

Comparison of Parameter Estimation Methods in A Kappa Distribution¹⁾

Jeong-Soo Park²⁾ and Young-A Hwang³⁾

Abstract

This paper deals with the comparison of parameter estimation methods in a 3-parameter Kappa distribution which is sometimes used in flood frequency analysis. Method of moment estimation(MME), L-moment estimation(L-ME), and maximum likelihood estimation(MLE) are applied to estimate three parameters. The performance of these methods are compared by Monte-carlo simulations. Especially for computing MME and L-ME, three dimensional nonlinear equations are simplified to one dimensional equation which is calculated by the Newton-Raphson iteration under constraint. Based on the criterion of the mean squared error, L-ME (or MME) is recommended to use for small sample size($n \leq 100$) while MLE is good for large sample size.

Keywords : method of moment estimation, L-moment estimation, maximum likelihood estimation, equivariance, quantile estimation, simulation

1. 서론

강수량 자료에 사용되는 확률분포중의 하나인 카파분포는 Mielke(1973)와 Mielke와 Johnson(1973)에 의해서 2-모수, 3-모수 카파분포가 소개되었으며, Hosking(1994), Dupuis와 Winchester(2001), Singh과 Deng(2003)은 모수변환된(reparameterized) 4-모수 카파분포에 대해 연구하였다. 이러한 카파분포는 감마분포나 로그정규분포와 함께 오른쪽을 긴 꼬리를 갖고 양의 값을 갖는 확률분포로 강수량 자료를 적합시키거나 예측하는데 이용된다(Hosking과 Wallis, 1997, Park과 Jung, 2002, Mason등, 1999). 또한 카파분포는 감마분포와 로그정규분포에 비하여 분포함수와 백분위함수, 그리고 순서통계량의 분포들이 수리적으로 정확히 구해지고, 따라서 계산을 포함한 여러 가지 이점이 있다.

카파분포의 모수를 추정하는 방법으로는 적률추정법, L-적률추정법, 최우추정법에 대해서 시물

1) 이 논문은 2002년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음. 본 논문을 제1저자의 사랑하는 아내 고 기연옥에게 바친다.

2) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju, 500-757 Korea.
E-mail: jspark@chonnam.ac.kr

3) M.S. Department of Statistics, Chonnam National University.

레이션을 통하여 그 성능을 비교하였다. 적률추정법은 적용이 간단하여 많이 사용하는 방법 중의 하나이나 분포함수의 형태가 한쪽으로 많이 치우친 경우에는 안전한 추정치를 얻을 수 없고, 고차 적률로 갈수록 추정이 부정확해져 왜곡될 가능성이 있다. Hosking(1990)에 의해서 제안된 L-적률 추정법은 순서통계량들의 선형결합으로 이루어진 통계량을 이용하며 기존의 적률추정법에 비해 추정량이 덜 편이 되어 있고 자료의 이상치에 대해 보다 덜 민감하다는 특성이 있다. 최우추정법은 일반적으로 효율적인 추정치를 얻을 수 있고 표본의 크기가 충분히 큰 경우에는 최적추정량으로 다른 모수 추정 방법과의 효율성을 비교하는 기준으로 사용된다. 그러나 표본의 크기가 작은 경우에는 대체로 잘 일치하지 않는 결과를 얻을 수 있고 최우추정치를 구하기 위한 식이 비선형 방정식으로 표현되는 경우가 많아 적률추정법이나 L-적률추정법에 비해 모수의 추정치를 구하는데 계산상의 어려움이 따르기도 한다.

본 논문에서는 먼저 적률추정과 L-적률추정을 위해 필요한 3원 비선형 연립방정식을 일원 방정식으로 축소하는 계산법을 제시하였다. 그리고 시뮬레이션에 의한 성능비교의 결론으로는, 모수 및 백분위수의 추정에 있어서 표본이 100보다 작은 경우에는 L-적률추정법(또는 적률추정법)을, 표본이 100보다 큰 경우에는 최우추정법을 적용할 것을 추천한다.

