

## 축 방향 가속을 받는 보 구조물의 동적 안정성 해석

### Dynamic Stability Analysis of an Axially Accelerating Beam Structure

유 흥 희\* · 은 성 진\*

Hong Hee Yoo and Sung Jin Eun

(2005년 5월 10일 접수 : 2005년 8월 11일 심사완료)

**Key Words** : Parametric Excitation(매개변수 가진), Dynamic Stability(동적 안정성), Floquet's Theory(Floquet 이론), Beam Structure(보, 구조물), Transition Matrix(전이 행렬), Transition Curve(전이 곡선)

#### ABSTRACT

Dynamic stability of an axially accelerating beam structure is investigated in this paper. The equations of motion of a fixed-free beam are derived using the hybrid deformation variable method and the assumed mode method. Unstable regions due to periodical acceleration are obtained by using the Floquet's theory. Stability diagrams are presented to illustrate the influence of the dimensionless acceleration, amplitude, and frequency. Also, buckling occurs when the acceleration exceeds a certain value. It is found that relatively large unstable regions exist around the first bending natural frequency, twice the first bending natural frequency, and twice the second bending natural frequency. The validity of the stability diagram is confirmed by direct numerical integration of the equations of motion.

#### 1. 서 론

로켓 구조물처럼 축 방향 가속을 받는 보 구조물에서의 동적 안정성 해석은 교류성분 가속도에 의한 시스템의 불안정성과 직류성분 가속도에 의한 동적 좌굴 등으로 인한 매개변수들간의 관계를 분석하는 일이다. 이러한 시스템에서는 직류성분 가속도가 압축력을 초래하여 좌굴이 발생할 수 있으며, 교류성분 가속도에 의한 횡방향 진동에 의해 시스템이 불안정해 질 수 있다.

안정성 해석을 위한 운동방정식은 구조물을 보로 이상화하고 보의 실제 인장길이를 변형변수로 하는 모델링 방법<sup>(1~2)</sup>에 의해 유도하였고, 매개변수 안정성은

Floquet 이론을 이용하여 안정성을 판별하였다<sup>(3~4)</sup>. 인장길이를 변형변수로 하는 모델링 방법은 강제 운동을 하는 보의 강성 변화를 효과적으로 고려할 수 있는 선형 모델링 방법이며, 이 방법에 의해 축 방향 가속운동을 하는 보에 대해 동적 해석과 안정성 해석 등 많은 연구가 진행되어 왔다<sup>(5~6)</sup>. 매개변수 진동시스템은 서로 직교하는 진동 성분이 연성될 때 나타나는 시스템으로<sup>(7~11)</sup> 경우에 따라 진동 성분이 발산하여 시스템이 불안정하게 된다<sup>(12~13)</sup>.

이 논문에서는 축 방향 가속을 받는 구조물에 대한 선형 운동방정식을 유도하고 안정성 해석 모델을 제시하였다. 안정성 해석 결과로서 매개변수 값들의 변화에 의한 동적 안정성에 미치는 영향을 판별하였고 안정성 해석 결과로부터 안정 또는 불안정 영역에서의 동적 반응을 살펴보았다. 이 논문에서 제시한 선형 안정성 해석 모델과 해석 결과들은 비선형 안정성 해석 모델의 연구와 해석의 기초자료로 사용될 수 있으며 또한 로켓 구조물의 설계 시 참고자료로 사용될 수 있을 것이다.

\* 책임저자 : 정희원, 한양대학교 공과대학 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02) 2230-0446, Fax : (02) 2293-5070

