0^s fy\,dg \tag{2.4}$$

가 해를 갖지 않음을 보이겠다. 지금부터 편의상 적분기호 앞의 (H) 를 생략하고 설명한다. 만약 식 (2.2)가 한 해 $y(s)$ 를 갖는다고 가정하자. 만일 $\int_a^b d[x(\tau, t)]y(\tau)$ 가 존재한다면 정리 1.14 [8]에 의하여

$$\int_a^b d[x(\tau,\ t)]y(\tau) = \lim_{c \to a^+}\left[\int_c^b d[x(\tau,\ t)]y(\tau) + (x(a,\ c) - x(a,\ a))y(a)\right]$$

$$= \lim_{d \to b^-}\left[\int_a^d d[x(\tau, t)]y(\tau) + (x(b, b) - x(b, d))y(b)\right]$$

이 된다. 만일 $[0, a_1)$ 의 원소 s에 대하여 생각하면

$$y(s)=1+\int_0^s fy\,dg=1+\int_0^s y(t)\,dt$$

그런데 y가 $[0,\ a_1)$ 위에서 연속이므로 미적분의 기본정리에 의하여 $\frac{dy}{dx}=y(s)$ 이므로 $y(s)=ce^s$이다. 그런데 $s=0$ 일 때 $y=1$ 이므로 $y(s)=e^s$이다. 다음으로 $s=a_1$인 경우를 생각하면

$$\int_0^{a_1} fy\,dg=\lim_{d\to a_1^-}\left[\int_0^d fy\,dg+f(a_1)y(a_1)(g(a_1)-g(d))\right]$$

$$=\lim_{d\to a_1^-}\int_0^d e^t dt=e^{a_1}-1$$

이것은 $s=a_1$일 때 $y=e^{a_1}$임을 의미한다. 따라서 $y(s)=e^s$는 $[0,\ a_n]$의 원소 s에 대하여 (2.2)의 한 해임이 틀림없다. 유사한 방법으로 $[0,\ 1)$의 원소 s에 대하여 $y(s)=e^s$가 식 (2.2)의 해임을 보일 수 있다. 다음으로 생각해야 할 경우는 $y(1)=0$ 인 경우와 $y(1)\neq 0$ 인 경우 두 경우이다.

i) $y(1)=0$ 인 경우:

$$\int_0^1 fy\,dg=\lim_{d\to 1^-}\left[\int_0^d fy\,dg+f(1)y(1)(g(1)-g(d))\right]$$

$$=\lim_{d\to 1^-}\int_0^d e^t dt=e-1$$

그러나 이것은 $y(1)=0$ 이기 때문에 모순이다.

ii) $y(1)\neq 0$ 인 경우:

$$\int_0^1 fy\,dg=\lim_{d\to 1^-}\left[\int_0^d fy\,dg+f(1)y(1)(g(1)-g(d))\right]$$

$$=\lim_{d\to 1^-}\left[\int_0^d e^t dt+y(1)(1-g(d))\right]$$

윗 식의 값이 존재하려면 $\lim_{d\to 1^-} g(d)$가 존재하여야 한다. 실제 함수 g의 정의에 의하여 $\lim_{d\to 1^-}(1-g(d))$ 는 존재하지 않는다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여 식 (2.1)의 해는 존재하지만 식 (2.2)의 해는 존재하지 않는다. 그러면 다음 절에서는 선형 근사 헨스톡(Henstock) 적분방정식의 해가 유일하게 존재할 조건을 구하여 보기로 한다.