2. 카파분포의 특성

3-모수 카파분포(Kappa distribution: KD3)는 Mielke와 Johnson(1973)에 의해 제안되었으며, 누적 확률분포함수 $F(x)$ 와 확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$F(x) = \left(\frac{x-\mu}{\beta} \right) \left[a + \left(\frac{x-\mu}{\beta} \right)^a \right]^{-1/a}, \quad (2.1)$$

$$f(x) = \left(\frac{a}{\beta} \right) \left(a + \left(\frac{x-\mu}{\beta} \right)^a \right)^{-\frac{(a+1)}{a}}, \quad a, \beta > 0, \mu \leq \min(x) \quad (2.2)$$

위 식에서 μ 는 위치모수, a 는 형상(shape)모수, β 는 척도(scale)모수이다. 위 식으로부터 백분위함수는

$$x(F) = \mu + \beta \left[\frac{aF^a}{1-F^a} \right]^{1/a}, \quad 0 < F < 1 \quad (2.3)$$

가 된다. 카파분포는 Mielke와 Johnson (1974)에 의해서 연구된 제2종의 일반화 베타분포의 특별한 경우이다. KD3를 포함한 카파분포는 Mielke(1973), Hosking(1994), 오은선(2001), Dupuis와 Winchester(2001)에 의해서 연구되었다. 실제로 Mason등(1999)에 의해서 집중호우의 변화에 대한 통계적검정에 관한 연구에 적용되었다.

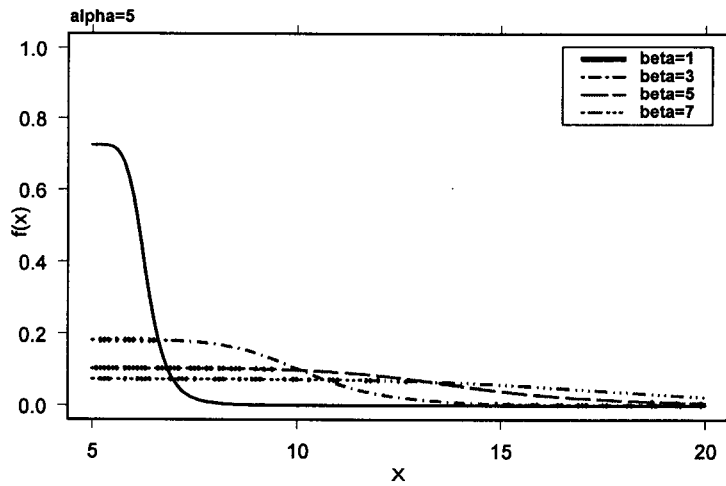
KD3 분포를 갖는 확률변수의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E(X) = \int_0^1 [x(F)]dF = \mu + \beta a^{-\frac{a-1}{a}} B\left(\frac{2}{a}, \frac{a-1}{a}\right), \quad a > 1$$

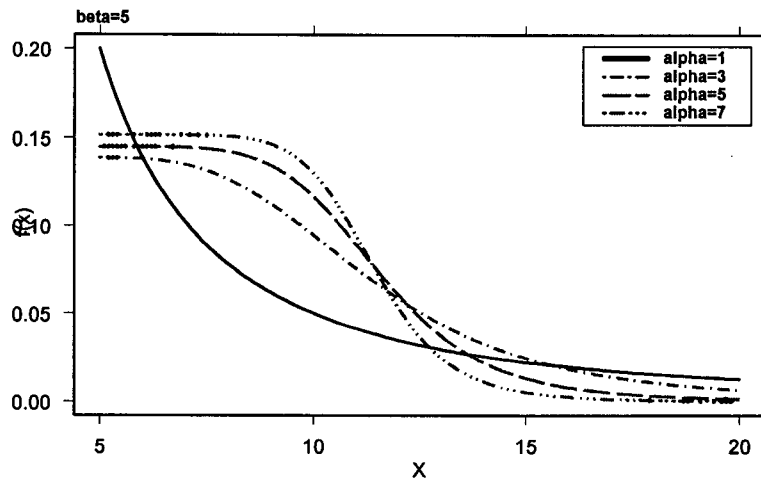
$$Var(X) = \beta^2(h_2(a) - h_1^2(a)),$$

여기서 $h_k(\alpha) = \alpha^{-\frac{\alpha-k}{\alpha}} B\left(\frac{k+1}{\alpha}, \frac{\alpha-k}{\alpha}\right)$, $\alpha > k$ 이다.