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

## 2. 운동방정식

이 절에서는 축 방향 운동을 하는 로켓 구조물의 운동방정식을 유도하려 한다. 이 연구에서는 이론 전개 및 설명의 편의상 2차원 평면 운동을 하는 보를 해석 대상으로 선정하였다. Fig. 1은 강체 A에 고정된 외팔보의 모습을 보여준다.  $P_o$ 는 외팔보상의 임의 질점의 변형 전 위치를 나타내며  $P$ 는 변형 후 위치를 나타낸다. 여기서  $\hat{a}_1$ 와  $\hat{a}_2$ 는 강체 A에 부착된 서로 수직인 단위벡터들을 나타내며,  $x$ 는 보의 고정점  $A^*$ 로부터 변형 전 임의의 한 점  $P_o$ 까지의 거리를  $\bar{u}$ 는 탄성변위를  $s$ 는 임의 질점의 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 강체 운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하기 위해  $s$ 와  $u_2$ 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서  $\phi_{1i}(x)$ 와  $\phi_{2i}(x)$ 는 보의 인장과 굽힘방향 모드 함수들을 나타내며  $q_{1i}(t)$ ,  $q_{2i}(t)$ 는 시간의 함수인 일반 좌표들이고  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ 는 일반 좌표의 수이다. 이같이 모드 근사화 시  $\mu_2$ 와 같은 직교 변형변수뿐 아니라  $s$ 와 같은 비직교 변형변수를 혼합하여 사용하는 방법을 복합변형변수 모델링이라 한다.

보의 변형이 일어날 때 보의 임의의 한 점  $P$ 에서의 속도  $\bar{v}^P$ 는 아래 관계를 이용하여 구한다.

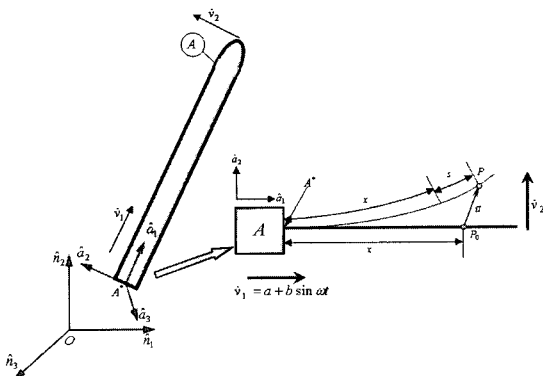


Fig. 1 Configuration of an axially accelerating beam structure

$$\bar{v}^P = \bar{v}^{A^*} + {}^A\bar{v}^P \quad (3)$$

여기서  $\bar{v}^{A^*}$ 는 외팔보의 축 방향으로 운동을 하는 강체 A상의  $A^*$ 점의 속도이며  ${}^A\bar{v}^P$ 는 강체 A에서 관찰한  $P$ 점의 속도를 나타내는데 이들은 다음 식과 같은 방향성분으로 나타낼 수 있다.

$$\bar{v}^{A^*} = v_1 \hat{a}_1 + v_2 \hat{a}_2 \quad (4)$$

$${}^A\bar{v}^P = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (5)$$

따라서

$$\bar{v}^P = (v_1 + \dot{u}_1) \hat{a}_1 + (v_2 + \dot{u}_2) \hat{a}_2 \quad (6)$$

그런데 식 (6)에서 나타난  $\dot{u}_1$ 은 앞에서  $u_1$ 이 근사화된 것이 아니므로,  $s$ 와  $u_2$ 로 표시되어야 한다. 이를 위해 필요한  $s$ 와  $u_1$  그리고  $u_2$ 의 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$x + s = \int_0^x \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\zeta \quad (7)$$

여기서  $\zeta$ 는 적분을 위한 dummy 변수이다.

Taylor 급수전개를 이용하여 식 (7)을 2차 항까지 근사적으로 전개하면

$$s \approx u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta \quad (8)$$

$s$ 를 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{u}_1 = \dot{s} - \int_0^x \left( \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \zeta} \right) d\zeta \quad (9)$$

위 식은  $\dot{u}_1$ 이  $\dot{s}$ 와  $\dot{u}_2$ 에 의해 구해질 수 있음을 보여준다. 식 (9)를 이용하여 편속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} = - \left[ \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^x (\phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta}) d\zeta q_{2j} \right] \hat{a}_1 + [\phi_{2i}] \hat{a}_2 \quad (11)$$

이상에서 구한 식들을 이용하여 운동방정식을 구할 수 있다. 운동방정식은 다음의 형태로 나타나게 된다.

$$F_r^* + F_r = 0 \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (12)$$

여기서  $F_r^*$ 은 Kane의 운동방정식의 일반관성력을  $F_r$ 은 일반작용력을 나타낸다.