3. 선형 근사 헨스톡 적분방정식

폐구간 $J_j = [c_j,\ d_j] \subset [a,\ b]$에 대하여 x를 다음과 같이 정의한다.

$$x(\tau_j,\ J_j) = x(\tau_j,\ d_j) - x(\tau_j,\ c_j)$$

$[a,\ b]\times[a,\ b]$에서 $L(X)$로의 함수 x가 주어졌을 때 $[a,\ b]$에서 $\delta(T)$-세분분할 $\{(\tau_j,\ J_j) : j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$과 어떤 계기(gauge) δ에 대하여

$$V_a^b(x, T, \delta) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{k} \| x(\tau_j, J_j) \|_{L(X)}\right\} < \infty$$

인 근사분산 T가 존재한다면 함수 x는 $\delta(T)$-근사 유계변동이라고 하고, 이러한 모든 유계변동함수의 집합을 $BV_{ap}(T,\ \delta,\ [a,\ b]\ ;\ L(X))$로 나타내고 또

$$V_a^b(x,\ P,\ \delta) = \sup\left\{\| \sum_{j=1}^{k} x(\tau_j,\ J_j)y_j \|_X\right\}, \quad y_j \in X,$$

$$V_a^{*b}(x,\ P,\ \delta) = \sup\left\{\| \sum_{j=1}^{k} x(\tau_j,\ J_j)C_j \|_{L(X)}\right\}, \quad C_j \in L(X)$$

로 나타내고

$(B)V_a^b(x,\ T,\ \delta) = \sup V_a^b(x,\ P,\ \delta)$,

$(B^*)V_a^b(x,\ T,\ \delta) = \sup V_a^{*b}(x,\ P,\ \delta)$, $P = \{(\tau_j,\ J_j) : j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$

지금 $L(X)$가 X에서 X로의 모든 유계선형작용소들의 집합일 때 겹선형조(bilinear triples) $B = (L(X),\ X,\ X)$을 생각하자. $G(X) = G([0,\ 1]\ ;\ X)$는 $[0,\ 1]$위에서 X로의 모든 regulated인 함수들의 집합이라면 노름

$$\| y \|_{G(X)} = \sup_{s\in[0,\ 1]} \| y(s) \|_X$$

을 갖는 $G(X)$는 바나흐공간이다[4].

$$(\wedge y)(s) = \int_0^s d[x(\tau,\ t)]y(\tau),\ y \in G(X),\ s \in [0,\ 1] \tag{3.1}$$

인 관계를 갖는 작용소 $\wedge$를 $G(X)$에서 $G(X)$로의 작용소라 하고 $[a,\ b]\times[a,\ b]$에서 $L(X)$로의 함수 x가 $[a,\ b]$위에서 어떤 근사분산 T와 계기(gauge) δ에 대하여

$$SV_a^b(x,\ T,\ \delta) = \sup V_a^b(x,\ T,\ \delta),\ \ V_a^b(x,\ T,\ \delta) = \sup\left\{\| \sum_{j=1}^{k} x(\tau_j,\ J_j) \|_Z\right\},$$

$SV_a^b(x,\ T,\ \delta) < \infty$이고 x가 근사 regulated이면 x는 조건 (P)를 갖는다고 한다. 위 용어의 정의는 [1, 8, 9]에 있는 용어를 변형 정의한 것이다.

정리 3.1. d가 $[0,\ 1)$의 원소이고 $y_* \in X$, $f \in G([0,\ 1],\ X)$라고 가정하고 $[a,\ b]\times[a,\ b]$에서 $L(X)$로의 함수 x가 조건 (P)와

(E_+) $(B)\ V(x,\ T,\ \delta,\ (d,\ d+\Delta]) < \rho$

(E_-) $(B)\ V(x,\ T,\ \delta,\ [d-\Delta,\ d)) < \rho,\quad \Delta = \Delta(d) > 0,\quad 0 < \rho < 1$

을 만족하고 $L(X)$의 원소인

$$[I - \Delta^-_{ap}x(s,\ s)]^{-1},\quad \Delta^-_{ap}x(s,\ s) = x(s,\ s) - (ap)x(s,\ s^-) \tag{3.2}$$

가 $(d,\ 1]$의 모든 원소 s에 대하여 존재한다면

$$y(s) = y_* + \int_d^s d[x(\tau,\ t)]y(\tau) + f(s) - f(d),\ s \in [d,\ 1] \tag{3.3}$$

인 $G([d,\ 1]\ ;\ X)$의 원소 y가 존재한다.