KD3의 분포형태는 α , β , μ 에 따라 달라지며 다음의 그림(2.1)과 그림(2.2)를 통해서 알 수 있다. 모양모수 α 가 커질수록 모양이 평평해지며, 규모모수 β 는 값이 커질수록 퍼지는 특성을 가진다. 또한 위치모수 μ 는 원점을 중심으로 μ 의 크기만큼 x 축을 이동한다.



<그림 2.1> 모수 α 를 5로 고정시키고 β 를 변화시켰을 때의 카파분포의 밀도함수



<그림 2.2> 모수 β 를 5로 고정시키고 α 를 변화시켰을 때의 카파분포의 밀도함수

3. 추정방법들과 추정량의 계산

3.1 적률추정법

카파분포에 대한 r 차 적률의 일반식은 다음과 같이 구한다. 여기서 $B(\cdot, \cdot)$ 는 베타함수이다.

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = \int_0^1 [x(F)]^r dF$$

$$E(X) = \int_0^1 [x(F)] dF = \mu + \beta \alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 1$$

$$E(X^2) = \mu^2 + 2\mu\beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \beta^2\alpha^{-\frac{\alpha-2}{\alpha}} B\left(\frac{3}{\alpha}, \frac{\alpha-2}{\alpha}\right), \quad \alpha > 2$$

$$E(X^3) = \mu^3 + 3\mu^2\beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + 3\mu\beta^2\alpha^{-\frac{\alpha-2}{\alpha}} B\left(\frac{3}{\alpha}, \frac{\alpha-2}{\alpha}\right) + \beta^3\alpha^{-\frac{\alpha-3}{\alpha}} B\left(\frac{4}{\alpha}, \frac{\alpha-3}{\alpha}\right), \quad \alpha > 3$$

$$E(X^r) = \int_0^1 [x(F)]^r dF = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^i \beta^{r-i} h_{r-i}(\alpha),$$

여기서, $h_k(\alpha) = \alpha^{-\frac{\alpha-k}{\alpha}} B\left(\frac{k+1}{\alpha}, \frac{\alpha-k}{\alpha}\right)$, $\alpha > k$, $h_0(\alpha) = 1$ 이다.

표본의 r 차 적률을 m_r 이라고 할 때, 적률추정법을 이용하여 KD3의 모수 μ, α, β 를 추정하기 위해서는 모집단의 적률과 표본의 적률을 같다고 놓고 3차 연립방정식을 풀 수 있다. 그렇지만 3원의 비선형 연립방정식의 해를 구하는 것보다 적절한 조작을 통하여 일원 방정식만의 해를 구함으로써 계산을 훨씬 간단히 할 수 있다. 이는 아래에서처럼 식(3.5)로부터 먼저 $\hat{\alpha}$ 을 구한 다음 구해진 $\hat{\alpha}$ 을 식(3.3)에 대입하여 $\hat{\beta}$ 을 구하고 다시 식(3.1)에 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 을 대입하여 $\hat{\mu}$ 을 구하는 방법이다.

$$m_1 = \mu + \beta h_1(\alpha)$$

$$\therefore \hat{\mu} = m_1 - \hat{\beta} h_1(\hat{\alpha}) \quad (3.1)$$

$$m_2 = (\mu + \beta h_1(\alpha))^2 - \beta^2 h_1^2(\alpha) + \beta^2 h_2(\alpha)$$

$$m_2 - m_1^2 = \beta^2 (h_2(\alpha) - h_1^2(\alpha)), \quad (3.2)$$

$$\therefore \hat{\beta} = \left(\frac{m_2 - m_1^2}{h_2(\hat{\alpha}) - h_1^2(\hat{\alpha})} \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$m_3 - m_1^3 - 3m_1(m_2 - m_1^2) = \beta^3(2h_1^3(\alpha) - 3h_1(\alpha)h_2(\alpha) + h_3(\alpha)) \quad (3.4)$$

