

< 논문 >

탄성 대변형 다물체동역학을 위한 슬라이딩조인트 개발

서종휘* · 정일호** · 박태원† · 수기야마*** · 사바나***
(2005년 4월 1일 접수, 2005년 7월 5일 심사완료)

The Development of a Sliding Joint for Very Flexible Multibody Dynamics

Jong-Hwi Seo, Il-Ho Jung, Tae-Won Park, Hiroyuki Sugiyama and Ahmed A. Shabana

Key Words : Absolute Nodal Coordinates(절대절점좌표), Very Flexible Multibody Dynamics(탄성 대변형 다물체동역학), Sliding Joint(슬라이딩조인트), Flexible Cable(유연 케이블), Elastic Large Deformation(탄성 대변형)

Abstract

In this paper, a formulation for a spatial sliding joint, which a general multibody can move along a very flexible cable, is derived using absolute nodal coordinates and non-generalized coordinate. The large deformable motion of a spatial cable is presented using absolute nodal coordinate formulation, which is based on the finite element procedures and the general continuum mechanics theory to represent the elastic forces. And the non-generalized coordinate, which is neither related to the inertia forces nor external forces, is used to describe an arbitrary position along the centerline of a very flexible cable. In the constraint equation for the sliding joint, since three constraint equations are imposed and one non-generalized coordinate is introduced, one constraint equation is systematically eliminated. Therefore, there are two independent Lagrange multipliers in the final system equations of motion associated with the sliding joint. The development of this sliding joint is important to analyze many mechanical systems such as pulley systems and pantograph/catenary systems for high speed-trains.

1. 서론

케이블 카, 풀리(pulley) 시스템 그리고 고속전철의 가선계(catenary cable) 등 다양한 기계분야에서 케이블이나 로프, 와이어와 같은 매우 유연한 기계요소가 사용되고 있는데 이러한 대변형 탄성체 부품의 동적 특성은 기계시스템의 안정성과 동적 거동을 좌우하는 중요한 요인이 될 수 있다.

따라서 이러한 매우 유연한 기계요소 특히, 비선형 연속체의 빔 요소를 포함하는 다물체시스템의 일반적인 동역학 해석을 위해서는 빔 요소와 다물체의 연속적인 동적 상호작용과 연성된 거동

을 모델링 하기 위한 슬라이딩조인트가 필요하게 된다. 그러나 기존의 다물체동역학 방법에서는 케이블과 같은 대변형 연속체의 빔 요소에 대한 동적 특성을 고려하는 것 자체가 매우 어려웠으며 더군다나 다물체시스템과 대변형 빔 요소의 연성된 상호거동을 동시에 해석할 수 있는 연구는 더욱 미진한 실정이다. 그 이유로는, 케이블과 같이 매우 유연한 빔 요소 자체의 특성만을 구현하고자 한다면 지배방정식을 유도하거나⁽¹⁻³⁾ 대변형 해석이 가능한 상용 유한요소해석프로그램을 사용할 수 있겠지만, 다물체시스템과 함께 연성 될 경우의 동역학 해석은 매우 복잡해지기 때문이다.

그 동안 다물체동역학에서 유연한 빔 요소와 기계시스템과의 연성된 거동을 해석하기 위한 주요 연구들을 살펴보면 먼저, Hwang 등⁽⁴⁾은 모드좌표를 이용하여 기계시스템이 유연한 탄성체를 이동할 수 있는 슬라이딩조인트에 대한 구속식을 유도하였는데, 이는 슬라이딩조인트에 의해 연결된 두 물체의 상대적인 운동에 의하여 경계조건이 계속

* 삼성전자 메카트로닉스 연구소
** 아주대학교 대학원 기계공학과
† 책임저자, 회원, 아주대학교 기계공학부
E-mail : park@ajou.ac.kr
TEL : (031)219-2524 FAX : (031)219-1965
*** University of Illinois at Chicago, U.S.A