이 운동방정식에서는 비선형 항들이 고려되는데 이들은 인장 변형에 의한 관성항들과 굽힘 변형에 의한 강성 항들로 구성된다. 일반관성력은 세장보의 경우 다음 식에 의해 구해질 수 있다.

$$F_r^* = -\int_0^L \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \dot{q}_r} \cdot \rho \bar{a}^p dx \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (13)$$

여기서  $L$ 과  $\rho$ 는 각각 보의 길이와 단위길이당 질량을 나타내며  $\bar{a}^p$ 는  $P$ 점의 가속도를 나타낸다

외력이 작용하지 않는 경우에 운동방정식의 일반작용력은 탄성에너지에 의해서만 결정되는데 보의 인장과 굽힘 효과만 고려한 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA_0 \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (14)$$

여기서  $E$ 는 영률,  $A_0$ 는 단면적을 각각 나타내고  $I_{zz}$ 는 2차 면적모멘트를 나타낸다.

식 (14)를 이용하여 일반작용력을 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (15)$$

이상의 결과들을 이용하여 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + K_{ij}^s q_{1j}] = P_{1i} \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^B - \dot{v}_1 K_{ij}^{GA}) q_{2j}] = P_{2i} \quad (17)$$

여기서  $\dot{v}_1$ 은 축 방향 가속도이다.

운동방정식 (16)과 (17)은 서로 연성되지 않는다. 또한 식 (16)에서 우변항에 의한 강제진동 주파수가

고유진동수와 같다면 불안정한 동적 반응을 얻게 되지만 보의 축 방향은 횡방향에 비해 높은 고유진동수의 값을 가지므로 이 연구에서는 병진방향 운동시 발생하는 횡방향 변위만 안정성 해석 시 고려하려 한다. 그리고 식 (17)에서 미분방정식의 안정성은 방정식 상의 강성 항만 관련이 되므로 비제차항을 무시할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^B - \dot{v}_1 K_{ij}^{GA}) q_{2j}] = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (18)$$

그러므로 식 (18)을 이용하여 안정성 해석을 수행한다. 식 (18)을 다음의 무차원 변수들을 이용하여 무차원화한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{L}, \quad \eta_{ai} \equiv \frac{q_{ai}}{L}$$

이상의 과정을 통해 얻어진 무차원 운동방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [\bar{M}_{ij}^{22} \ddot{\eta}_{2j} + \{ \bar{K}_{ij}^B - (\alpha + \beta \sin \gamma \tau) \bar{K}_{ij}^{GA} \} \eta_{2j}] = 0 \quad (19)$$

여기서,

$$\bar{M}_{ij}^{22} = \int_0^1 \psi_{2i} \psi_{2j} d\xi \quad (20)$$

$$\bar{K}_{ij}^B = \int_0^1 \psi_{2i,\xi\xi} \psi_{2j,\xi\xi} d\xi \quad (21)$$

$$\bar{K}_{ij}^{GA} = \int_0^1 (1-\xi) \psi_{2i,\xi} \psi_{2j,\xi} d\xi \quad (22)$$

위 식에서  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 무차원화 된 매개변수들이며 이들은 다음과 같은 관계식을 가진다.

$$\alpha = \frac{T^2}{L} a, \quad \beta = \frac{T^2}{L} b, \quad \gamma = \omega T$$

식 (19)를 직접 수치 적분하여 동적 반응을 확인할 수 있다.

### 3. Floquet 이론을 이용한 안정성 해석

식 (19)에서 모드 함수를 eigenfunction을 사용할

경우  $\bar{M}_{ij}^{22}$ 은 단위행렬이 되며  $\{\ddot{\eta}\}$ 을 좌변항에 두고 정리하면 다음과 같다.

$$\{\ddot{\eta}\} = -\left\{ \bar{K}^B \right\} - (\alpha + \beta \sin \gamma \tau) \left\{ \bar{K}^G \right\} \{\eta\} \quad (23)$$

여기서  $\{\ddot{\eta}\} = \{p\}$ 라 정의하면 식 (23)을 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{\ddot{\eta}\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -\left\{ \bar{K}^B \right\} - (\alpha + \beta \sin \gamma \tau) \left\{ \bar{K}^G \right\} & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\{\dot{u}\} = [F] \{u\} \quad (25)$$

식 (25)의 미분방정식을 풀어  $[U(T)]$ 를 구할 수 있으며 이 행렬을 전이 행렬(transition matrix)이라 한다. 여기서  $T$ 는 가진 주기이다.

