

섭동법을 이용한 우주 구조물의 동적 운동 해석

Dynamic Analysis of Space Structure by Using Perturbation Method

곽 문 규* · 성 관 제*

Moon K. Kwak and Kwan Jae Seong

(2005년 4월 14일 접수 : 2005년 8월 23일 심사완료)

Key Words : Space Structure(우주구조물), Dynamic Analysis(동적해석), Quasi-coordinates(준좌표계), Perturbation Method(섭동법)

ABSTRACT

This paper is concerned with the application of perturbation method to the dynamic analysis of space structure floating in space. In dealing with the dynamics of space structure, the use of Lagrange's equations of motion in terms of quasi-coordinates were suggested to derive hybrid equations of motion for rigid-body translations and elastic vibrations. The perturbation method is then applied to the hybrid equations of motion along with discretization by means of admissible functions. This process is very tiresome. Recently, a new approach that applies the perturbation method to the Lagrange's equations directly was proposed and applied to the two-dimensional floating structure. In this paper, we propose the application of the perturbation method to the Lagrange's equations of motion in terms of quasi-coordinates. Theoretical derivations show the efficacy of the proposed method.

1. 서 론

우주 구조물과 같이 3차원 공간상에서 운동하는 구조물에 대해 동적 해석을 수행하는 경우, 준좌표(quasi-coordinates)를 사용하는 것이 제안되었다⁽¹⁾. 준좌표는 움직이는 물체에 고정된 좌표로써 좌표의 적분값이 존재하지 않는 좌표이다⁽¹⁾. 준좌표를 이용하면 속도와 각속도 벡터로 정의되는 운동 에너지의 유도 과정이 매우 단순해진다. 그러나 절대 좌표계에 근거한 위치를 계산하기 위해서는 비선형 미분방정식을 적분해야하는 절차가 필요하다. 우주구조물이 유연한 경우에는 탄성 진동도 포함되게 되는데 유연한

우주구조물에 준좌표를 적용하는 연구를 Meirovitch 등⁽²⁾이 시도하였다. Meirovitch 등⁽²⁾은 이 연구에서 준좌표를 도입해 안테나가 움직이는 경우에 발생하는 강제운동의 섭동량을 해석하였다. Meirovitch⁽³⁾는 준좌표 이론을 보다 일반화하여 유연 구조물의 해석에 이용하는 방법을 제시하였으며 이 이론을 확장해 준모멘텀의 개념을 제안하였다⁽⁴⁾. 그러나 준좌표의 도입에도 불구하고 강제운동과 탄성진동의 연성으로 인해 운동방정식을 유도하면 Hybrid, 즉 상미분방정식과 편미분방정식이 조합된 형태로 나타나게 된다⁽²⁻⁴⁾. 또한 강제운동의 영향으로 운동방정식은 비선형이다. 상미분방정식과 편미분방정식이 뒤섞인 형태를 수치적으로 계산한다는 것은 용이하지 않기 때문에 일반적으로 편미분방정식의 변수인 탄성변위를 허용함수와 가정모드법을 도입하여 이산화한다⁽⁵⁾. 이렇게 이산화하였을 경우에는 운동방정식은 비선형의 상미분방정식 형태를 가지게 된다^(2,6). 이러한 비선형 운동방정식은 구조물의 조종(manuevering) 또는 제어기

† 책임저자 : 정희원, 동국대학교 기계공학과
E-mail: kwakm@dongguk.edu
Tel: (02) 2260-3705, Fax: (02) 2263-9379

* 동국대학교 기계공학과

설계에 적합하지 못하다. 따라서 섭동법을 적용하여 비선형의 강체운동방정식과 섭동된 강체운동과 탄성 진동이 연성된 선형 운동방정식으로 분리하여 해석하는 시도가 있어왔다.^(3,4,6-8) 특히 최근에는 Meirovitch 등⁽⁷⁾이 이와 같은 방법을 이용해 항공기의 조종운동과 공탄성 운동해석을 동시에 수행하였다.