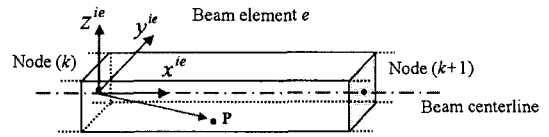
변하기 때문에 시간에 종속적인 변형모드만을 이용해서는 슬라이딩조인트의 정확한 특성을 구현하기 어려우며, 더욱이 물체의 선형 탄성변형을 가정하기 때문에 케이블과 같은 대변형 연속체의 동역학 문제에 적용되기는 어렵다. Sugiyama 등⁽⁵⁾은 연속체이론을 이용하여 질량이 케이블을 따라 이동할 수 있는 슬라이딩조인트에 대한 구속식을 제안하였다. 그러나 이 방법은 케이블 전체를 하나의 빔 요소로 가정하기 때문에 케이블이 둘 이상의 빔 요소(유한요소)로 모델링 경우에는 노드점에서의 불연속성으로 슬라이딩조인트가 정의되기 어렵다. Seo 등⁽⁶⁾은 절대절점좌표(absolute nodal coordinates)와 연속체이론을 이용하여 다물체시스템이 유연한 케이블을 따라 이동할 수 있는 슬라이딩조인트를 제안하였으나 이는 2 차원 문제에 국한된다. 이 외에도 케이블을 포함하여 벨트, 체인과 같이 매우 유연한 기계요소를 집중질량으로 고려하여 다물체시스템과의 연성된 거동의 해석을 시도하고 있으나⁽⁷⁻⁹⁾ 많은 수의 집중질량을 사용해야 하며, 또한 연속체의 특성을 구현할 수 없는 한계를 갖는다.

본 연구에서는 절대절점좌표를 이용하여 케이블과 같이 매우 유연한 빔 요소를 따라 기계시스템이 이동할 때, 기계시스템과 빔 요소의 연속적인 동적 상호작용을 모델링 할 수 있는 일반적인 다물체동역학 해석목적의 3 차원 슬라이딩조인트를 개발하였다. 케이블의 비선형적인 대변형 특성은 절대절점좌표를 이용하여 구현하고 기계시스템은 강체좌표, 모드좌표, 절대절점좌표를 혼용하여 강체, 탄성체, 대변형 탄성체로 고려된다. 또한 슬라이딩조인트의 효율적인 구속운동방정식을 유도하기 위해서 질량과 외력에 관계없는 비일반좌표(non-generalized coordinate)를 도입한다.

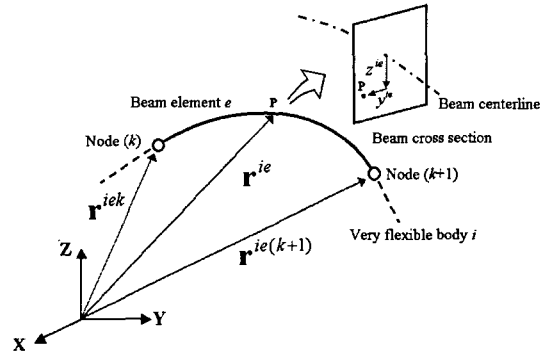
본 연구에서 제안하는 슬라이딩조인트는 매우 유연한 빔 요소를 포함하는 다양한 기계시스템의 다물체동역학 해석에 적용이 될 수 있을 것이다.

2. 절대절점좌표를 이용한 운동방정식

최근, Shabana 등은 연속체 이론과 유한요소법에서 사용하는 절대절점좌표를 이용하여 케이블이나 와이어와 같이 매우 유연한 탄성체의 비선형 대변형 현상을 고려할 수 있는 방법을 제안하였는데,^(10,11) 부품의 탄성 대변형 현상을 매우 신뢰성 있게 구현할 수 있다는 것이 실제 시험으로도 검증이 되고 있다.⁽¹²⁾ 본 장에서는 절대절점좌표를 이용한 다물체시스템의 운동방정식에 대해 설명한다.