증명: $[d,\ \gamma]$의 원소 s에 대하여 식 (3.3)이 성립하는 $G([d,\ \gamma],\ X)$의 원소 y가 존재하는 $(d,\ 1]$의 원소 γ의 상한을 γ^*라고 정의하고 γ^*가 1보다 작은 값이라 하자. 그러면 분명히 $[d,\ \gamma^*)$의 모든 원소 s에 대하여 식 (3.3)이 성립하는 $[d,\ \gamma^*)$에서 X로의 한 함수 y가 존재한다[5, 성질 2.4]. $y(\gamma^*)$를 다음과 같이 정의하자.

$$y(\gamma^*) = [I - \Delta^-_{ap}x(\gamma^*,\ \gamma^*)]^{-1}\left\{y_* + \int_d^{\gamma^*} d[B(\tau,\ t)]y(\tau) + f(\gamma^*) - f(d)\right\} \tag{3.4}$$

$B(\tau,\ t) = x(\tau,\ t) - L(t),\quad L(d) = 0,\quad L(t) = \Delta^-_{ap}x(t,\ t),\quad \tau,\ t \in (d,\ 1].$

$\int_d^{\gamma^*} d[B(\tau,\ t)]y(\tau)$은 $[d,\ \gamma^*]$의 원소 τ에서 $y(\tau)$의 값에 의하여만 결정되고 $[I - \Delta^-_{ap}x(\gamma^*,\ \gamma^*)]^{-1}$가 (3.2)의 가정에 의하여 존재하기 때문에 X의 원소 $y(\gamma^*)$는 잘 정의되고

$$[I - \Delta^-_{ap}x(\gamma^*,\ \gamma^*)]y(\gamma^*) = y_* + \int_d^{\gamma^*} d[B(\tau,\ t)]y(\tau) + f(\gamma^*) - f(d)$$

이 성립한다. [5, 성질 2.9]에 의하여 계산하면

$$\begin{aligned} y(\gamma^*) &= y_* + \int_d^{\gamma^*} d[B(\tau,\ t)]y(\tau) + \Delta^-_{ap}x(\gamma^*,\ \gamma^*)y(\gamma^*) + f(\gamma^*) - f(d) \\ &= y_* + \int_d^{\gamma^*} d[x(\tau,\ t)]y(\tau) + f(\gamma^*) - f(d) \end{aligned}$$

따라서 (3.4)에 의하여 γ^*에서 만족하는 함수 y는 $[d,\ \gamma^*]$ 위에서 (3.3)의 한 해이다. 지금 γ^*와 초기치 값 $y(\gamma^*)$에 대하여 극소적으로 존재한다는 것은 이미 증명되었던 바 [5, 성질 2.4] 여기서 다시 국소적 존재 방법을 사용하여

$[\gamma^*,\ \gamma^*+\Delta(\gamma^*)] \cap [0,1]$ 의 원소 s에 관한

$$Z(s) = y(\gamma^*) + \int_{\gamma^*}^{s} d[x(\tau,\ t)]Z(\tau) + f(s) - f(\gamma^*)$$

의 한 해인 $Z(s)$은 $G([\gamma^*,\ \gamma^*+\Delta(\gamma^*)]\ ;\ X)$의 원소가 되는 $\Delta(\gamma^*) > 0$ 가 존재함을 보일 수 있다. $[d,\ \gamma^*]$의 원소 s 에 대하여 $u(s) = y(s)$라 놓으면 $[\gamma^*,\ \gamma^*+\Delta(\gamma^*)]$의 원소 s에 대하여 $u(s) = Z(s)$ 이 된다. 그런데 $[d,\ \gamma^*+\Delta(\gamma^*)]$의 한 원소 s에 대하여도 식 (3.3)의 한 해를 얻는다면 이것은 γ^*가 상한이라는 가정에 모순이 된다. 따라서 $\gamma^*=1$ 이다.

정리 3.1의 증명 방법과 비슷하게 증명하면 다음 성질도 얻을 수 있다.