그러나 기존의 연구^(2,6,7)에서 사용한 방법의 단점은 그 유도과정이 매우 복잡하여 유도된 운동방정식의 검증에 많은 주의를 기울여야 한다는 것과 그 표현식이 컴퓨터 프로그래밍에 적합하지 않다는 것이다. 이런 문제를 해결하기 위해 콰등⁽⁸⁾은 섭동법을 라그랑지 방정식과 에너지 방정식에 직접 도입하여 운동 방정식 유도 과정을 시작 단계부터 분리하는 방법을 제안하였다. 콰등⁽⁸⁾의 연구 결과에서 보듯이 이 방법을 사용하면 운동 방정식의 형태가 행렬식 형태로 유도되어 수치해석에 적합함을 알 수 있다.

그러나 관성좌표계로 표현되는 운동에너지에 대해서 일반적인 라그랑지 방정식을 사용하면 콰등⁽⁸⁾이 제안한 방법을 이용하더라도 유도과정이 복잡해진다. 따라서 이 연구에서는 콰등⁽⁸⁾이 제안한 방법을 준좌표로 표현된 운동방정식에 적용해 그 유도과정을 단순화하여 수치해석에 적합한 행렬식 형태의 운동방정식을 유도하고자 한다. 준좌표계로 표현된 섭동 라그랑지 방정식을 이용하여 유도된 유도한 운동방정식을 살펴본 결과 Matlab과 같은 수치계산 프로그램에 적합함을 발견할 수 있었다. 이 연구에서 얻어진 이론 결과는 우주 구조물의 동역학 해석에 앞으로 유용하게 사용될 수 있을 것으로 예상된다.

2. 준좌표계와 라그랑지 방정식

다음 그림은 유연한 우주 구조물이 우주 공간상에서 운동하는 경우를 도시한 것이다.

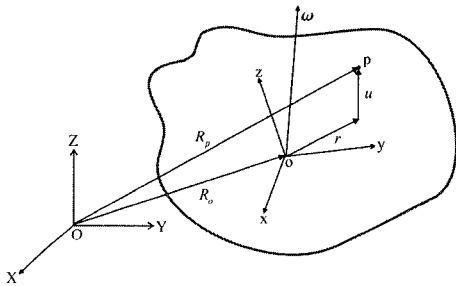


Fig. 1 Coordinates for the motion of flexible structure in space

이 그림에서 X, Y, Z는 공간상에 고정된 관성좌표계이며, x, y, z는 우주구조물에 부착된 좌표계이다. 또한 R_o 는 X, Y, Z의 원점 O에서 x, y, z의 원점 o까지의 위치 벡터를 나타내며, u는 탄성 변형을 나타내고, r는 원점 o부터 탄성 변형이 일어나는 지점 p까지의 위치 벡터이다. R_p 는 관성좌표계의 원점으로부터 탄성변형이 일어나는 지점까지의 위치 벡터이다. w는 우주구조물의 회전을 나타내는 각속도 벡터이다.

이와 같은 유연한 우주구조물의 동적 해석을 위해 이 연구에서는 Meirovitch⁽³⁾가 제안한 준좌표계에 근거한 라그랑지 방정식을 이용하였다. 그리고 동적운동 해석의 간략화를 위해 위치에너지를 탄성에너지만으로 이루어져 있다고 가정하였다. 또한 탄성변위를 가정모드법을 이용해 위치에 관한 함수와 시간에 관한 함수의 이산화한 형태로 표현한다고 가정하였는데, 이 경우에 $u = \Phi q$ 와 같이 표현할 수 있다. 여기서 $\Phi = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n]$ 는 허용함수로 이루어진 행렬이고 $q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$ 는 일반좌표를 나타낸다. 이와 같은 점을 고려하면 라그랑지 방정식이 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V_o} \right) + \tilde{w} \left(\frac{\partial L}{\partial V_o} \right) = F_v \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial w} \right) + \tilde{v}_o \left(\frac{\partial L}{\partial V_o} \right) + \tilde{w} \left(\frac{\partial L}{\partial w} \right) = M_w \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = Q \quad (3)$$

여기서 $L = T - V$ 이며 T는 운동에너지, V는 탄성 에너지를 나타낸다. V_o 는 구조물의 원점에서의 속도벡터를 나타내는데 구조물 좌표계에 바탕을 둔 벡터이다. w 역시 구조물 좌표계에 바탕을 두고 표현되는 벡터이다. F_v, M_w 은 구조물 좌표계로 표현되는 합력과 합모멘트를 나타낸다. p는 일반좌표 q의 시간미분, 즉 속도 일반좌표를 나타낸다. \sim 는 skew-symmetric 행렬을 나타내며 각 요소는 다음과 같다.