(a) Local element coordinates of a beam element



(b) Deformation of a beam

Fig. 1 Beam element in the absolute nodal coordinate formulation

2.1 변위관계식

Fig. 1 에서는 매우 유연한 탄성체 i 를 구성하는 빔 요소 e 의 임의의 위치에 대한 전역변위벡터(global position vector)를 나타내고 있다.

빔 요소는 두 개의 노드로 구성이 되며, 각각의 노드는 절점에서의 전역변위와 기울기(slope)를 나타내는 절대절점좌표로 구성이 되며 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$e^{ie} = \begin{bmatrix} e^{ielT} & e^{ie2T} \end{bmatrix}^T$$

$$e^{iek} = \begin{bmatrix} r^{iekT} \left(\frac{\partial r^{iek}}{\partial x^{ie}} \right)^T \left(\frac{\partial r^{iek}}{\partial y^{ie}} \right)^T \left(\frac{\partial r^{iek}}{\partial z^{ie}} \right)^T \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

여기서 r^{iek} 은 노드 k 의 위치를 나타내는 전역변위벡터이고 $\frac{\partial r^{iek}}{\partial x^{ie}}$, $\frac{\partial r^{iek}}{\partial y^{ie}}$ 과 $\frac{\partial r^{iek}}{\partial z^{ie}}$ 은 노드 k 에서의 기울기를 정의하는 전역변위벡터구배(global position vector gradients)이므로 각각의 노드는 12개의 독립좌표로 구성이 된다. 따라서 빔 요소의 대변형 거동을 정의하기 위해서는 24개의 일반좌표가 필요하며, 빔 요소는 축선(centerline)이 아니라 체적을 갖는 3 차원의 솔리드(solid)이므로 회전관성(rotary inertia)효과나 비틀림(torsion)이 고려된다. (참고로 절대절점좌표를 이용한 판 요소(plate)의

경우 4 개의 절대절점좌표로 구성되며 48 개의 일반좌표로 그 대변형 거동을 정의할 수 있다.⁽¹³⁾

빔 요소내의 임의의 위치에 대한 전역변위벡터는 빔 요소의 형상함수와 절대절점좌표를 이용하여 식 (2)와 같이 계산될 수 있다.

$$\mathbf{r}^{ie} = \mathbf{S}^{ie}(x^{ie}, y^{ie}, z^{ie}) \mathbf{e}^{ie}(t) \quad (2)$$

여기서 \mathbf{S}^{ie} 는 빔 요소의 강체모드(rigid body mode)까지 표현이 가능한 전역형상함수(global shape function)이다.

2.2 질량행렬 및 탄성력

3 차원 빔 요소 e 의 운동에너지를 식 (2)를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} T^{ie} &= \frac{1}{2} \int_{V^{ie}} \rho^{ie} \dot{\mathbf{r}}^{ie T} \dot{\mathbf{r}}^{ie} dV^{ie} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{ie T} \left(\int_{V^{ie}} \rho^{ie} \mathbf{S}^{ie T} \mathbf{S}^{ie} dV^{ie} \right) \dot{\mathbf{e}}^{ie} \quad (3) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{ie T} \mathbf{M}^{ie} \dot{\mathbf{e}}^{ie} \end{aligned}$$

여기서 ρ^{ie} 와 V^{ie} 는 빔 요소의 밀도와 체적을 의미하며 질량 \mathbf{M}^{ie} 은 식 (4)와 같이 계산될 수 있다.

$$\mathbf{M}^{ie} = \int_{V^{ie}} \rho^{ie} \mathbf{S}^{ie T} \mathbf{S}^{ie} dV^{ie} \quad (4)$$

질량행렬은 형상함수 \mathbf{S}^{ie} 에 의해서만 정의되기 때문에 시간에 대해서 항상 일정한 특징을 가지며 시스템에서 결정되면 한번만 계산을 하면 된다.

