한국수학사학회지 제18권 제3호(2005년 8월), 91-106

역사-발생적 분석을 통한 대수 지도

부산교육대학교 수학교육과 **김성준**
joonysk@bnue.ac.kr

수학사는 수학 교육에서 수학의 실제와 수학을 하는 사고 과정을 강조하기 위해 분석의 대상이 되어야 한다. 수학사를 분석하는 것은 수학적 활동을 이해하는 방법 가운데 하나로, 역사적으로 수학자들의 활동이 어떻게 변하면서 발전되어 왔는지, 그리고 수학적 개념들이 어떻게 전개되어 왔는지를 살펴보기 위한 것으로, 이러한 내용은 수학 교육적 관점에서 중요하게 다루어져야 한다. 본 연구는 이러한 관점에서 학교대수에서 다루는 문자 기호(미지수)와 음수를 중심으로 하여 수학사에서 등장한 몇몇 텍스트를 분석하고 동시에 교육적인 논의를 이끌어내고자 한다. 이를 위해 먼저 수학교육에서 역사-발생적 분석의 필요성과 그 의의에 대해 살펴보고, 이러한 분석에서 제기되는 인식론적 장애에 대해 논의한다. 다음으로 역사-발생적 분석을 실제 대수 지도에 적용해보기 위해, 방정식에서 사용된 문자 기호(미지수)의 역사를 몇몇 텍스트를 통해 살펴보고 이를 선행된 실험연구의 결과와 함께 논의한다. 또한 음수의 역사를 개괄하면서 역시 몇몇 텍스트를 살펴보고, 음수의 역사를 대수 지도와 관련해서 논의한다. 수학사는 인류의 대역적인 학습 과정으로 학교수학에서 다루는 개념들에 의미 있는 토대를 마련해준다. 본 연구의 논의는 이러한 측면에 주목한 것으로 역사-발생적 분석을 대수 지도를 개선하기 위한 방안 가운데 하나로 본 것이다.

주제어 : 수학사, 학교대수, 문자 기호, 음수, 역사-발생적 분석, 인식론적 장애

1. 서론

본 연구는 오늘날 학교수학에서 지도되고 있는 대수에 관한 논의로, 그 방법적 측면에서 '역사-발생적 원리'[1](historico-genetic principle)의 적용에 대해 살펴본 것이다. 학교수학에서 다루는 개념들에 있어서, 이러한 개념들의 학습과 지도에서 요구되는 이해를 이끌어내기 위해서는 수학적 개념이 형성되기까지의 역사적 전개 과정이 함께 고려되어야 한다. 이러한 주장은 수학적 지식을 확고한 진리와 불변의 구조가

1) '역사-발생적 원리'는 수학을 역사에서 발생된 것으로 파악하고 그 발생을 학습 과정에서 재성취하게 하려는 것으로(우정호, 2000), 수학의 학습-지도 원리 가운데 하나로 생각해볼 수 있다.

아닌 역사적-문화적 발달 과정에서 비롯된 결과물로 생각할 때 더욱 분명해진다. 엔리케(Enriques, 1913)에 따르면, 수학적 지식의 중요한 특징은 그것이 역사적인 것이라는데 있다. 이러한 그의 관점은 역사적-문화적 시각에서 수학적 지식의 특징을 분명히 하려는 것으로, 논리주의, 형식주의 학파에서도 이와 유사한 논의가 등장하였으며(Gallardo, 2001, 재인용), 그리고 준-경험주의를 비롯한 최근의 수리철학과 구성주의 등에서도 이와 유사한 견해들을 찾아볼 수 있다.

본 연구는 대수 지도 방안을 개선하려는 논의를 이러한 역사-발생적 분석에서부터 이끌어내기 위한 것으로[2], 이를 위해 먼저 피아제(Piaget)의 연구방법에서 사용된, 역사를 토대로 하는 인식론적 분석에 대해 살펴보고, 개념의 역사적 전개를 분석하는 과정에서 함께 논의될 수 있는 '인식론적 장애'(epistemological obstacle)에 대해 바슐라르(Bachelard)와 브루소(Brousseau)의 논의를 간략하게 살펴보고자 한다. 다음으로 이러한 역사-발생적 분석을 통한 대수 지도의 실제를 논의하기 위해, 문자 기호를 비롯하여 대수 언어의 전개 과정에서 나타나는 미지수의 조작과 방정식의 풀이 과정에서 나타나는 음수의 역사를 몇몇 역사적인 대수 텍스트를 통해 분석해보고, 이러한 분석을 바탕으로 하여 오늘날 학교대수의 지도에서 발생하는 여러 가지 어려움에 대해 앞서 실시된 실험연구와 함께 살펴보고자 한다.

2. 역사-발생적 분석

'개념'(concept)에 대한 역사-발생적 분석은 하나의 개념이 역사에서 어떻게 생성되고 그리고 어떤 과정을 거치면서 오늘날의 지식 체계로 성장해 왔는가를 살펴보는 것으로, 이 과정에서 개념의 본질을 비롯하여 그 개념을 포함하는 지식의 구조와 성격 등에 대해 살펴볼 수 있게 한다. 다음에서는 이러한 분석과 관련해서 피아제(Piaget)를 비롯하여 바슐라르(Bachelard)와 브루소(Brousseau) 등의 연구에서 다루어진 논의를 살펴보고자 한다.

먼저 피아제의 인식론에서 사용했던 여러 가지 방법들을 보면, 이러한 방법들이 오늘날의 역사-발생적 분석과 유사한 맥락에서 다루어졌음을 알 수 있다. 피아제(1989)는 개념의 역사적 전개 과정에서부터 그 개념에 대한 인식론적 분석을 이끌어내고자 하였으며, 이를 위해 연속되는 발견의 과정과 맞물려 있는 지식의 부분들을 역사적으로 재구성하는 작업을 하고 이 과정에서 과학적 지식의 기반을 찾고자 하였다. 곧, 그의 연구에서 역사적인 분석은 수학-논리적 개념을 포함하는 과학적인 지식에서 그것

2) 본 연구와 관련해서 국내에서는 '역사발생적 원리에서 수학사 활용에 관한 '고찰'(윤영기, 2001)과 '역사발생적 원리에 따른 기수법의 연구'(윤선화, 2001)를 비롯하여 '역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구'(민세영, 2002) 등이 진행되었으며, 역사발생적 원리에 따라 수학사를 수학 수업에 적용시키는 여러 연구가 전개되고 있다.