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

먼저 (1), (2), (3) 식을 묶어서 다음과 같은 하나의 방정식으로 표현해보자.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + G \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) - R \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) = H \quad (5)$$

여기서 $x = [V_o^T w^T p^T]^T$ 이고 $y = [R_o^T \theta^T q^T]^T$ 이다. 또한 $H = [F_v^T M_w^T Q^T]^T$ 이며

$$G = G(x) = \begin{bmatrix} \tilde{w} & 0 & 0 \\ \tilde{V}_o & \tilde{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (6a,b)$$

여기서 I 는 대각선 요소가 1인 단위행렬이다.

방정식 (5)와 더불어 병진운동과 각운동, 탄성 일 반좌표를 구하기 위해서는 다음과 같은 미분방정식이 동시에 풀어져야 한다.

$$\dot{R}_o = C^T V_o, \quad \dot{\theta} = D^{-1} w, \quad \dot{q} = p \quad (7-9)$$

3. 섭동법의 적용

이전의 연구⁽²⁻⁴⁾에서는 먼저 식 (1), (2), (3)에 운동에너지와 위치에너지를 대입하여 운동방정식을 유도한 다음에 섭동법을 적용하여 영차의 강제운동방정식과 일차의 섭동된 강제운동방정식과 탄성운동 방정식을 유도하였다. 그러나 그 유도과정이 쉽지 않았다. 이런 문제점을 해결하기 위해 곽등⁽⁹⁾은 먼저 라그랑지 방정식에 섭동법을 적용하여 영차와 일차의 라그랑지 방정식을 유도하고 그 방정식에 영차와 일차의 운동에너지와 위치ener지를 대입하는 방법을 제안하였다.

곽등⁽⁹⁾의 연구 결과를 이용하기 전에 먼저 섭동 운동방정식을 유도하는 과정에서 $p_0 = q_0 = 0$ 가 된다는 것, 즉 탄성변위는 성질상 일차의 양이기 때문에 영차의 항은 사라진다는 것을 기억해야 한다. 그러나 영차의 강제 운동은 관성으로 인해 탄성 변위를 유발하기 때문에 영차의 운동으로 발생하는 외력 형태의 관성력을 고려해야 한다. 이를 위해 외력항을 다음과 같이 표현하는 것을 제안한다.

$$H = H_0 - d + \epsilon \left(H_1 + \frac{1}{\epsilon} d \right) \quad (10)$$

여기서 d 는 영차의 강제운동로 인해 발생하여 단

성 변형에 영향을 주는 관성력이다.

곽등⁽⁹⁾의 연구에서 발견한 섭동법의 원리를 이용하고 식 (5)에 섭동법과 운동에너지와 위치에너지에 대한 섭동 표현식을 적용하면 다음과 같은 영차와 일차의 운동방정식이 유도 된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_0} \right) + G_0 \left(\frac{\partial L_0}{\partial x_0} \right) - R \left(\frac{\partial L_0}{\partial y_0} \right) = H_0 - d \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_0} \right) + G_0 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_0} \right) + G_1 \left(\frac{\partial L_0}{\partial x_0} \right) - R \left(\frac{\partial L_1}{\partial y_0} \right) \\ = H_1 + \frac{1}{\epsilon} d \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $L_0 = T_0 - V_0$, $L_1 = T_1 - V_1$ 이다. 또한 $G_0 = G(x_0)$, $G_1 = G(x_1)$ 이다.