여기서, β 를 소거하기 위하여 식(3.2)의 양변을 $3/2$ 승하여 식(3.4)로 나눈다.

$$\frac{(m_2 - m_1^2)^{3/2}}{m_3 - m_1^3 - 3m_1(m_2 - m_1^2)} = \frac{\beta^3 (h_2(\alpha) - h_1^2(\alpha))^{3/2}}{\beta^3(2h_1^3(\alpha) - 3h_1(\alpha)h_2(\alpha) + h_3(\alpha))} \stackrel{\text{def}}{=} g(\alpha)$$

$$\therefore g(\alpha) - f(m) = 0, \quad \alpha > 3 \quad (3.5)$$

여기서 $f(m) = \frac{(m_2 - m_1^2)^{3/2}}{m_3 - m_1^3 - 3m_1(m_2 - m_1^2)}$ 이다.

식(3.5)은 수학적으로는 그 해를 찾기가 어려우므로 Newton-Raphson (N-R) 반복을 통해 찾는다. 이 방법을 쓰기 위해서는 일차 미분치가 필요한데 이를 위해서는 베타함수의 미분과 디감마(digamma)함수를 이용한다. 디감마함수 $\Psi(x)$ 는 로그감마함수의 미분으로써

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

이다. 베타함수의 미분은

$$\frac{d}{dx} \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1+x_2)} = [\Psi(x_1) + \Psi(x_2) - \Psi(x_1+x_2)] B(x_1, x_2)$$

이 된다. α 는 모수 표현식에 포함된 베타함수 때문에 $\alpha > 3$ 라는 제약조건을 가지게 되므로 Press등(1992)에 소개된 제약조건 하에서의 1차원 Newton-Raphson 방법을 수정하여 이용한다.

3.2 L-적률추정법

L-적률은 적률의 성질을 개선시킨 Greenwood등(1979)의 확률가중적률 (Probability Weighted Moments; PWM)의 특별한 경우로서 순서통계량들의 선형결합으로 이루어진 통계량이다. L-적률을 이용하면 한쪽으로 매우 치우친 분포에서 적은 표본으로도 모수를 적률추정보다 더 효율적으로 추정할 수 있으며, 특히 이상치에 덜 민감하다고 알려졌다 (Hosking, 1990).

X 가 누적분포함수 $F(x)$ 와 백분위 함수 $x(F)$ 를 갖는 확률변수라 할 때, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ 를 X 의 분포로 나온 크기 n 의 순서통계량이라 하자. 이제 $E(X_{j:r})$ 을 r 개 확률변수 중 j 번째 확률변수의 기대값이라 할 때, r 차 L-적률(λ_r)은 다음과 같이 정의된다 (Hosking, 1990).

$$E(X_{j:r}) = \frac{r!}{(j-1)!(r-j)!} \int x \{F(x)\}^{j-1} \{1-F(x)\}^{r-j} dF(x)$$

$$\lambda_r \stackrel{\text{def}}{=} r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} EX_{r-k:r}, \quad r=1,2, \tag{3.6}$$

$$\lambda_1 = EX = \int_0^1 x(F) dF,$$

$$\lambda_2 = E(X_{2:2} - X_{1:2})/2 = \int_0^1 x(F)(2F-1) dF,$$

$$\lambda_3 = E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3})/3 = \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) dF,$$

$$\tau_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, \quad r=3,4,\dots. \tag{3.7}$$