을 발명하고 발견하는 과정을 이해하기 위한 것으로, 본격적인 연구를 진행하기에 앞서 역사적인 분석이 강조되고 있음을 알 수 있다. 한 예로, 그가 임상 연구의 결과를 분석하기 위해 사용했던 정신-발생론적(psycho-genetical) 분석은 과학의 역사를 재구성하고 이를 통해 지식의 형식적 구조를 밝히려는 시도로 볼 수 있다(Gallardo, 2001).

피아제의 이러한 연구방법은 지식 발달에 대한 논의에서도 나타나는데, 그는 지식 발달에서 나타나는 역사적이고 개인적인 두 과정에 대한 논의를 이끌어내고 있다. 여기서 특징적인 것은 두 과정 모두 지식을 구성하는 개념의 진보가 인식의 불일치에서부터 비롯된다는 사실이다. 일반적으로 학교수학의 지도에서 요구되는 기본적인 개념과 아이디어에 대한 연구는 그것들의 학습과 관련해서 나타나는 여러 가지 오류와 장애에 관한 논의를 포함하게 된다. 본 연구의 관점 역시 이러한 장애에 관한 연구와 관련해서 그 출발점을 지식 발달에서 요구되는 역사와 개인의 두 과정에 두고 있다. 이러한 관점은 바슐라르와 브루소의 연구에서도 나타나는데, 그들은 지식 발달에서의 이러한 두 과정에 주목하여 이들 가운데 특히 개인의 지식 발달과 관련해서 '인식론적 장애'(epistemological obstacle)라는 개념을 주장하였다.

바슐라르(1976)에 따르면, “우리는 이전의 지식과 모순되는 새로운 지식에 직면하여 그러한 과정에서 바람직하지 않게 형성된 이전의 아이디어를 제거해야 한다”고 하면서, 인식론적 장애가 과학적 사고의 역사적인 발달 내에서 일어나며 또한 교육 현장에서도 확인될 수 있다고 하였다(Gallardo, 2001, 재인용). 또한 교육의 과정에서 비롯되는 인식론적 장애는 불가피한 것으로 보았으며, 이러한 장애는 획득된 지식 내에서도 필수적인 요소로 자리하고 있기에 교육 현장에서는 개념의 역사적 발달에서 나타난 것과 동일한 맥락에서 이러한 장애를 이해하는 것이 요구된다고 보았다.

브루소(1997) 역시, 학생들이 학습 과정에서 경험하는 여러 가지 형태의 장애는 수학의 역사를 통해 확인될 수 있으며, 역사에서 이루어진 개념 형성의 과정이 학생들의 자발적인 모델을 통해 인식되는 순간 그 개념에 대한 학습이 이루어질 수 있다고 보았다. 또한 그는 이러한 역사적인 과정의 분석을 통해 학습에서 비롯되는 장애들을 극복하든지 혹은 피하든지 하는 교수학적 상황을 고안할 수 있는데, 이러한 상황에서 긍정적인 학습의 결과를 이끌어낼 수 있을 때 인식론적 장애가 효과적으로 극복된다고 보았다. 그의 관점에서 볼 때, 인식론적 장애는 우리가 알고 있는 지식과는 다른 또 하나의 지식에 해당한다. 곧, 어떤 상황에서는 한 개념이 그것을 포함하는 활동과 함께 잘 적용되고 이를 통해 지식으로 성장할 수 있으나, 만약 이 개념이 정상적으로 적용되지 못하거나 모순이 일어나는 다른 상황에서 그 역할을 수행하려고 할 때에는 앞서 성공했던 개념이 인식론적 장애의 형태로 나타나는 것이다.[3] 따라서 지식의 변형은 처음의 아이디어가 명백하게 실패한 상황에서부터 시작하여 새로운 상황을 통해

3) 이러한 맥락에서 브루소(Brousseau)의 ‘교수학적 상황론’은 처음의 기형적 지식을 없애고 새로운 영역에서 만족스럽게 작용하는 새로운 개념을 대체하기 위해 주장된 이론이다. 그에 따르면, 하나의 개념을 학습하기 위해서는 이러한 장애를 배제하고 바로잡는 것이 무엇보다 중요하게 다루어져야 한다.

서 발생하게 된다. 곧, 새로운 상황에서 처음의 아이디어들은 그것을 대체하는 새로운 지식에 의해 약화되고 이렇게 지식의 변형 과정을 통해 개념에 대한 학습이 이루어지게 되는 것이다. 더불어 그는 이러한 연구에서 요구되는 기본적인 아이디어가 역사-발생론적 원리와 같은 맥락에 놓여 있다고 보고 있다.

이상의 논의에서 수학 학습-지도의 방법론적 측면에서 역사-발생적 분석을 적용함으로써 학교대수의 학습에서 얻을 수 있는 이점은 다음과 같다.

첫째, 역사를 통해서 대수적 개념들이 전개되어 온 과정과 그리고 그 지식이 공식화된 배경 등을 분명하게 확인할 수 있으며, 학교대수에서는 이러한 일련의 과정을 분석함으로써 실제로 대수를 학습하고 지도하는 과정에 적용할 수 있게 된다.

둘째, 학교수학의 여러 영역 가운데 본 연구에서 살펴보려는 대수 학습-지도와 관련해서 이 과정에서 비롯되는 여러 가지 어려움에서 그 특징을 분명하게 파악할 수 있게 된다. 다시 말해, 대수의 역사적 발달에서부터 찾아볼 수 있는 여러 가지 어려움은 그 동안의 여러 실험연구에서 관찰된 교수학적인 단절 또는 인식론적 장애와 같은 논의를 이해하는데 도움이 될 수 있다. 이와 함께 실험연구의 결과를 역사적인 텍스트와 비교함으로써 역사와 개인 양 측면에서 더욱 깊이 있는 분석을 이끌어낼 수 있으며, 특히 역사에서 비롯된 여러 가지 사건들에 대해 이것들을 개인에게서 발생하는 문제와 연결하여 볼 수 있게 된다.

셋째, 본 연구에서는 학교대수 가운데 특히 초등수학에서의 대수 학습과 관련해서 기호적 대수(symbolic algebra)가 사용된 그 이전의 텍스트를 살펴봄으로써, 이러한 언어와 문제해결 방법으로부터 '초기대수'(early algebra)[4]에 대한 이해를 이끌어낼 수 있게 된다. 대수의 역사는 기호적 대수 이전에도 많은 문제와 해결방법이 있었으며, 이것은 초기대수에서와 같이 기호가 없는 상태에서 언어를 비롯하여 여러 가지 다른 방법에 의해 대수 학습에 대한 준비가 이루어질 수 있음을 간접적으로 보여준다. 따라서 이러한 역사-발생적 분석은 실제 대수의 학습 과정에서 학생들이 기호적 대수 이전에 어떤 방법으로 문제를 해결하는지 그리고 문자 기호를 도입한 후에 그들이 경험하는 어려움은 무엇인지 등을 이해하는데 좋은 교육적 논의를 제공해준다.