Fig. 1에 보이는 우주구조물에 대해서 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다. 단, 위치에너지는 탄성에너지만을 가정한다.

$$T = \frac{1}{2} x^T M(y) x, \quad V = \frac{1}{2} y^T K y \quad (13a,b)$$

섭동법을 적용하기 위해 $x = x_0 + \epsilon x_1$, $y = y_0 + \epsilon y_1$, $M(y) = M_0(y_0) + \epsilon M_1(y_0, y_1)$ 를 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 영차와 일차의 운동에너지와 위치에너지가 유도된다.

$$T_0 = \frac{1}{2} x_0^T M_0(y_0) x_0 \quad (14)$$

$$T_1 = x_0^T M_0(y_0) x_1 + \frac{1}{2} x_0^T M_1(y_0, y_1) x_0 \quad (15)$$

$$V_0 = \frac{1}{2} y_0^T K y_0, \quad V_1 = y_0^T K y_1 \quad (16,17)$$

식 (14)와 (16)을 식 (11)에 대입하면 다음과 같은 영차의 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} M_0 \dot{x}_0 + G_0 M_0 x_0 \\ - \frac{1}{2} R \frac{\partial}{\partial y_0} (x_0^T M_0 x_0) + R K y_0 = H_0 - d \end{aligned} \quad (18)$$

또한 식 (15)와 (17)을 식 (12)에 대입하면 일차의 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} M_0 \dot{x}_1 + M_1 \dot{x}_0 + \frac{dM_1}{dt} x_0 - G_0 M_0 x_1 + G_0 M_1 x_0 \\ + G_1 M_0 x_0 - R \frac{\partial}{\partial y_0} (x_0^T M_0 x_1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2}R\frac{\partial}{\partial y_0}(x_0^T M_1 x_0) + RKy_1 = H_1 + \frac{1}{\epsilon}d$$

영차의 운동방정식 (18)과 일차의 운동방정식 (19)를 적용하는데 있어 $p_0 = q_0 = 0$ 가 된다는 것을 다시 한번 강조한다.

4. 유연한 우주구조물의 운동방정식

영차와 일차의 운동방정식이 유도되었기는 하지만 실제의 운동방정식을 유도하기 위해서는 각각의 행렬에 대한 정확한 값을 유도해야 한다. 먼저 질량행렬을 구해보자. 질량행렬은 운동에너지의 유도과정에서 나오는데 이를 구하기 위해서는 먼저 우주구조물의 임의의 점에서의 속도벡터를 유도해야 한다. 앞에서 설명한 바와 같이 좌표계는 운동하는 구조물에 부착된 좌표계이다. 따라서 지점 p의 속도 벡터를 구조물에 부착된 좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$V_p = V_o + (\dot{r} + \tilde{\Phi}q)^T w + \dot{\Phi}q \quad (20)$$

따라서 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int \rho V_p^T V_p dD = \frac{1}{2} x^T M x \quad (21)$$

여기서 질량행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$M = \begin{bmatrix} mI & \tilde{S}^T & \tilde{\Phi} \\ \tilde{S} & J & \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Phi}^T & \tilde{\Phi}^T & M_b \end{bmatrix} \quad (22)$$

그리고 질량행렬의 각 요소는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{S} = \int \rho (\dot{r} + \tilde{\Phi}q) dD, \quad \tilde{\Phi} = \int \rho \Phi dD \quad (23a,b)$$

$$J = \int \rho (\dot{r} + \tilde{\Phi}q) (\dot{r} + \tilde{\Phi}q)^T dD, \quad (23c)$$

$$\tilde{\Phi} = \int \rho (\dot{r} + \tilde{\Phi}q) \Phi dD,$$

$$M_b = \int \rho \Phi^T \Phi dD \quad (23d,e)$$

이로부터 영차와 일차의 질량 행렬을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$M_0 = \begin{bmatrix} mI & \tilde{S}_b^T + \tilde{S}_{q_0}^T & \tilde{\Phi} \\ \tilde{S}_b + \tilde{S}_{q_0} & J_b + J_{q_0} & \tilde{\Phi}_b + \tilde{\Phi}_{q_0} \\ \tilde{\Phi}^T & \tilde{\Phi}_b^T + \tilde{\Phi}_{q_0}^T & M_b \end{bmatrix} \quad (24a)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{S}_{q_1}^T & 0 \\ \tilde{S}_{q_1} & J_{q_0q_1} & \tilde{\Phi}_{q_1} \\ 0 & \tilde{\Phi}_{q_1}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (24b)$$