정리 3.2. d가 $[0,\ 1)$의 원소이고 $y_*\in X$, $f\in G([0,\ 1] : X)$이고 $[a,\ b]\times[a,\ b]$ 에서 $L(X)$로의 함수 x가 성질 (P), (E)와 $[0,\ d)$의 모든 원소 s에 대하여 $L(X)$ 의 원소

$$[I + \Delta^+_{ap}x(s,\ s)]^{-1}, \quad \Delta^+_{ap}x(s,\ s) = (ap)x(s,\ s+) - x(s,\ s)$$

가 존재한다면

$$y(s) = y_* + \int_{d}^{s} d[x(\tau,\ t)]\,y(\tau) + f(s) - f(d)$$

이 성립하는 $G([0,\ d]\ ;\ X)$의 원소인 y가 존재한다.

정리 3.3. $[a,\ b]\times[a,\ b]$에서 $L(X)$로의 함수 x가 성질 (P), (E)와

$$(U_+) \quad [I + \Delta^+_{ap}x(s,\ s)]^{-1}\in L(X), \quad \forall s\in[0,\ 1)$$

$$(U_-) \quad [I - \Delta^-_{ap}x(s,\ s)]^{-1}\in L(X), \quad \forall s\in(0,\ 1]$$

을 만족한다면 $d\in[0,\ 1)$, $y_*\in X$, $f\in G([0,\ 1]\ ;\ X)$일 때 $[0,\ 1]$의 모든 원소 s에 대하여

$$y(s) = y_* + \int_{d}^{s} d[x(\tau,\ t)]y(\tau) + f(s) - f(d) \tag{3.5}$$

을 만족하는 $G([0,1];\ X)$ 의 원소 y가 존재하고, 식 (3.5)의 해는 유일하게 결정된다.

증명: $[0,1]$ 의 원소 d가 주어지고 또 $y_*\in X$, $f\in G([0,\ 1]\ ;\ X)$이면 정리 3.1과 정리 3.2를 이용하여 증명할 수 있다. 지금 $u(s) = y(s)$, $s\in[d,\ 1]$와

$u(s)=Z(s)$, $s\in[0,\ d]$인 $u(s)$를 택하자. 그러면 $G([0,\ 1]\ ;\ X)$의 원소 y를 얻게 되는데 그 $y(s)$는 $[0,\ 1]$의 모든 원소 s에 대하여 식 (3.5)를 만족하게 된다. 다음은 식 (3.5)의 해 y의 유일성을 증명하자. 식 (3.5)의 두 해 y_1, y_2가 $G([0,\ 1]\ ;\ X)$의 원소라고 하자. 그러면

$$y_2(s)-y_1(s)=\int_d^s d[x(\tau,\ t)](y_2(\tau)-y_1(\tau)),\ s\in[0,\ 1] \tag{3.6}$$

이다. 즉

$$Z(s)=y_2(s)-y_1(s)=\int_d^s d[x(\tau,\ t)]Z(\tau),\quad s\in[0,\ 1]$$

이다. 그러면 식 (3.6)은 [5, 성질 2.4]에 의하여 $J_d=[d-\Delta,\ d+\Delta]\cap[0,\ 1]$, $\Delta>0$인 구간 J_d 위에서 $Z(s)=0$인 유일한 해를 갖는다. 지금 γ^*를

$$\gamma^*=\sup\{\gamma\in[d,\ 1]:\ Z(s)=0,\ s\in[d,\ \gamma]\}$$

이라고 놓으면 $Z(s)=0$, $\forall s\in[d,\ \gamma^*)$ 이다. 따라서

$$Z(\gamma^{*-})=\lim_{\gamma\to\gamma^{*-}}Z(\gamma)=0$$

그런데 Z가 식 (3.6)의 한 해이기 때문에 [5, 성질 2.3]에 의하여

$$Z(\gamma^{*-})=[I-\Delta^-_{ap}x(\gamma^*,\ \gamma^*)]\,Z(\gamma^*)=0$$

이고 $[I-\Delta^-_{ap}x(\gamma^*,\gamma^*)]^{-1}$이 존재한다는 가정에 의하여 $Z(\gamma^*)=0$을 얻을 수 있다. 만약 $\gamma^*<1$이면 방정식

$$Z(s)=Z(\gamma^*)+\int_{\gamma^*}^s d[x(\tau,\ t)]Z(\tau)=\int_{\gamma^*}^s d[x(\tau,\ t)]Z(\tau)$$