위에서 구한 전이행렬을 이용하여 다음의 고유치를 구한다.

$$[U(T)]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (25)$$

식 (25)에서 구한 고유치의 크기를 이용하여 안정성을 판별할 수 있는데 모든 고유치에 대해서  $|\lambda_i| \leq 1$ 이면 안정, 하나의 고유치라도  $|\lambda_i| > 1$ 이면 불안정이라 판별할 수 있다.

그러나 실제적인 시스템의 해석 시 수치 적분과 고유치 해석에서의 수치적인 오차가 발생할 수 있다. 이 논문에서는 이러한 오차들을 감안하여 판별기준을  $|\lambda_i| > 1 + \epsilon$ 로 하여 불안정성을 판별하였으며 여기서 오차는  $\epsilon = 10^{-3}$ 을 사용하였다. 그리고 굵힘 방향 모드 수는 5개를 사용하였다.

## 4. 수치 해석 결과

### 4.1 $\alpha$ 가 일정할 경우

Fig. 2~4는 직류성분 가속도인  $\alpha$ 가 일정할 경우에 대하여 그린  $\gamma$ - $\beta$ 안정성 그래프이다.

Floquet 이론을 사용하여 각각의 위치에서 안정성 판별을 한 다음 안정한 영역과 불안정한 영역을 실선으로 구분하여 나타내었다. 안정한 영역과 불안정한 영역을 구분하는 선을 전이 곡선(transition curve)라 하는데 빗금으로 불안정한 영역을 표현하였다. 그리

고 이러한 전이 곡선들은  $\alpha=0$ 일 때  $\gamma$ 가  $\omega_p + \omega_q$ ,  $(\omega_p + \omega_q)/2$  근처에서 나타나는데  $\alpha$ 값이 증가할수록 불안정 영역이 왼쪽으로 움직이게 된다. 이는 가속도가 증가할수록 작은 진폭에도 시스템이 불안정해질 수 있다는 것을 보여준다.

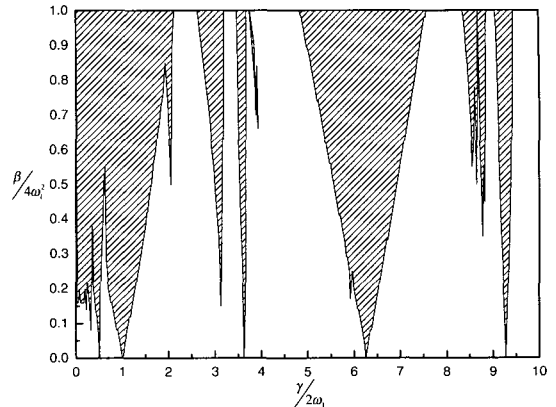


Fig. 2 Dynamic stability diagram( $\alpha=0$ )

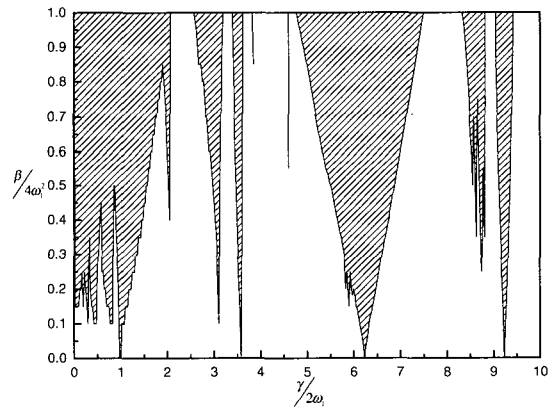


Fig. 3 Dynamic stability diagram( $\alpha=1$ )