여기서

$$\tilde{S}_b = \int \rho \dot{r} dD, \quad J_b = \int \rho \dot{r} \dot{r}^T dD, \quad (25a,b)$$

$$\tilde{\Phi}_b = \int \rho \dot{r} \Phi dD, \quad \tilde{S}_{q_0} = \int \rho \tilde{\Phi} q_0 dD, \quad (25c,d)$$

$$J_{q_0} = \int \rho \dot{r} [\tilde{\Phi} q_0]^T dD + \int \rho [\tilde{\Phi} q_0] \dot{r}^T dD, \quad (25e)$$

$$\tilde{\Phi}_{q_0} = \int \rho [\tilde{\Phi} q_0] \Phi dD \quad (25f)$$

$$J_{q_0q_1} = \int \rho \dot{r} [\tilde{\Phi} q_1]^T dD + \int \rho [\tilde{\Phi} q_1] \dot{r}^T dD \\ + \int \rho [\tilde{\Phi} q_0] [\tilde{\Phi} q_1]^T dD + \int \rho [\tilde{\Phi} q_1] [\tilde{\Phi} q_0]^T dD \quad (25g)$$

$$\tilde{S}_{q_1} = \int \rho \tilde{\Phi} q_1 dD, \quad \tilde{\Phi}_{q_1} = \int \rho [\tilde{\Phi} q_1] \Phi dD \quad (25h,i)$$

그리고 탄성에너지만을 고려할 때 강성행렬은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{bmatrix} \quad (26)$$

식 (24)와 (26)을 식 (18)에 대입하면 다음과 같은 영차의 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} mI & \tilde{S}_b^T \\ \tilde{S}_b & J_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_{o0} \\ \dot{w}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{w}_0 & 0 \\ \tilde{V}_{o0} & \tilde{w}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{o0} \\ w_0 \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} F_{o0} \\ M_{o0} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

영차의 운동 방정식 (27)을 유도하는 과정이 복잡해 보이지만 $\frac{\partial}{\partial y_0}(x_0^T M_0(y_0) x_0)|_{a_0=0} = 0$ 와 $RKy_0|_{a_0=0} = 0$ 가 되어 비교적 쉽게 영차의 운동 방

정식을 유도할 수 있다. 그리고 p_0 에 대한 운동 방정식을 전개하면 앞에서 도입했던 강체에 의한 관성 외력이 다음과 같이 유도됨을 알 수 있다.

$$d = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (28a)$$

여기서

$$d_3 = -\bar{\Phi}^T (\dot{V}_{o0} + \tilde{w}_0 V_{o0}) - \tilde{\Phi}^T \dot{w}_0 + \frac{1}{2} \hat{\Phi}^T (w_0) w_0 \quad (28b)$$

영차의 운동방정식과 동시에 풀려져야 하는 미분방정식은 식 (7), (8)에 섭동법을 적용하여 구할 수 있다.

$$\dot{R}_{o0} = C_0^T V_{o0} \quad (29)$$

$$\dot{\theta}_0 = D_0^{-1} w_0 \quad (30)$$

식 (24)와 (26)을 식 (19)에 대입하면 다음과 같은 일차의 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \hat{M}_0 \dot{x}_1 + (G_0 \hat{M}_0 + \tilde{G}) x_1 + G_1 \hat{M}_0 x_0 + \hat{K} y_1 \\ = H_1 + \frac{1}{\epsilon} d \end{aligned} \quad (31)$$

여기서

$$\hat{M}_0 = \begin{bmatrix} mI & \tilde{S}_b & \tilde{\Phi} \\ \tilde{S}_b^T & J_b & \tilde{\Phi}_b \\ \tilde{\Phi}^T & \tilde{\Phi}_b^T & M_b \end{bmatrix} \quad (32a)$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{w}_0 \tilde{\Phi} \\ 0 & 0 & \tilde{V}_{o0}^T \tilde{\Phi} + \hat{\Phi}(w_0) \\ \tilde{\Phi}^T \tilde{w}_0 & \tilde{\Phi}^T \tilde{V}_{o0}^T + \hat{\Phi}^T(w_0) & 2\Gamma(w_0) \end{bmatrix} \quad (32b)$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\tilde{w}_0 + \tilde{w}_0^2) \tilde{\Phi} \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & K_b + \Gamma(\dot{w}_0) + \tilde{M}(w_0) \end{bmatrix} \quad (32c)$$