다음 장에서는 이러한 역사-발생적 분석을 학교대수를 지도하기 위해 우선적으로 요구되는 사항으로 보고 몇몇 역사적인 텍스트의 내용을 검토해보고자 한다. 먼저 역사적으로 의미 있는 몇몇 텍스트를 검토하는 가운데 문자 기호(미지수)를 포함하는 방정식의 풀이에 대해 살펴볼 것이다. 그리고 다음으로 방정식 풀이를 음수의 역사적

4) '초기대수'(early algebra)는 초등대수(elementary school algebra)와 구분되는 개념으로, 초등대수는 초등학교에 한정되어 다루어지는 대수를 의미하는 반면, 초기대수는 초등학교라는 장소보다 그 시기에 더욱 초점을 맞춘다. 곧, 초기대수는 기존의 대수 교육이 이루어지는 시기보다 앞서 이루어지는 대수 교육을 의미하며, 그 주제 역시 중등대수에서 다루는 기호적인 측면보다 대수적 사고(추론) 측면을 보다 강조한다.

기원으로 하여 살펴봄으로써, 음수의 학습이 대수와 어떠한 관계에 있는지를 논의하고 이를 통해 학생들의 음수 학습이 지연될 수밖에 없는 이유에 대해 생각해볼 것이다. 또한 이러한 역사적인 텍스트에 대한 이론적 분석을 여러 실험연구와 비교하면서 역사-발생적 분석을 적용한 대수 지도 방법에 대해 다시 한번 생각해볼 것이다.

3. '미지수'의 등장

대수에서 문자 기호의 사용과 관련해서 나타나는 여러 가지 변화는 산술적 사고와 대수적 사고를 구분하며, 학교대수의 학습에서 그 출발점에 놓여 있다. 본 연구에서는 대수에서의 문자 기호의 사용과 관련해서 역사-발생적 분석을 적용하기 위해, 문자 기호가 사용되지 않았던 13세기부터 15세기까지의 대수 교과서에 제시된 문제와 그 해결 방법에 대해 생각해보았다. 이러한 분석을 통해 대수의 역사에서 미지수와 그 조작을 인식하지 못했던 당시의 어려움이 오늘날 산술에서 대수로의 이행에서 '교수학적 단절'(didactical cut)의 형태로 나타나고 있음을 살펴보았다. 문자 기호의 사용에서 나타나는 이러한 단절은 학생들을 대상으로 한 그 동안의 실험연구의 결과(Davis, 1983; Herscovics & Linchevski, 1994; 김남희, 1997)에서 여러 차례 입증된 것으로, 본 연구에서는 그 내용을 역사-발생적 분석과 관련지어 살펴볼 것이다.

본 연구에서 분석의 대상이 된 대수 텍스트는 <De Numeris Datis>(Jordanus de Nemore)[5]이다. <De Numeris Datis>에서 사용된 언어와 문제풀이 방법을 오늘날 대수의 그것과 비교하고 분석함으로써, 문자 기호 특히 미지수의 학습 과정에서 나타나는 교수학적 단절에 대해 살펴볼 수 있다. 이 텍스트는 역사적으로 문자 기호가 사용되지 않았던 시기에 해당되기에 문제에서 방정식과 미지수의 조작은 나타나지 않고 있으나, 그러나 문제에서 양(quantity)을 다루고 양 사이의 차를 조작하는 언어적인 기술은 이후 방정식과 미지수의 조작에 있어서도 중요한 역할을 하고 있다. 그 예로 <De Numeris Datis> 1권에 제시된 문제와 풀이 과정을 오늘날의 그것과 비교해서 살펴보면 다음과 같다(Gallardo, 2001, 재인용).

<De Numeris Datis의 문제와 풀이과정>

문제 : 만일 주어진 수가 그 차이가 알려진 두 부분으로 나누어진다면 각각의 부분을 알아낼 수 있다.

풀이과정 : (변형1) 더 작은 부분과 큰 부분과 작은 부분 사이의 차가 주어지면, 이것과 작은 부분의 합은 주어진 수를 이룬다. (변형2) 이 때, 전체에서 그 차를 빼면 작은 양의 두 배가 되고, 이것을 반으로 나눔으로써 더 작은 것을 찾을 수 있고 결론

5) <De Numeris Datis>는 13세기 고등대수 교과서로 알려져 있으며, 일부 수학자들은 이 교과서를 고등대수를 기술한 최초의 교과서로 보고 있다(Gallardo, 2001).

적으로 큰 부분도 찾을 수 있게 된다.

<De Numeris Datis의 문제와 풀이과정을 현대적인 기호로 옮겨놓기>

문제 : 두 수 x, y의 합(a)과 차(b)가 주어졌을 때, x, y를 구하여라.

풀이과정 :

(변형1) $y+(x-y)=x$가 주어지면, $y+(x-y)+y=a$ 이다.

(변형2) $a-(x-y)=2y$가 되고, $\frac{1}{2}\{a-(x-y)\}=y$ 이므로, $y=\frac{1}{2}(a-b)$ 이고,

$$y=\frac{1}{2}(a+b)$$ 가 된다.

<현대적인 문제와 풀이과정>

문제 : $x+y=a$, $x-y=b$에서 연립방정식을 풀어라.

풀이과정 : 주어진 두 식을 더하면, $2x=a+b$이고, 따라서 $y=\frac{1}{2}(a+b)$ 이고

$$y=\frac{1}{2}(a-b)$$ 가 된다.

<De Numeris Datis>에 제시된 문제와 풀이과정을 살펴보면, 문제의 경우 오늘날 학교 교과서에서 볼 수 있는 전형적인 문제 가운데 하나로 보이지만, 그 풀이과정에서 제시된 해결전략은 오늘날의 방식과는 분명한 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 차이는 문자 기호의 조작, 특히 미지수의 사용여부와 직접적으로 관련되어 있는데, 다시 말해 기호적 대수 이전의 전략과 문제풀이방법은 오늘날의 그것과 비교해 볼 때 이해하기 어려운 특징을 가지고 있으며 이것들은 모두 문자 기호를 대신하여 풀이과정에서 일상 언어가 사용되고 있기 때문이다. 이는 방정식의 풀이에서 어떤 형태로 언어가 사용되는가에 따라 문제에 대한 이해에서부터 풀이 자체에 이르기까지 직접적으로 영향을 줄 수 있음을 보여준다. 다음은 그 적용으로 두 실험연구에서 언어 유형에 따라 방정식을 다르게 제시할 때 나타나는 문제점에 대해 살펴본 것이다.