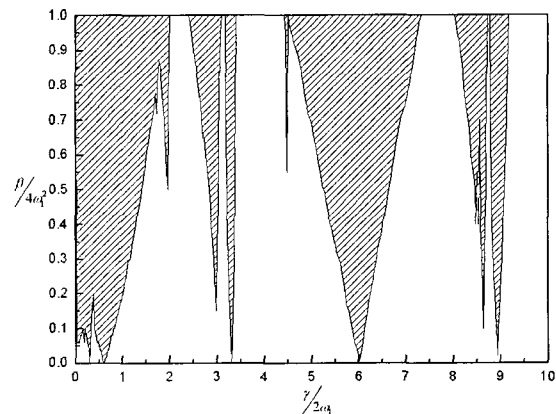


Fig. 4 Dynamic stability diagram( $\alpha=5$ )

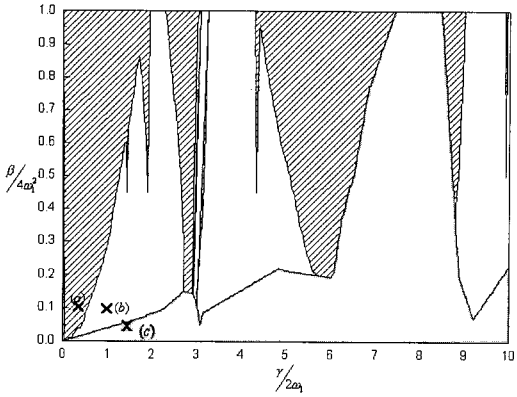
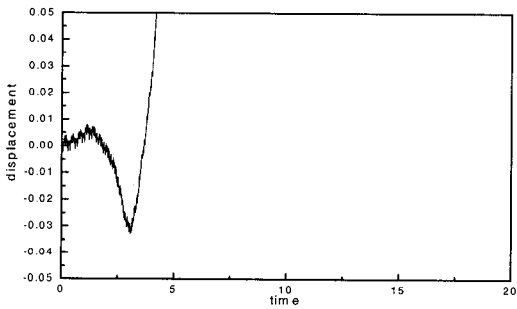
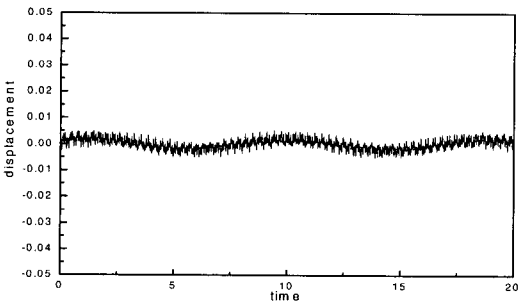


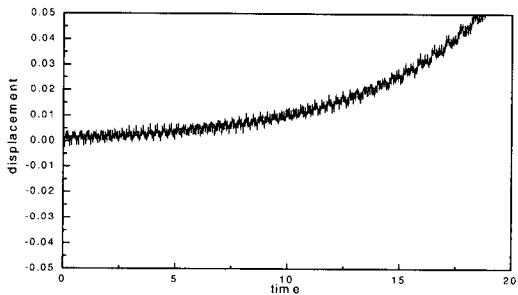
Fig. 5 Dynamic stability diagram( $\alpha = 7.9$ )



(i) Position (a) with parametric values(0.5, 0.1)



(ii) Position (b) with parametric values(1.0, 0.1)



(iii) Position (c) with parametric values(1.5, 0.05)

Fig. 6 Dynamic response simulation results( $\alpha = 7.9$ )

Fig. 5에서는 Fig. 2~4에서 안정한 영역에 불안정성이 나타나게 하는 직류성분 가속도  $\alpha$ 가 일정가속도 이상에서 축 방향으로 압축력이 작용하여 발생하는 동적 좌굴로써  $\alpha = 7.9$ 일 때부터 나타나는 것을 볼 수 있고 이 영역은 회색으로 표현하였다. Fig. 5에서 이러한 반응을 살펴보기 위해 3개의 점을 선택하였고 이 점들에 대하여 수치적분을 통해 동적 반응을 확인하였다. 그리고 Fig. 6에는 이 점들의 매개변수 값들을 사용한 동적 반응 수치해석 결과들이 나타나 있다. 여기서 해석에 사용된 모드수는 5개이고 초기조건은 보 끝단의 변위를 0.005로 주었다.