$$\hat{\Phi}(w_0) = 2 \int \rho \tilde{r} \tilde{w}_0 \tilde{\Phi} dD - \tilde{w}_0 \tilde{\Phi} \quad (32d)$$

$$\Gamma(w_0) = \int \rho \Phi^T \tilde{w}_0 \Phi dD \quad (32e)$$

$$\tilde{M}(w_0) = \int \rho \Phi^T \tilde{w}_0^2 \Phi dD \quad (32f)$$

$$\begin{aligned} \kappa = (-\tilde{V}_{o0} - \tilde{w}_0 \tilde{V}_{o0} + \tilde{V}_{o0} \tilde{w}_0) \tilde{\Phi} \\ + \hat{\Phi}(\dot{w}_0) + \tilde{w}_0 \hat{\Phi}(w_0) \end{aligned} \quad (32g)$$

식 (31)을 유도하는 과정은 영차의 운동 방정식 (27)을 유도하는 과정보다 복잡하다. 다음에 그 유도과정의 일부를 소개한다. 다음 항을 고려해보자.

$$\frac{\partial}{\partial y_0} (x_0^T M_0(y_0) x_1) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial V_{o0}} (x_0^T M_0(y_0) x_1) \\ \frac{\partial}{\partial w_0} (x_0^T M_0(y_0) x_1) \\ \frac{\partial}{\partial q_0} (x_0^T M_0(y_0) x_1) \end{array} \right\} \quad (33)$$

여기서 $M_0(y_0) = M_0(q_0)$ 이고 이 계산이 $q_0 = 0$ 에 대해서 이루어지기 때문에 V_{o0} 와 w_0 에 대한 편미분값은 0이 되며 오직 q_0 에 대한 편미분값만이 남게 된다. 이 항을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_0} (x_0^T M_0(y_0) x_1) \Big|_{q_0=0} = \\ [\tilde{\Phi}^T \tilde{w}_0 \quad \tilde{\Phi}^T \tilde{V}_{o0}^T + \hat{\Phi}(w_0) - P(w_0)] x_1 \end{aligned} \quad (34)$$

식 (30)과 동시에 풀려져야 하는 식은 식 (7), (8), (9)에 섭동법을 적용하여 얻어지는데 다음과 같다.

$$\dot{R}_{o1} = C_0^T V_{o1} - C_0^T C_1 \dot{R}_0 \quad (35)$$

$$\dot{\theta}_1 = D_0^{-1} w_1 - D_0^{-1} D_1 \dot{w}_0 \quad (36)$$

$$\dot{q}_1 = p_1 \quad (37)$$

5. 적용 예

앞에서 유도한 섭동 미분 방정식의 타당성을 조사하기 위하여 2차원 운동을 하는 자유-자유보를 고려해 곽의 연구 결과⁽⁸⁾와 비교해 보자. 비교를 위해 식 (31)의 q 에 관한 일차의 섭동 방정식을 추출하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \bar{\Phi}^T \dot{V}_1 + \bar{\Phi}_b^T \dot{w}_1 + M_b \dot{p}_1 + \bar{\Phi}^T \tilde{w}_0 V_1 \\ & + (\bar{\Phi}^T \tilde{V}_{00}^T + \hat{\Phi}^T(w_0)) w_1 + 2\Gamma(w_0) p_1 \quad (38) \\ & + (K_b + \Gamma(\dot{w}_0) + \tilde{M}(w_0)) q_1 = Q_1 + d_3 \end{aligned}$$

여기서 $\varepsilon=1$ 로 고려하였다. 식 (38)은 3차원 운동을 하는 물체에 대해 유도된 식이기 때문에 2차원 평면상 운동에 대한 식으로 다시 표현할 필요가 있다. 다음은 콧의 연구⁽⁸⁾에서 고려한 2차원 평면상에서 강제운동과 탄성진동을 동시에 경험하는 자유-자유보를 나타낸다.