절대절점좌표를 이용한 3 차원 빔 요소의 탄성력은 연속체 이론(continuum mechanics theory)을 이용하여 계산이 가능하다.^(14,15) 먼저 빔 요소 e 의 변위벡터구배는 식 (5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{D}^{ie} = \frac{\partial \mathbf{r}^{ie}}{\partial \mathbf{X}^{ie}} = \frac{\partial \mathbf{r}^{ie}}{\partial \mathbf{x}^{ie}} \left(\frac{\partial \mathbf{X}^{ie}}{\partial \mathbf{x}^{ie}} \right)^{-1} = \frac{\partial (\mathbf{S}^{ie} \mathbf{e}^{ie})}{\partial \mathbf{x}^{ie}} \left(\frac{\partial (\mathbf{S}^{ie} \mathbf{e}_0^{ie})}{\partial \mathbf{x}^{ie}} \right)^{-1} \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{X}^{ie} = \mathbf{X}^{ie}(X^{ie}, Y^{ie}, Z^{ie})$ 은 빔 요소의 초기형상에서 임의의 위치에 대한 전역변위벡터이고

$\mathbf{x}^{ie} = \mathbf{x}^{ie}(x^{ie}, y^{ie}, z^{ie})$ 은 빔 요소의 기준좌표계로부터 정의되는 국부변위벡터이다. 그리고 \mathbf{e}_0^{ie} 는 빔 요소의 초기형상에 대한 절대절점좌표이다. 빔 요소의 라그랑지 변형텐서(Lagrangian strain tensor)는 식 (5)를 이용하여 식 (6)과 같이 쓸 수 있다.⁽¹⁶⁾

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{ie} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{D}^{ie T} \mathbf{D}^{ie} - \mathbf{I} \right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{ie} & \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{ie} & \boldsymbol{\varepsilon}_{13}^{ie} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{21}^{ie} & \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{ie} & \boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{ie} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{31}^{ie} & \boldsymbol{\varepsilon}_{32}^{ie} & \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{ie} \end{bmatrix} \quad (6)$$

빔 요소 e 의 전체 탄성변형에너지를 식 (6)을 이용하여 식 (7)로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U^{ie} &= \frac{1}{2} \int_{V^{ie}} \boldsymbol{\varepsilon}^{ie T} \mathbf{E}^{ie} \boldsymbol{\varepsilon}^{ie} dV^{ie} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^{ie T} \mathbf{K}_a^{ie} \mathbf{e}^{ie} \quad (7) \end{aligned}$$

여기서 \mathbf{K}_a^{ie} 는 3 차원 빔 요소의 강성행렬(stiffness matrix)로서 절대절점좌표에 의한 비선형함수로 표현된다. 탄성력 벡터는 식 (7)의 탄성변형에너지를 절대절점좌표에 대한 일반좌표로 편미분해서 다음과 같이 구할 수 있다.^(14,15)

$$\mathbf{Q}_k^{ie} = - \left(\frac{\partial U^{ie}}{\partial \mathbf{e}^{ie}} \right)^T \quad (8)$$

2.3 탄성 대변형 다물체시스템의 운동방정식

절대절점좌표를 이용한 대변형 탄성체 i 의 운동방정식은 유한요소들에 대한 일반적인 조합방법인 직접강성법(direct stiffness method)⁽¹⁷⁾나 QR 행렬분해법⁽¹⁸⁾을 이용하여 유한요소들의 관계를 연성시킨 후 식 (9)와 같이 탄성체 i 에 대한 운동방정식으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{e}}^i + \Phi_e^{i T} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e^i + \mathbf{Q}_k^i + \mathbf{Q}_d^i \quad (9)$$

여기서 \mathbf{M}^i 는 탄성체 i 의 질량행렬이다. \mathbf{Q}_k^i 는 탄성력 벡터이고, \mathbf{Q}_e^i 는 중력과 스프링-댐퍼 등에 의한 일반외력벡터, \mathbf{Q}_d^i 는 탄성체의 구조적 댐핑(structural damping) 특성에 의한 감쇠력벡터이다.