첫 번째 실험연구는 학생들에게 미지수를 포함한 방정식을 제시할 때 생각해볼 수 있는 두 가지 유형으로, 동일한 문제에서 미지수의 위치에 따라 학생들이 풀이에서 어려움의 정도를 다르게 느끼게 되고 경우에 따라서는 풀이 자체가 불가능해질 수도 있음을 보여준다(Filloy & Rojano, 1985).

(제1유형) : 13에 어떤 수를 곱하면 39가 된다.

(제2유형) : 어떤 수에 13을 곱하면 39가 된다.

학생들은 첫 번째 유형의 경우($13\times x=39$), 나눗셈 연산(역연산)을 이용해서 비교적 쉽게 문제를 해결한다. 그러나 두 번째 유형($x\times 13=39$)에서는 처음에 비해 문제를 해결하는데 어려움을 느끼게 된다. 그 이유는 두 번째 유형의 경우 학생들에게 수의 조작이 먼저 인식되는 것이 아니라 주어진 문제에서 어떤 수에 해당하는 미지수의 조작이 먼저 요구되기 때문이다. 이를테면, 학생들은 반복된 덧셈으로 미지수를 조작하여 문제를 해결하려는데 더 많은 시간을 소비하며 그 어려움 역시 커지게 된다. 이에 비해 첫 번째 유형은 처음부터 미지수의 조작이 필요하지 않은 상황에서, 미지수는 그대로 있고 수(13)의 연산과 역연산(39÷13)을 통해 문제를 해결할 수 있는 형태이다. 이처럼 방정식에서 서로 다른 언어로 문제가 주어지는 경우 풀이과정에서 요구되는 기본적인 조작의 대상이 변화하게 되는데, 이러한 차이는 역사적인 텍스트에서 사용된 언어와 풀이방법이 오늘날의 그것과 다르게 보이는 것에서 그 원인 가운데 하나를 찾아볼 수 있다(물론 학생들이 수식의 이해 과정에서 어려움을 겪을 수도 있을 것이다). 곧, 역사적인 텍스트에서 문자 기호가 없는 상태에서 언어적인 방식으로 문제를 해결할 때 이 과정에서 나타나는 해석상의 어려움은 오늘날 학생들이 문자 기호를 포함하는 문제에서 주어진 언어 유형에 따라 그 해석의 어려움을 느끼는 것과 같은 맥락에서 생각해볼 수 있다.

두 번째 실험연구는 $Ax\pm B=C$ 형태의 일차방정식 풀이 과정을 $Ax\pm B=Cx\pm D$ 형태의 방정식 풀이 과정과 비교한 것으로(Filloy & Rojano, 1989; Linchevski & Herscovics, 1996), 많은 학생들이 첫 번째 형태의 방정식은 풀어내지만 이에 비해 두 번째 방정식에서는 문제를 쉽게 해결하지 못하고 어려워하는 점에 주목한 것이다. 곧, 처음 일차방정식에서의 성공했던 경험이 두 번째 방정식에서 단절되어 나타난다는 사실에 주목한 것이다. 본 연구는 역사-발생적 분석에서부터 이러한 의문에 대한 답을 생각해보고자 한다. 대수의 역사에서 16세기 비에트(Viete)에 의해 기호대수가 등장하기 이전까지 기호를 사용한 표현이 부족했다는 것은 주지의 사실이다. 그리고 당연히 방정식에서 미지수의 조작은 오랫동안 이루어질 수 없었다. 오늘날 방정식에서 사용되는 '등식의 성질'은 대수의 역사에서 미지수와 함께 본격적으로 등장한 것으로, 16세기 이전에는 등식의 성질을 설명하기 위해 산술적으로 양과 양 사이의 관계를 서술하면서 문제를 풀어나가는 방법이 사용되었다. 그런데 이러한 방법은 역사적으로 볼 때 한 쪽에 미지수가 등장하는 경우에만 사용될 수 있었던 것으로, 또 그렇게 함으로써 모든 문제는 산술적인 연산 절차에 따라서 해결될 수 있었다. 위의 실험연구는 일차방정식의 역사에서 비롯된 이러한 전개 과정이 오늘날 $Ax\pm B=C$와 $Ax\pm B=Cx\pm D$ 사이에 존재하는 인식론적 간격을 보여주는 것이다. 다시 말해, 미지수의 조작 없이 문제를 해결할 수 있는 첫 번째 형태의 일차방정식과 미지수의 조작이 등식의 성질을 거치면서 요구되는 두 번째 형태의 일차방정식 사이에는 역사적 텍스트에서 보여주듯이 산술과 대수 연산 사이의 분명한 인식론적 간격이 존재하며, 교사는 이러한 간격이 실제 일차방정식의 지도에서 인식론적 장애로 등장할 수 있음에 주목

해야 한다.

위의 두 실험연구에서 알 수 있듯이, 학교대수에서 문자 기호의 학습에서 나타나는 인식론적 장애는 대수의 역사에서 16세기 비에트 이전의 텍스트에서 등장했던 어려움이 교수학적 단절의 형태로 재등장한다고 해석할 수 있다. 이러한 측면에서 역사-발생적 분석은 학교대수의 지도를 위해 효과적으로 적용될 수 있는 대안적인 방법이 될 수 있다. 이와 같은 단절은 대수의 역사적 전개에서 '미지수를 기호로 표현하는 것'과 '미지수 조작의 가능성 여부'와 관련된 것으로, 특히 위에서 살펴본 두 실험연구는 언어 사용의 유형에 따라 미지수 조작이 가능하지 않은 경우에 학생들이 경험하는 어려움이 어떻게 나타나는지를 간접적으로 보여주고 있다. 이러한 학습 장애는 성공했던 지식이 또 다른 상황에서 실패한 지식으로 나타나는 것으로 인식론적 장애를 정의한 바슐라르와 브루소의 논의와도 관련해서 생각해볼 수 있다. 이상 살펴본 것처럼, 역사-발생적 분석을 학교대수에 적용해서 논의하는 것은 대수 지도에서 교육적으로 많은 유용한 시사점을 제공하는 바, 이러한 역사적인 텍스트의 분석을 통해 교사들은 대수 학습을 시작하는 단계에서 많은 학생들이 역사에서 등장하는 것과 유사한 장애를 경험하는 것에 대해 이해하고, 이를 극복하기 위한 지도 방안을 고안해냄으로써 많은 교육적 논의를 이끌어낼 수 있을 것이다.