여기서 X와 Y는 절대 좌표를 의미하며 x, y는 자유-자유보의 국부좌표를 나타낸다. R은 절대좌표계의 원점 O으로부터 자유-자유보의 국부좌표원점 o까지의 위치벡터를 나타내며, θ 는 절대좌표계에 대한 국부좌표계의 강제회전을 나타낸다. $u(x, t)$ 는 y방향으로의 탄성변위를 가리킨다. 이 경우에 대해 각 벡터와 행렬들은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} u &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi \\ 0 \end{Bmatrix} q, \quad r = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\ \tilde{r} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ V &= \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V_y \\ 0 & 0 & -V_x \\ -V_y & V_x & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\Phi} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} \quad (39) \end{aligned}$$

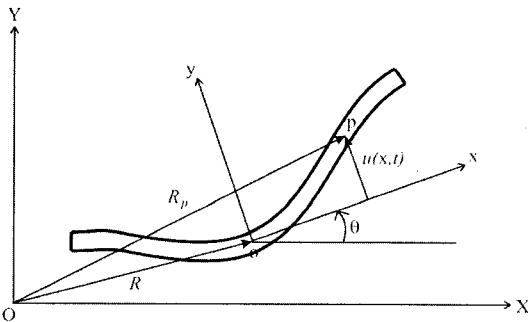


Fig. 2 Free-free flexible beam

이를 이용하면 식 (38)의 각 항에 대해 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^T \dot{V}_1 &= \bar{\phi}^T \dot{V}_{y1}, \quad \bar{\Phi}_b^T \dot{w}_1 = \bar{\phi}_b^T \dot{\theta}_1, \\ \bar{\Phi}^T \tilde{w}_0 V_1 &= \dot{\theta}_0 \bar{\phi}^T V_{x1}, \quad \bar{\Phi}^T \tilde{V}_{00}^T w_1 = \dot{\theta}_1 \bar{\phi}^T V_{x0} \\ \hat{\Phi}(w_0) &= 0, \quad \tilde{M}(w_0) = -\dot{\theta}_0^2 M_b, \\ \Gamma(w_0) &= 0 \quad (40) \end{aligned}$$

그리고 식 (28)을 계산해 보면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$d_3 = -\bar{\phi}^T (\dot{V}_{y0} + \dot{\theta}_0 V_{x0}) - \dot{\theta}_0 \bar{\phi}^T \quad (41)$$

식 (40)과 (41)를 식 (38)에 대입하면 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}^T (\dot{V}_{y1} + \dot{\theta}_0 V_{x1} + V_{x0} \dot{\theta}_1) + \bar{\phi}_b^T \dot{\theta}_1 + M_b \dot{p}_1 \\ & + (K_b - \dot{\theta}_0^2 M_b) q_1 \\ & = Q_1 - \bar{\phi}^T (\dot{V}_{y0} + \dot{\theta}_0 V_{x0}) - \dot{\theta}_0 \bar{\phi}^T \quad (42) \end{aligned}$$

식 (42)를 콧의 연구 결과⁽⁸⁾과 비교하기 위해서는 물체에 고정된 좌표에 대한 속도 표현식을 절대 좌표계에 대한 병진운동항으로 변환해야 한다. 이를 위해서 식 (29)와 (35)의 관계식이 필요하다. 식 (29)와 (35)로부터 다음식이 유도된다.

$$\begin{aligned} V_{x0} &= c\theta_0 \dot{R}_{x0} + s\theta_0 \dot{R}_{y0}, \\ V_{y0} &= -s\theta_0 \dot{R}_{x0} + c\theta_0 \dot{R}_{y0} \\ V_{y1} &= -s\theta_0 \dot{R}_{x1} + c\theta_0 \dot{R}_{y1} \\ & - (c\theta_0 \dot{R}_{x0} + s\theta_0 \dot{R}_{y0}) \theta_1 \quad (43) \end{aligned}$$

식 (43)을 식 (42)에 대입하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}^T (-s\theta_0 \dot{R}_{x1} + c\theta_0 \dot{R}_{y1}) + \bar{\phi}_b^T \dot{\theta}_1 + M_b \ddot{q}_1 \\ & + \bar{\phi}^T (c\theta_0 \dot{R}_{x0} - s\theta_0 \dot{R}_{y0}) \theta_1 \\ & + (K_b - \dot{\theta}_0^2 M_b) q_1 = Q_1 - \bar{\phi}^T \ddot{\theta}_0 \\ & + \bar{\phi}^T \ddot{\theta}_0 + \bar{\phi}^T (s\theta_0 \dot{R}_{x0} - c\theta_0 \dot{R}_{y0}) \quad (44) \end{aligned}$$

여기서 식 (44)가 곽⁽⁸⁾의 연구결과에서 탄성진동과 강제운동의 섭동양이 연성된 최종 표현식과 동일함을 확인할 수 있다. 따라서 이 연구에서 유도한 운동방정식이 타당함을 알 수 있다.