에 대하여 $[\gamma^*,\ \gamma^*+\Delta(\gamma^*)]$에 속하는 원소 s에 대하여 $Z(s)=0$인 한 $\Delta(\gamma^*)$이 존재한다는 것을 보일 수 있다. 그런데 이것은 γ^*의 정의에 모순이 된다. 그러므로 $\gamma^*=1$이고 $[d,\ 1]$위의 점 s에 대해서도 $Z(s)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $[0,1]$위의 모든 점 s에 대하여 $y_1(s)=y_2(s)$이다.

4. 맺음말

D를 n차원 유클리드 공간(Euclidean space)의 영역이라 하고 $f(x)$, $K(x,\ y)$를 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in D$, $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\in D$에서 정의된 기지함

수, $\varphi(x)$ 를 D 에 있어서의 미지함수라고 할 때 다음과 같은 방정식

$$\int_D K(x,\ y)\varphi(y)\, dy = f(x) \tag{4.1}$$

$$\varphi(x) - \int_D K(x,\ y)\,\varphi(y)\, dy = f(x) \tag{4.2}$$

를 일반적으로 Fredholm 형 적분방정식 또는 Fredholm의 적분방정식이라고 한다. 그런데 (4.1), (4.2)에서 적분이 어떤 적분이냐에 따라 Fredholm 형 리만(Riemann) 적분방정식, Fredholm 르벡크(Lebesgue) 적분방정식, Fredholm 헨스톡(Henstock) 적분방정식이라 한다.

본 논문에서 주어진 적분방정식

$$y(s) = y_* + \int_d^s [x(\tau,\ t)]y(\tau) + f(s) - f(d)$$

는 근사 헨스톡(approximate Henstock) 적분에 관한 선형 근사 헨스톡 적분방정식이다. 식 (4.1), (4.2)가 어떤 적분에 관한 적분방정식이냐에 따라 식 (4.1), (4.2)의 해가 존재할 조건이 다르다는 것에 착안하여 본 논문에서는 선형 근사 헨스톡 적분방정식의 해가 존재할 조건을 연구하였다.

감사의 글 끝으로 이 논문을 수정하고 보완하여 주신 심사위원께 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators I., II., Interscience Publishers,* New York, London, 1958, 1963.
2. Gordon, R. A., *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* Amer. Math. Soc., 1994.
3. Henstock, R., *Lectures on the Theory of Integration,* World scientific, Singapore, 1988.
4. Honig, C. S., *Volterra-Stieltjes Integral Equations*, North-Holland Publ. comp., Amsterdam, 1975.
5. Lim, B. Y., *Linear approximate Henstock integral equations in Banach spaces*, Doctorial Dissertation at Chungbuk National University in 2005. 2.
6. Schwabik, S., *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific,

Singapore, 1992.

7. Schwabik, S., *Abstract Perron-Stieltjes Integral*, Math. Bohem. 121(4), (1996), 425-447.
8. Schwabik, S., *Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces*, Math. Bohem. 124(1999), 433-457.
9. Schwabik, S., *Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces II; operator valued solutions*, Math. Bohem. 125(2000), 431-454.

Linear Approximate Henstock Integral Equations

Dept. of Math., Chungbuk National Univ. **Dongil Rim**
Dept. of Math., Chungbuk National Univ. **Bok young Lim**

In this paper, we introduce linear approximate Henstock integral equations that is slightly different from linear Henstock integral equations, and we also offer an example which shows that some integral equation has a solution in the sense of the approximate Henstock integral but does not have any solutions in the sense of the Henstock integral. Furthermore, we investigate the existence and uniqueness of solution of the approximate Henstock integral equation.

Key words: approximate bounded semi-variation, approximate distribution, approximate integral.

2000 Mathematics Subject Classification: 26A34, 26A42.

논문 접수: 2005년 5월 25일, 심사 완료: 2005년 7월