4. '음수'의 등장

우리나라의 경우 중학교에서 본격적인 대수 학습이 이루어지기 전에 음수가 포함된 정수의 학습이 먼저 다루어지는데, 이는 음수가 문자와 식을 비롯하여 방정식의 풀이 등의 대수 학습과 직접적으로 관련되어 있기 때문이다. 곧, 중학교 수학에서 음수에 대한 이해는 문자 기호와 함께 이후 대수 학습의 성공 여부를 결정짓는 중요한 요소가 된다(김성준, 2003). 수학의 역사에서 음수에 대한 이해는 다음 표와 같은 여러 단계의 인식을 거치면서 전개되어 왔으며,[6] 오늘날과 같은 음수 인식은 19세기 한켈(Hankel)에 의해 형식적인 수준에서 음수를 하나의 수 개념으로 수용하면서 나타난 것이다. 음수의 역사에서 나타났던 여러 인식의 수준은 처음 음수를 배우는 중학교 학생들에게도 유사한 형태로 나타날 수 있다. 이에 본 연구는 역사-발생적 분석을 적용한 음수 지도를 논의하고, 그리고 학교수학에서 음수의 인식 과정에서 비롯될 수 있는 여러 가지 어려움을 살펴보고자 한다. 다음 표는 음수를 인식하는 여러 형태를

6) 교사들을 대상으로 음수의 정의를 묻는 김은미(2003)의 연구에서, 음수는 0보다 작은 수(32.3%), 부족한 수(16.1%), 양수와 대조되는 수(9.7%), 눈에 보이지 않는 가짜의 수로 자연수에 대응되는 개념(3.2%), 자연수에 음의 부호를 붙인 수(3.2%) 등 다양한 답변이 제시되었으며, 이러한 반응은 교사들에게도 음수 개념에 대한 인식이 다양한 형태로 나타나고 있음을 보여주는 것이다.

나열한 것으로(Gallardo, 2001), 이러한 음수 개념에 대한 인식을 토대로 하여 음수의 역사와 학생들의 인식 수준을 비교해볼 수 있다.

음수 인식의 형태	설명
감수(減數, subtrahend)	수의 개념을 크기(magnitude)의 부차적인 것으로 인식한다. 예를 들어, 이 경우 0이 음수보다 작은 것으로 본다.
부호수(signed number)	덧셈이나 뺄셈 기호가 단순히 수와 결합된 형태로 인식한다.
관계수(relative number) 또는 방향수(directed number)	양과는 다른 질적인 차이를 인식하는 것으로, 예를 들어 대칭에 관한 개념이 나타난다.
독립수(isolated number)	연산의 결과에서 혹은 문제나 방정식의 풀이에서 나타난다.
형식수(formal number)	양수와 음수를 모두 같은 대상으로 보면서, 음수를 확장된 수 개념으로 인식한다.

음수와 관련된 수학의 역사는 오랫동안 음수 개념을 수용하지 않은 상태에서 전개되어 왔으며, 이러한 점에 미루어 많은 연구에서는 오늘날 학교수학에서 음수의 개념화 역시 쉽지 않음을 인정하고 있다. 음수에 대한 역사-발생적 분석을 통해서 이러한 음수 개념에 대한 논의를 보다 구체화하면 다음과 같다.

음수의 역사적 기원은 방정식 풀이의 일반성을 확보하려는 형식적인 필요성에서부터 시작된다. 그러나 수학의 발상지에 해당하는 고대 바빌로니아나 이집트, 그리스에서는 음수를 인정하는 어떠한 증거도 찾아볼 수 없으며, 특히 그리스의 경우 기하를 수학의 전형으로 여기는 전통과 유클리드(Euclid)의 <원론>에 전개된 연역적 사고의 강조로 인해 대수의 발달이 지체되면서 이러한 (방정식 풀이와 같은 상황에서) 음수의 역사적 기원은 시작되지 않았다. 유클리드에게 있어서 수는 '1'보다 큰 자연수이어야 했으며, 수는 크기와 구분되는 것으로 크기에 부차적인 개념으로 존재했으며('감수'), 따라서 무(無)보다 작은 수 개념은 논리적으로 인정될 수 없었다. 한편 학교수학에서 음수를 처음 배우는 학생들의 경우, 음수에 대한 이해는 이러한 논리적인 이유라기보다는 오히려 직관적인 요소 때문에 더욱 어려워진다. 이것은 없는 것보다 더 작은 수를 직관적으로 받아들이는 것이 구체적인 대상을 요구하는 학생들에게 쉽게 이해될 수 없기 때문이다.

서양수학에서 방정식 풀이에서 음수의 존재를 인식했던 것은 3세기 디오판토스(Diophantus)에서부터 시작된다. 그러나 그는 방정식의 풀이에서 양수로 표현할 수 없는 존재를 알고 있었지만, 이러한 수를 하나의 대상으로 인정하지는 않았다. 한 예로, 그는 <산학>(Arithmetica)에서 방정식 $4x+20=4$의 해 $x=-4$를 불가능한 것으로 보았는데, 그의 이러한 인식은 "(우변의) 4는 20보다 큰 수이어야 한다"라는 기술에서 찾아볼 수 있다. 또한 그는 방정식의 풀이에서 일반적인 방법을 제시하지 않고 있는데,

이것은 문자 기호의 부재도 한 이유가 되겠지만 무엇보다 음수의 존재를 부정하였기 때문으로 보인다. 그 예로, <산학>에서는 이러한 음수의 출현을 배제하기 위해 이차 방정식을 다음과 같이 다섯 가지 유형으로 구분하여 그 풀이를 제시하고 있다.

$$ax^2 = bx,\ \ ax^2 = b,\ \ ax^2 + bx = c,\ \ ax^2 + c = bx,\ \ ax^2 = bx + c$$

이처럼 그는 방정식의 풀이에서 나타나는 음수에 대해 양수와 같은 하나의 독립된 수로 인식하지 못한 상태에 있었으며,[7] 따라서 음수의 역사적 기원은 그의 방정식에서 찾아볼 수 있지만 이에 비해 음수가 수 개념으로서 그 자체의 존재성에 대한 인식은 아직 이루어지지 않았다.