L-적률의 의미를 살펴보면 확률표본을 크기 순으로 나열하여 이항 계수로 가중치를 주고 순서 통계량의 기대값의 평균을 구한 것이다. 이러한 형태의 L-적률은 적률과 비슷하고 식(3.7)로 표현되는 L-적률비(L-moments ratios)도 적률비와 비슷하다. 그러나 이상치들의 측정 오차들이나 표본의 변동에 적률보다 덜 민감하다는 장점이 있다. 특별히 λ_1 은 평균으로서 L-위치, λ_2 는 산포의 측정량으로서 L-규모, τ_2 는 L-변이계수(L-CV), τ_3 는 L-왜도, τ_4 는 L-첨도이라고 부른다 (Hosking, 1990). 그리고, 모집단의 L-적률 λ_r 의 불편추정량으로서 표본 L-적률(l_r)은 자료로부터 다음과 같이 계산된다.

$$l_1 = n^{-1} \sum x_i,$$

$$l_2 = 1/2 \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i>j} (x_{i:n} - x_{j:n}),$$

$$l_3 = 1/3 \binom{n}{3}^{-1} \sum_{i>j>k} (x_{i:n} - 2x_{j:n} + x_{k:n}),$$

$$l_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} x_{i_{r-k}:n}, \quad r=1,2,\dots,n.$$

$$t_2 = l_2/l_1, \quad t_r = l_r/l_2, \quad r=3,4,\dots$$

여기서 t_r 는 r 번째 표본의 L-적률비이고, t_3 은 표본의 L-왜도, t_4 는 표본의 L-첨도라고 부른다. 이제 우리의 관심인 카파분포의 모집단의 L-적률과 L-적률비를 구해보면 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_1 = \mu + \beta \alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mu + \beta k_1(\alpha) \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= 2\beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{3}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) - \beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \beta[2k_2(\alpha) - k_1(\alpha)] \\
\lambda_3 &= 6\beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{4}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) - 6\beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{3}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \\
&+ \beta\alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \beta[6k_3(\alpha) - 6k_2(\alpha) + k_1(\alpha)] \\
\tau_2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta[2k_2(\alpha) - k_1(\alpha)]}{\mu + \beta k_1(\alpha)} \\
\tau_3 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{6k_3(\alpha) - 6k_2(\alpha) + k_1(\alpha)}{2k_2(\alpha) - k_1(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} g_L(\alpha) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

일반적으로 $\lambda_{r+1} = \beta \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^{r-j} (r+j)!}{(j!)^2 (r-j)!} k_{j+1}(\alpha)$, $r=0, 1, \dots$,

여기서 $k_j(\alpha) = \alpha^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} B\left(\frac{j+1}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$ 이다.

이제 카파분포의 L-적률추정량은 모집단의 L-적률 표현식들을 표본의 L-적률들과 함께 놓고 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ 을 구한다. 여기서도 적률추정법에서와 마찬가지로 3원의 비선형 연립방정식의 해를 구하는 것보다 적절한 조작을 통하여 일원 방정식만의 해를 구함으로써 계산을 훨씬 간단히 할 수 있다. 이는 아래에서처럼 일차원 N-R 법에 의해 식(3.10)을 만족하는 $\hat{\alpha}$ 을 구한 다음, 이를 식(3.11)에 대입하여 $\hat{\beta}$ 을 구한다. 그리고 구해진 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ 을 식(3.12)에 대입하여 $\hat{\mu}$ 을 구한다.

$$g_L(\alpha) - t_3 = 0, \quad \alpha > 1 \tag{3.10}$$

$$l_2 = \beta[2k_2(\alpha) - k_1(\alpha)], \quad \hat{\beta} = \frac{l_2}{2k_2(\hat{\alpha}) - k_1(\hat{\alpha})} \tag{3.11}$$

$$l_1 = \mu + \beta k_1(\alpha), \quad \hat{\mu} = l_1 - \hat{\beta} k_1(\hat{\alpha}). \tag{3.12}$$

N-R 과정에서 필요한 베타함수의 미분을 위하여 앞 절에 정의된 디감마함수를 이용한다. 표본 L-적률의 계산 과정에서 Hosking(2000)의 LMOMENTS 포트란 서브루틴을 사용하였다.