6. 토의 및 결론

이 연구에서는 우주 구조물의 동적 운동 방정식을 유도하는 방법을 제안하였다. 우주 구조물의 동적 운동 해석에 효과적으로 사용된 방법은 준좌표계를 이용한 라그랑지 방정식과 섭동법을 적용하는 것이다. 그러나 준좌표계에 대해 표현된 라그랑지 방정식을 이용해 운동방정식을 유도하고 그 결과에 섭동법을 적용하는 방법은 유도 과정이 매우 복잡하고 수치해석을 위한 적절한 형태를 제시하지 못한다. 따라서 이 연구에서는 이전에 제안된 섭동법의 단점을 보완하는 새로운 접근방식을 제안하였다. 새로운 접근 방법은 먼저 준좌표계로 표현된 라그랑지 방정식에 섭동법을 적용하여 새로운 형태의 라그랑지 방정식을 유도한 다음 운동에너지와 위치에너지에 섭동법을 적용하여 라그랑지 방정식에 사용되는 행렬을 구하는 것이다. 이 방법을 이용하면 영차와 일차의 운동 방정식을 유도하는 과정을 체계화하고 수치해석에 적합한 형태를 유도할 수 있다.

이 연구에서 유도한 영차의 상태방정식은 저차의 비선형 미분방정식이며 일차의 상태방정식은 영차의 항들이 외력으로 작용하고 영차의 항들의 시간변화율이 계수 행렬에 포함되는 고차의 선형 미분방정식이다. 영차의 상태방정식이 일차의 상태방정식에 비해 저차가 되는 이유는 탄성에 관한 일반변위가 이미 일차의 항으로 가정되었기 때문이다. 영차의 상태방정식에는 오직 강제운동과 관련된 항만 포함되지만 최종적인 강제 운동 응답은 영차의 응답과 일차의 응답을 합해서 구해진다.

이 연구에서 유도한 운동방정식의 타당성을 입증하기 위하여 2차원 자유-자유보를 고려해 기존의 결과와 비교하였다. 비교 결과 이 연구에서 제안한 동적 모델링 방법이 타당함을 확인할 수 있었다. 이 연구 결과는 우주구조물과 같이 우주 공간 상태에 있는 구조물의 강제운동 및 진동해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 동국대학교 논문게재 장려금 지원으로 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드린다.

참 고 문 헌

- (1) Meirovitch, L., 1970, Method of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, New York.
- (2) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., 1990, "Dynamics and Control of a Spacecraft with Retargeting Flexible Antennas," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 2, pp. 241~248.
- (3) Meirovitch, L., 1991, "Hybrid State Equations for Flexible Bodies in Terms of Quasi-coordinates," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 14, No. 5, pp. 1008~1013.
- (4) Meirovitch, L., 1993, "State Equations for Maneuvering and Control of Flexible Bodies Using Quasimomenta," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, No. 5, pp. 882~891.
- (5) Meirovitch, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff&Noordhoff, The Netherlands.
- (6) Kwak, M. K. and Meirovitch, L., 1992, "New Approach to the Maneuvering and Control of Flexible Multibody Systems," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 6, pp. 1342~1353.
- (7) Meirovitch, L. and Tuzcu, I., 2003, Integrated Approach to the Dynamics and Control of Maneuvering Flexible Aircraft, NASA/CR-2003-211748.
- (8) 곽문규, 2005, "자유-자유보의 동적해석에 대한 섭동법의 적용", 한국소음진동공학회논문집, 제 15권, 제 1호, pp. 46~52.
- (9) 곽문규, 성관제, 2004, "섭동법을 이용한 부유탄성체의 동역학 해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 14권, 제 12호, pp. 1354~1359.