한편 동양수학에서는 1세기 경 중국의 <구장산술>에서 연립일차방정식의 해법이 다루어지는데, 그 가운데 양수와 음수의 덧셈과 뺄셈 법칙에 대한 설명이 나오고 있다(우정호, 1999). <구장산술>에서 다루고 있는 음수 개념은 '관계수' 인식과 관련해서 생각해볼 수 있는 것으로, 얻는 것과 잃는 것, 자기 소유와 빚, 미래와 과거, 팔 것과 살 것 같은 반대되는 개념들이 양수와 음수의 해석에 사용되었다. 그러나 중국수학에서 양수와 음수 사이의 계산 법칙이 다루어지고 있음에도 불구하고, 음수는 방정식의 해를 구하는 과정에서 단순히 계산을 위해 간접적으로 등장하고 있으며 이것은 음수를 하나의 대상으로 인정하면서 음수를 다루는 것과는 다른 상태에 있다고 볼 수 있다. 다시 말해 음수는 '관계수' 측면에서 인식되었을 뿐 아직 독립수와 같은 상태에 놓여 있지는 못하였다. 그러나 음수 개념에 대한 이러한 인식의 방법은 오늘날 학생들에게 음수의 실제적인 존재성을 확인하는 모델에서 유용하게 사용될 수 있으며, 실제 학교수학에서는 이와 유사한 모델들이 사용되고 있다.[8] 그러나 이러한 '관계수' 측면에서의 음수 지도는 방정식에서 그 해로 등장하는 '독립수'와는 구별되는 것으로, 보다 형식적인 음수 개념을 설명하기에는 적절하지 못하다. 중학교 이후 학생들에게 수학을 하는 것은 모든 상황을 조금씩 형식화하는 것으로, 관계수로의 음수 인식 수준은 보다 형식적인 수준과의 결합이 요구된다. 그러나 중국수학의 분석에서 보듯이 <구장산술>에서도 이 둘 사이의 연결은 다루어지지 않고 있으며, 따라서 학교수학에서도 구체적인 모델 다음에 음수를 지도하는 과정이 쉽지 않다는 것을 알 수 있다.

이제 7세기 경 인도의 수학으로 넘어오면, 중국의 그것과 비슷하게 양수를 자산, 음수를 부채로 보는 '관계수' 측면의 음수가 등장한다(최병철, 2002). 그 가운데 인도의 수학자 브라마굽타(Brahmagupta)는 음수 개념을 비교적 정확하게 이해한 상태에서 양음 부호에 관한 계산 법칙을 서술하고 있으며, 12세기 바스카라(Bhaskara)는 양수

7) 디오판토스의 음수 인식은 오늘날 수학에서 보면 독립수로서 혹은 부호수로서 음수를 받아들일 수 있는 수준이었으나, 그러나 그의 수 개념은 서양수학의 전통에 놓여 있었기에 자연수나 분수와 달리 음수를 수로 인정하지 않고 있다.

8) 구체적인 모델을 통해서 음수를 더하고 빼는 행동을 하는 것은 없는 상태와 반대의 것들을 이용하여 음수 개념을 형성시키려는 것으로, 양수와 비교되는 음수의 특징을 분명하게 할 수 있다.

의 제곱근이 양의 근과 음의 근으로 두 개라는 사실을 지적하고 있다. 특히 바스카라가 저술한 <Bijagantia>에는 실생활 문제의 해결에서 음수 해에 대한 정확한 해석을 하고 있음을 알 수 있다. 그러나 이러한 역사적인 텍스트들은 음수(해)의 타당성을 확인하기 위해 문제해결에서 사용된 언어의 의미론과 구문론을 고려하는 부분에서 한계를 가지게 된다. 곧, 이들 사이의 불균형을 고려해야 하는데, 음수(해)의 존재가 방정식 풀이에서 구문론적으로는 확인되지만 이것을 해석하는 의미론 측면에서는 여전히 불완전한 상태로 남게 되고, 그 결과 문제해결에서 요구되는 구체적인 의미가 효력을 가지지 못하게 된다. 이러한 문제는 오늘날 학교대수의 학습에서 유사한 형태로 나타난다. 대수 학습을 시작하는 학생들은 대부분 초등수학에서 구체적인 조작과 함께 의미가 내재된 상태에서 수학을 학습해왔다. 이에 비해 중학교에서 형식적인 구문론을 중심으로 하는 음수와 방정식의 학습은 의미가 약화된 상태에서 다루어지고 있으며, 그 결과 음수를 학습하는 과정에서 구문론에 부합하지 않는 의미론의 등장은 인식론적 장애로 이어지게 된다. 예를 들어, 문장제에서 다루는 실생활 문제의 경우, 해에 대한 수학적인 타당성은 대입과 같은 방법을 통해 검증될 수 있는데 비해, 이러한 과정에서 문제의 전체적인 의미와 연결시키는 것은 경우에 따라 음수(해)를 이해하는데 방해가 될 수 있다. 이처럼 수학의 역사에서 문장제와 함께 음수를 다루는 텍스트의 분석에서는, 여기서 사용된 다양한 방법에서부터 시작하여 문장제를 방정식을 이용하여 해결하는 과정에서 음수와 관련된 많은 논의를 이끌어낼 수 있다. 그리고 이를 통해 음수를 비롯한 대수 지도에서 역사-발생적 원리의 적용은 이러한 역사적인 텍스트의 분석과 함께 보다 구체화되어 제시될 수 있을 것이다.

다시 음수의 역사로 돌아와서, 인도 수학의 음수와 음수의 계산법은 아랍 수학으로 전해졌으나, 알콰리즈미(al-Khowarizmi) 등은 계속해서 음수를 거부하고 디오판토스의 방식에 따라 방정식을 해결하였다. 아랍 수학은 15세기 유럽으로 전해지면서 음수는 본격적으로 유럽 수학에서 등장하게 되지만, 슈티펠(Stifel) 등은 음수를 '엉터리 수'라고 하여 하나의 독립된 수 개념으로 인정하지 않았다(Gallardo, 2001). 그러나 이 당시 유럽에서 음수가 사용된 흔적은 <Triparty en la Science des Nombres> (Chuquet, 1484)와 <Ars Magna>(Cardano, 1545) 등과 같은 여러 역사적인 텍스트에서 찾아볼 수 있다. 전자의 경우, 실생활 문제의 맥락에서 음수를 다루고 있는데, 문제를 해결하기 위해 산술적 방법, 덧셈 방법, 분배 방법, 대수적 방법 등 다양한 방법들이 사용되고 있으며, 이것은 방정식을 지도하는 과정에서 음수(해)를 설명하는 것이 쉽지 않음을 간접적으로 보여준다. 또한 이러한 여러 가지 해법의 사용으로 인해 오히려 음수를 형식적인 수 체계 내에서 다른 수 개념과 동일하게 인식하는 것을 어렵게 하였다. 후자의 경우, 삼차와 사차방정식의 풀이과정에서 각각 음수가 직접 등장하고 있으며, 이로 인하여 음수는 대수 방정식의 풀이에서 점차 하나의 대상으로 인식되기 시작한다. 이후에도 음수는 데카르트(Descartes)나 파스칼(Pascal) 등에 의해 여전히 '거짓 근' 또는 '모순된 수'로 불리면서 인정받지 못하였으나, 17세기 라이프니