3.3 최우추정법

카파분포의 음로그 우도함수 $-\ln L(\alpha, \beta, \mu; \mathbf{x})$ 는 다음과 같다.

$$-\ln L(\alpha, \beta, \mu; \mathbf{x}) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \ln \left[\alpha + \left(\frac{x_i - \mu}{\beta} \right)^\alpha \right] - n \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (3.13)$$

식(3.13)을 최소화시키는 해를 수학적으로 얻기 어려우므로 수치적 반복기법인 Quasi-Newton 방법을 이용하여 찾아낸다. Mielke와 Johnson(1973)은 이 과정에서 필요한 1차미분 벡터와 2차미분(헤시안) 행렬을 제시했고 몇가지의 우도비검정에 대해 논의한 뒤, 인공강우 실험자료에 적용하였다.

일반적으로 대표본의 경우 최우추정량의 분산이 가장 작으므로 최우추정치가 다른 추정치와의 효율성을 비교하는 기준으로 사용된다. 이 경우 소표본에 있어서의 각 추정량의 성능비교를 위해 시물레이션이 사용된다. 그러나 본 논문에서는 최우추정치의 정상성조건(regularity condition)이 만족되지 않아 ($\mu \leq \min(x)$ 라는 제약 때문) 이론상으로 표본의 크기가 큰 경우에도 최우추정치의 성능이 가장 좋다고 말하기 어렵다. 따라서 본 논문에서는 소표본의 경우뿐만 아니라 대표본의 경우에도 시물레이션을 통하여 각 추정법의 성능을 비교하였다.

4. 시물레이션

카과분포의 모수 β 는 척도-동변동(scale-equivariant) 이고 μ 는 위치-동변동(location-equivariant)이다. 따라서 $b\beta$ 를 추정하고자 한다면 $\beta=1$ 으로 놓고 추정하여 그 추정치에 b 를 곱하고, $a+\mu$ 를 추정하고자 한다면 $\mu=0$ 으로 놓고 추정하여 그 추정치에 a 만큼을 더해서 추정할 수 있다(Lehmann(1983), 제3장). 이 성질은 적률추정법, L-적률추정법, 최우추정법에 모두 만족되며 아래 시물레이션에서 유용하게 활용된다.

시물레이션의 설정은 다음과 같다.

- 1) 반복계산 횟수: 1000번
- 2) 표본의 크기: 20,30,40,50,75,100,200,300,500
- 3) 모수설정
 - α : 3.5, 4, 5, 6, 7, 10, 15
 - β : 척도-동변동이므로 모두 1로 설정
 - μ : 위치-동변동이므로 모두 0로 설정
- 4) 백분위수(quantile) 추정 : .9, .95, .99

모수 추정 방법의 성능을 비교하기 위해서 반복 계산하여 구해진 추정치들에 대해 평균편의(mean bias), 분산, 평균제곱오차(MSE)를 계산하여 평가기준으로 삼았다. 그 결과의 요약이 표4.1과 표4.2에 주어졌다. 표에서 언급되지 않은 표본의 크기에서는 MLE가 가장 좋았다. MSE 값을 포함한 시물레이션의 구체적인 결과 및 세가지 추정법을 위한 컴퓨터 프로그램은 황영아(2003)에서 찾아 볼 수 있다.

<표4.1> 시뮬레이션 결과요약 (모수추정의 MSE 기준), $\beta = 1$, $\mu = 0$.

α	α 추정	β 추정	μ 추정
3.5	n=40,50,75 : LME	MLE	MLE
4.0	n=40,50,75 : LME	n=40 : LME	MLE
5.0	n=40 : MME n=50,75,100 : LME	MLE	MLE
6.0	n=100 : MME	n=20,30,40,50 : MME	MLE
7.0	n=20,75 : LME	n=20,30,40,50,75,100 : MME	MLE
10.0	n=20,50,100 : MME	n=20,30,40,50 : MME	MLE
15.0	n=50,100 : MME	n=20,30,40,50 : MME	MLE

<표4.2> 시뮬레이션 결과요약 (백분위수추정의 MSE 기준), $\beta = 1$, $\mu = 0$.