Fig. 5에서 예측한 대로 Fig. 6에서 각 점의 운동이 일치함을 볼 수 있다. (b)점과 (c)점 모두 불안정성을 나타내는 것을 볼 수 있으나 (b)점은 교류성분 가속도에 의한 불안정성이고 (c)점은 직류성분 가속도에 의한 동적 좌굴이다.

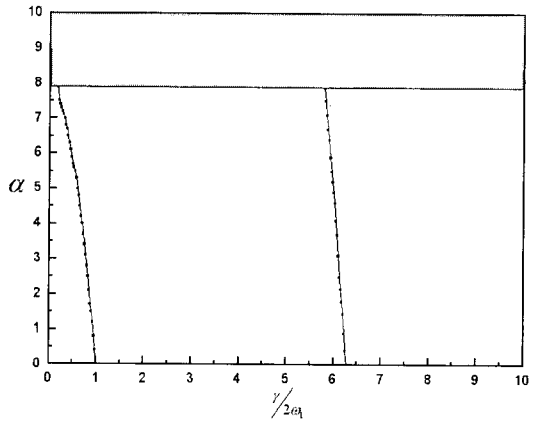


Fig. 7 Dynamic stability diagram( $\beta = 0.1$ )

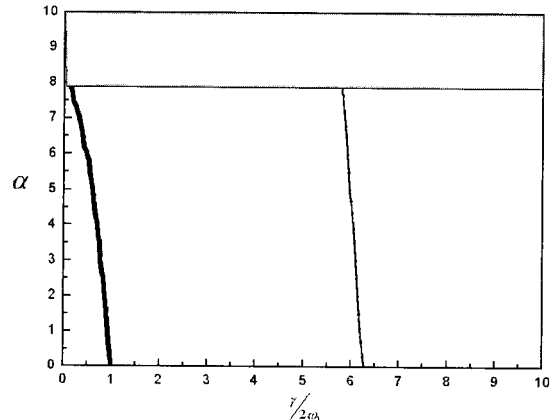


Fig. 8 Dynamic stability diagram( $\beta = 0.3$ )

### 4.2 $\beta$ 가 일정할 경우

무차원화 된 매개변수  $\beta$ 는 시스템의 횡방향 진폭을 나타내는 매개변수로서 교류성분 가속도 성분이며 이 값은 보통 1보다 작을 때 그 의미를 가진다. 그러므로 이 논문에서는  $\beta/4\omega_1^2$ 가 0.1, 0.3, 0.5일 때의 안정성 그래프의 변화를 측정하였다.

Fig. 7~9에서 볼 수 있듯이  $\beta$ 가 보구조물의 횡방향 진폭을 나타내는 매개변수이므로  $\beta$ 값이 커짐에 따라 불안정 영역이 넓어짐을 볼 수 있다. 그리고 회

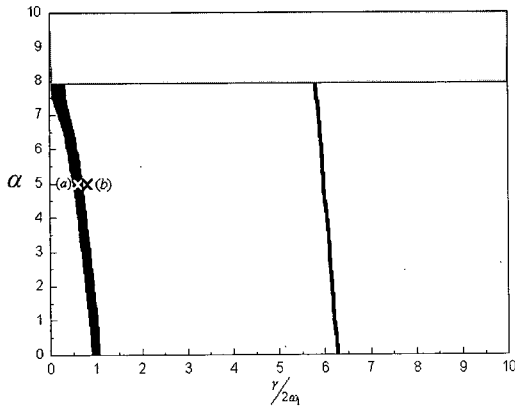
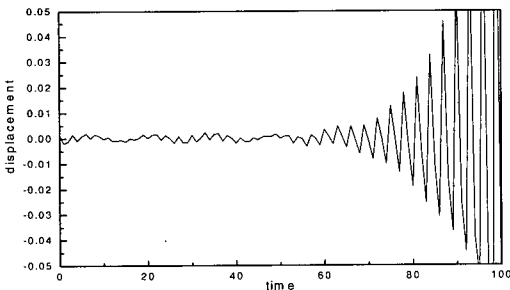
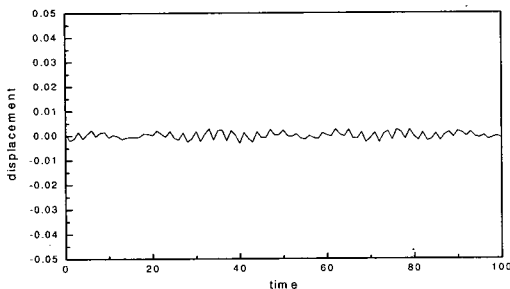