츠(Leibniz)에 이르게 되면 앞서 제기된 음수의 문제점에도 불구하고 계산에 유용하게 사용될 수 있다는 이유로 인해 음수를 인정하게 된다. 그리고 19세기 초 피콕(Peacock)의 형식 불역의 원리가 등장하고, 이것을 음수에 적용시킨 한켈(Hankel)이 등장하면서 음수는 실제적인 것이 아니라 형식적인 구조를 이루는 것으로 구체적인 양 개념과는 독립되어 형식적인 존재 곧 '형식수' 형태로 인식되게 된다.9)

요약하면 음수는 형식과 연역을 강조하는 서양수학에서 그 출발이 더디게 이루어졌으며, 그 역사적 기원은 디오판토스의 방정식에서부터 시작되었으나 음수가 인식의 대상으로 다루어지지는 못하였다. 동양수학의 경우 중국, 인도 수학에서 실생활 문제 해결과 함께 등장하고 있지만, 구문론과 의미론 사이의 간격으로 인해 음수 인식에서 어려움을 낳았으며 그 결과 오늘날과 같은 음수 개념으로는 성장하지는 못하였다. 결국 이러한 동서양 수학에서의 문제는 의미론보다 형식적인 체계를 내세우는 19세기 서양의 현대수학에 의해 해결되었다. 본 연구에서는 이러한 음수의 역사에서 등장했던 몇몇 텍스트를 통해 음수의 인식 수준이 각기 다르게 나타나고 있음을 확인하였으며, 이를 통해 음수의 역사가 방정식을 비롯한 학교대수의 지도와 밀접한 관계에 있음을 알 수 있다. 곧, 역사적인 텍스트를 분석함으로써 대수 방정식에서의 음수의 존재와 양음 부호에 관한 계산 법칙을 비롯하여 학교대수에서 음수를 가지고 조작하는데 필요한 여러 가지 요소들을 확인할 수 있었다. 이러한 요소들은 음수의 기원이 방정식의 풀이에 있으며, 또한 음수를 지도하는 교수학적 상황에서 대수 방정식과의 상호관계를 고려해야 할 필요가 있음을 보여준다. 그리고 교육적인 논의로는 음수에 대한 역사-발생적 분석은 오늘날 어떤 맥락이나 상황을 우선하면서 그 가운데 구조적이고 형식적인 음수 지도 방법을 재조직하는 것에 정당성을 부여할 수 있으며, 덧붙여서 교사로 하여금 음수의 '관계수' 측면과 '형식수' 측면 사이에 존재하는 간격을 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 또한 역사-발생적 분석은 학생들의 음수에 대한 이해를 이끌어내기 위한 여러 선행 연구와 상보적인 관계에서 논의될 수 있을 것이다.10)

5. 요약 및 결론

수학교육에서 수학의 역사적 전개 과정을 분석하고 그 가운데 기초를 이루고 있는 개념과 아이디어에 대한 연구는 강조되어야 하는 영역이다. 유현주(1999)에 따르면,

9) 피콕과 한켈의 형식 불역의 원리에 의한 음수의 형식화는 대수를 해방시켜 놓았으며 현대의 추상대수의 길을 열어놓는 계기가 되었다(최병철, 2002, 재인용; Eves & Newson, 1960)

10) 이러한 연구의 예로, 김애란(2002)은 효과적인 음수 지도 방안의 연구에서 직관적인 음수 지도 모델은 음수 체계의 모든 대수적 성질을 일관성 있게 설명하지 못하는 바, 음수 지도에서 형식적인 접근과의 병행을 강조하였으며, 공현주(2002)는 음수지도 방법에 관한 연구에서 직관적 방법과 형식적 방법의 상보적인 결합에 대해 논의하고 있다.

수학사를 통해 수학적 원리나 규칙, 내용들이 어떻게 시작되고 파악되었는지를 알 수 있으며, 하나의 개념이 어떤 비약의 순간을 통해 발전되고 정리되면서 형식화, 기호화 되었는지 등 수학의 생생한 모습을 접할 수 있게 된다. 이처럼 수학의 역사에는 수학적 개념의 구성과 형식화, 명료화 등의 과정이 포함되어 있으며, 이러한 과정은 교과서에 제시된 형식적인 수학을 통해서는 파악할 수 없는 많은 부분들을 포함한다. 이러한 부분들은 수학의 역사적-문화적 과정의 결과로, 역사-발생적인 관점에서 그 내용을 분석할 때에야 비로소 볼 수 있게 되는 것이다. 이와 함께 수학의 역사에서부터 다양한 방법으로 문제를 해결하는 기회를 얻을 수 있을 뿐 아니라, 이러한 지식을 통해 수학 수업에서 학생들이 오류를 범하거나 곤란을 겪는 부분에 대해 이해의 폭을 넓힐 수 있게 된다. 실제로 대수에서 문자 기호와 음수 개념의 역사적 전개에서 발생했던 인식론적 장애는 학교대수에서도 동일하거나 혹은 유사한 형태로 나타나고 있음을 앞서 확인할 수 있었다. 따라서 학교수학을 지도하기 위해서는 이러한 개념의 역사적 전개 과정에서 수학자들에게 인식되었던 여러 가지 문제점을 정확하게 파악하는 것이 요구되며, 이러한 분석에서부터 여러 가지 교육적인 문제점을 해결하는 이론적이고 실제적인 수업을 구성할 수 아이디어를 얻게 된다. 또한 전통적인 학습-지도 과정이 반영된 학교수학에서 발견된 많은 장애들을 이러한 역사적인 전개 과정과 비교함으로써, 수학적 개념의 지도에서 비롯되는 장애의 배경과 원인을 분명하게 알 수 있게 된다.