α	90 백분위수 추정	95 백분위수 추정	99 백분위수 추정
3.5	n=20~50: LME	n=20~100: LME	n=20~50: MME n=75,100: LME
5.0	n=20,30: LME	n=20~75: LME	n=20~75: MME n=100,200: LME
7.0	n=20: MME	n=20~50: MME	n=20~100: MME n=200,300: LME
10.0	n=20: MME=LME	n=20~40: MME	n=20~100: MME n=200,300: LME
15.0	n=20: LME	n=20: MME=LME	n=20~100: MME

5. 결론

본 논문에서 다룬 카파분포는 오른쪽으로 긴 꼬리를 갖는 한쪽으로 치우친 분포로 강수량 예측에 사용된다. 이 분포의 모수추정을 위한 적률추정법, L-적률추정법, 최우추정법의 성능을 비교해 보았다.

모수 α , β , μ 의 추정에 있어서는 표본이 100보다 작은 경우에는 L-적률추정법(또는 적률추정법)을, 표본이 100보다 큰 경우에는 최우추정법을 적용할 것을 추천한다. 또한 KD3의 백분위수 추정을 위해서는 α 가 작고 표본의 크기가 100(또는 200)보다 작으면 L-적률추정법을, 표본의 크기가 100(또는 200)이상이면 최우추정법을 적용할 것을 추천한다.

참고문헌

- [1] 오은선(2001), Kappa 분포의 모수추정과 강수 자료에의 적용, 전남대학교 통계학과 석사학위논문.

- [2] 황영아(2003), 3모수 카파분포의 모수추정 방법들의 비교, 전남대학교 통계학과 석사학위 논문.
- [3] Dupuis D.J. and Winchester, C.(2001), More on the four-parameter Kappa Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **71**, 91-113.
- [4] Greenwood J.A., Landwehr P.W., Matalas N.C., and Wallis J.R.(1979), Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressed in inverse form, *Water Resources Research*, **15**, 1049-1064.
- [5] Hosking J.R.M.(1990), L-Moments: Analysis and Estimation of Distributions using Linear Combinations of Order Statistics, *Jour. Royal Stat. Soc.*, **B**, **52**, 105-124.
- [6] Hosking, J.R.M.(1994), The four parameter Kappa distribution, *IBM Journal of Research & Development*, **38**, 251-258.
- [7] Hosking, J.R.M.(2000). LMOMENTS: Fortran routines for use with the method of L-moments, Version 3.03, available at <http://www.research.ibm.com/people/h/hosking/lmoments.html>.
- [8] Hosking, J.R.M., and Wallis, J.R.(1997). *Regional Frequency Analysis: An Approach based on L-moments*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] Lehmann, E.L.(1983), *Theory of Point Estimation*, John Wiley and Sons, New York.
- [10] Mason, S.J., Waylen, P.R., Mimmack, G.M. et.al.(1999), Changes in extreme rainfall events in South Africa, *Climatic Change*, **41**, 249-257.
- [11] Mielke, P.W.(1973), Another Family of Distributions for Describing and Analyzing Precipitation Data, *Journal of Applied Meteorology* **12**, 275-280, 1973.
- [12] Mielke, P.W. and Johnson, E.S.(1973), Three-Parameter Kappa Distribution Maximum Likelihood Estimates and Likelihood Ratio Tests, *Monthly Weather Review*, **101**, 701-707.
- [13] Mielke, P.W. and Johnson E.S.(1974), Some generalized Beta distributions of the second kind having desirable application features in hydrology and meteorology, *Water Resource Research*, **10**, 223-226.
- [14] Park, J.S. and Jung, H.S.(2001), Modelling Korean extreme rainfall using a Kappa distribution and maximum likelihood estimates, *Theoretical and Applied Climatology*, **72**, 55-64.
- [15] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.(1992), *Numerical Recipes in Fortran 77*, Second Edition, Cambridge University Press.
- [16] Singh, V.P. and Deng, Z.Q.(2003), Entropy-based parameter estimation for Kappa distribution, *Journal of Hydrologic Engineering*, **8**, 81-92.