Fig. 9 Dynamic stability diagram ( $\beta=0.5$ )



(i) Position (a) with parametric values(0.6, 5)



(ii) Position (b) with parametric values(1.0, 5)

Fig. 10 Dynamic response simulation results ( $\beta=0.5$ )

색으로 표현한 영역은 Fig. 5에서 본  $\alpha=7.9$  이상일 때 발생하는 좌굴이 발생하는 영역이 된다. 또한  $\alpha$ 가 증가할수록 불안정성을 띄는 선이 왼쪽으로 기우는 것을 볼 수 있다. 이러한 반응의 검증을 위해 Fig. 9에서 두 점을 선택한 다음 동적 반응을 살펴보았다.

Fig. 10에서 볼 수 있듯이 각 점의 운동이 예측한 것과 일치함을 볼 수 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 조화함수로 축 방향 가속을 받는 보구조물의 동적 안정성을 확인하기 위한 연구가 수행되었다. 축 방향 가속운동에 따른 운동방정식 상의 강성변화가 규명되었으며 이를 근거로 Floquet 이론을 이용한 안정성 해석이 수행되었다. 해석결과  $\gamma$ 가 굽힘방향 고유진동수 2배 근처에서 매개변수 공진에 의해 큰 폭의 불안정성을 나타내는 것을 확인할 수 있었으며  $\gamma$ 가 고유진동수들의 합으로 이루어졌을 경우에도 불안정성이 나타나지만 그 영역이 작음을 확인할 수 있었다. 이러한 불안정 영역은 직류성분 가속도가 커지면서 불안정한 영역이 넓어지며 또 왼쪽으로 이동하는 것을 볼 수 있었다. 이것은 직류성분 가속도가 증가하면 작은 진동에도 불안정성을 일으킬 수 있다는 것을 보여준다. 또한 일정 직류성분 가속도 이상이 되면 동적 좌굴이 발생하는 것도 확인할 수 있었다. 이와 같이 가속도가 증가하게 되면 강성이 감소되어 불안정한 영역이 넓어지는 것을 확인할 수 있었다. 이러한 안정성 해석 결과를 확인하기 위해 동적 반응을 수행하였으며 안정성 해석의 정확성을 확인할 수 있었다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

(1) Kane, T. B., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base." Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 10, pp. 139~151.

(2) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.

(3) Leonard Meirovitch, 1970, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill.

(4) Nayfeh, A. and Mook, D., 1979, *Nonlinear Oscillation*, John Wiley & Sons, Inc.

(5) Hyun, S. and Yoo, H., 1999, "Dynamic Modeling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 3, pp. 543~558.

(6) Hyun, S. and Yoo, H., "Dynamic Modeling and Stability Analysis of a Flying Structure Undertaking Parametric Excitation Forces," *Transactions of the KSNVE*, Vol. 9, No. 6, pp. 1157~1165.

(7) Faraday, M., 1831, "On a Peculiar Class of Acoustical Figures and on Certain Forms Assumed by a Group of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces," *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, pp. 299~318.

(8) Mathieu, E., 1868, "Memoire sur le Movement Vibratoire d'une Membrane de Forme Elliptique," *J. Math.*, 13, pp. 137~203.

(9) Hill, G., 1886, "on the Part of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon," *Acta Math.*, 8, pp. 1~36.

(10) Floquet, G., 1883, "Sur les Equation Differentielles Lineaires a Coefficients Periodique," *Annales de Ecole Normal Superior, Paris*, Vol. 2, No. 12, pp. 47~89.

(11) Beal, T., 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," *AIAA J.*, 3, pp. 486~494.

(12) Iwatsubo, T., Saigo, M. and Sugiyama, Y., 1973, "Parametric Instability of Clamped-clamped and Clamped Simply Supported Columns Under Periodic Axial Loads," *J. of Sound and Vibration*, 30, pp. 65~77.

(13) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, 62, pp. 375~381.