이러한 맥락에서 본 연구는 역사-발생적 원리에 따라 대수의 역사적 전개 과정과 몇몇 텍스트를 살펴보고 아울러 그 교육적 적용을 논의한 것이다. 이를 위해 일차적으로 역사-발생적 분석의 교육적 의의와 인식론적 장애에 대해 살펴보았다. 다음으로 구체적인 적용에 있어서는, 문자 기호의 전개 과정에서 기호적 대수 이전의 텍스트에 소개된 방정식의 풀이를 통해 오늘날과 다른 방식으로 문제 풀이가 이루어지고 있음을 살펴보았으며, 그 원인이 문자 기호가 아닌 제시되는 언어에 문제가 있음을 확인하였다. 그리고 이러한 언어적인 문제가 오늘날 학교대수에서 학생들이 경험하는 어려움과 동일한 맥락에서 논의될 수 있음을 실험연구에서 살펴보았다. 두 번째 적용에서는, 방정식 풀이와 음수와의 관련성을 비롯하여 음수 개념의 이해에서 다양한 인식의 형태가 존재함을 살펴보았다. 또한 음수의 역사에서 있었던 여러 가지 단절을 학교대수에서 음수를 지도하는 과정에서 비롯되는 여러 사실들과 비교하고, 역사-발생적 분석을 통해 방정식 풀이의 맥락에서 음수가 전개되어 왔음을 살펴보았다. 따라서 이러한 분석을 염두에 두면서 대수를 지도하는 것은 역사-발생적 분석에서 알 수 있듯이 음수를 수용하기 어려웠던 상황과 그리고 음수를 받아들일 수밖에 없었던 상황의 이면에 있는 여러 가지 모습들을 동시에 보여준다.

오늘날 학교대수는 여러 측면에서 그 내용의 중요성이 증가하고 있지만 이와 함께 실제 지도에서는 많은 장애와 어려움이 부각되고 있는 영역이다. 그러나 여기서 더 큰 문제는 이러한 장애를 해결하기 위한 대안으로 보다 구체적인 연구 방법이 제시되

지 않고 있다는데 있다. 본 연구에서는 이러한 현실적인 문제에 대한 반성으로 역사-발생적 원리의 적용과 그 분석을 하나의 연구 방법으로 보고 있으며, 동시에 학교대수에서 등장하는 인식론적 장애를 이러한 역사-발생적인 관점에서 살펴볼 것을 주장하고 있다. 후속 연구를 통해, 대수 지도에 있어서 문자 기호와 음수 등을 비롯하여 보다 많은 관련 개념에서 이러한 역사-발생적 분석이 요구되며, 또한 이러한 분석의 결과를 실험연구와 비교하면서 그 동안 학교대수 지도에서 간과되었던 여러 가지 문제점을 파악하고 나아가 이러한 문제를 해결하는 구체적인 지도 방안을 구안하는 출발점이 될 수 있기를 기대한다.

감사의 글 논문 심사에 참여해주신 분들께 감사드립니다. 특히 논문의 전체적인 흐름과 함께 세세한 부분까지 검토하여 저자가 보지 못한 부분을 정확하게 지적해주신 심사자에게 감사의 마음을 전합니다. 심사 의견서를 참고하여 논문을 수정할 수 있었으며, 이로 인해 논문의 완성도를 높일 수 있었습니다. 다시 한번 논문 심사에 열심을 다해주신 분들께 감사드립니다.

참고 문헌

1. 공현주 (2002), 음수지도 방법에 관한 연구: 직관적 지도와 형식적 지도, 홍익대학교 석사학위 논문.
2. 김남희 (1997), 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 박사학위 논문.
3. 김성준 (2002), "대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰", **수학교육학 연구** 12권 1호, 229-245.
4. 김성준 (2003), "대수의 탈산술화에 관한 고찰", **한국수학사학회지** 16권 1호, 25-44.
5. 김성준 (2003), "초기대수를 중심으로 한 초등대수 고찰", **수학교육학 연구** 13권 3호, 309-327.
6. 김애란 (2002), 효과적인 음수지도를 위한 지도방안 연구, 경희대학교 석사학위 논문.
7. 김은미 (2003), 음수지도에 관한 고찰, 숙명여자대학교 석사학위 논문.
8. 우정호 (1999), **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부.
9. 우정호 (2000), **수학 학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부.
10. 유현주 (1999), "수학사와 수학교육", **학교수학** 1권 1호, 245-259.

11. 윤선화 (2001), 역사발생적 원리에 따른 기수법의 연구, 홍익대학교 석사학위 논문.
12. 윤영기 (2001), 역사발생적 원리에서 수학사 활용에 관한 고찰, 단국대학교 석사학위 논문.
13. 최병철 (2002), 음수지도의 교수현상학적 고찰, 서울대학교 석사학위 논문.
14. Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers.
15. Davis, R. (1983). Complex mathematical cognition. In H. Ginsburg(Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*(pp. 254-290). Academic Press, New York.
16. Gallardo, A. (2001), "Historical-epistemological analysis in mathematics education: Two works in didactics of algebra", In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins(Eds.), *Perspectives on School Algebra*(pp. 121-139), Kluwer Academic Publishers.
17. Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). "A cognitive gap between arithmetic and algebra". *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.
18. Filloy, E. & Rojano, T. (1985), "Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies", In L. Streefland(Ed.), *Proceedings of the XIII Annual Conference for the Psyology of Mathematics Education*(pp. 154-158), Utrecht, Holand.
19. Filloy, E. & Rojano, T. (1989), "Solving equations: the transition from arithmetic to algebra", *For the Learning of Mathematics* 9, no. 2, 19-25.
20. Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). "Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations". *Educational Studies in Mathematics* 30, 39-65.
21. Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and history of science*, New York: Columbia University Press.

On the Teaching of Algebra through Historico-Genetic Analysis

Busan National University of Education **Sung Joon Kim**

History of mathematics must be analysed to discuss mathematical reality and thinking. Analysis of history of mathematics is the method of understanding mathematical activity, by these analysis can we know how historically mathematician' activity progress and mathematical concepts develop. In this respects, we investigate teaching algebra through historico-genetic analysis and propose historico-genetic analysis as alternative method to improve of teaching school algebra. First the necessity of historico-genetic analysis is discussed, and we think of epistemological obstacles through these analysis. Next we focus two concepts i.e. letters(unknowns) and negative numbers which is dealt with school algebra. To apply historico-genetic analysis to school algebra, some historical texts relating to letters and negative numbers is analysed, and mathematics educational discussions is followed with experimental researches.

Key words : history of mathematics, school algebra, letters, negative numbers, historico-genetic analysis, epistemological obstacles

2000 Mathematics Subject Classifications : 97-03

ZDM Subject Classifications : A33

논문 접수 : 2005년 6월 15일, 심사 완료 : 2005년 7월