λ 는 라그랑지 승수벡터이고 Φ 는 구속식을 의미하며 Φ_e 는 이에 대한 자코비안 행렬이다. 구속식 Φ 의 2 차 미분은 식 (10)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \Phi(e^i, t) &= 0 \\ \Phi_e \ddot{e}^i &= -(\Phi_e \dot{e}^i) \dot{e}^i - 2\Phi_{e\dot{e}} \dot{e}^i - \Phi_{tt} = \gamma \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 식 (9)와 식 (10)을 조합하여 탄성 대변형 범요소를 포함하는 다물체시스템의 운동방정식을 식 (11)과 같이 조합된 행렬형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \Phi_e^T \\ \Phi_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{e}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서 \mathbf{M}_a 는 절대절점좌표를 이용한 다물체시스템의 질량행렬이고, $\mathbf{Q}_a = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_k + \mathbf{Q}_d$ 이다. 그리고 강체와 탄성체, 대변형 탄성체를 동시에 포함하는 일반적인 다물체시스템의 동역학 해석을 위한 조합운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{0} & \Phi_{q_r}^T \\ \mathbf{M}_{fr} & \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{0} & \Phi_{q_f}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_a & \Phi_e^T \\ \Phi_{q_r} & \Phi_{q_f} & \Phi_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \ddot{\mathbf{e}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{Q}_f \\ \mathbf{Q}_a \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 하첨자 r, f 그리고 a 는 각각 강체좌표, 모드좌표, 절대절점좌표를 의미한다.

3. 조인트좌표계

절대절점좌표의 세 기울기 벡터 $\frac{\partial \mathbf{r}^{iek}}{\partial x^{ie}}, \frac{\partial \mathbf{r}^{iek}}{\partial y^{ie}}$ 과 $\frac{\partial \mathbf{r}^{iek}}{\partial z^{ie}}$ 은 각각 서로 직교하지 않지만 이 기울기 벡터들의 조합으로 빔 요소내의 임의의 위치에 항상 직교하는 세 개의 단위벡터들을 생성할 수 있다.^(14,15) 이 세 개의 직교하는 단위벡터로 구성되는 좌표계를 조인트좌표계라 부르며 단위벡터의 생성방식에 따라 전단좌표계(cross-section frame)와 접선좌표계(tangent frame)로 구분할 수 있고, 빔 요소의 전단면을 표현하거나^(14,15) 또는 조인트의 기구학적 구속식을 정의하는데 사용된다.⁽⁵⁾ 본

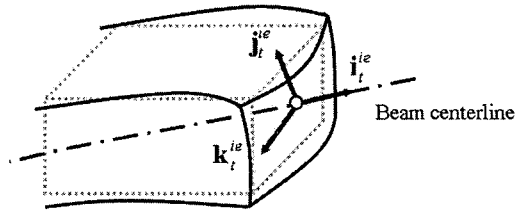


Fig. 2 Tangent frame

연구에서 개발하는 슬라이딩조인트는 접선좌표계를 이용하여 그 운동방정식을 유도하게 된다. Fig. 2 에서는 접선좌표계에 대한 개념을 보여주고 있다.

접선좌표계의 정의를 위해 필요한 세 단위벡터의 계산과정은 다음과 같다. 먼저 빔의 축선에 대한 접선벡터 \mathbf{i}_t^{ie} 는 식 (13)과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{i}_t^{ie} = \frac{d\mathbf{r}^{ie}}{ds} \quad (13)$$

여기서 ds 는 축선의 호-길이(arc-length) 방향에 대한 미소변위이며 식 (14)와 같이 Euclidian Norm 을 이용하여 계산될 수 있다.

$$ds = \sqrt{\mathbf{r}_x^{ieT} \mathbf{r}_x^{ie}} dx \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{r}_x^{ie} = \frac{d\mathbf{r}^{ie}}{dx}$ 이다. 식 (14)를 이용하여 식 (13) 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{i}_t^{ie} = \frac{\mathbf{r}_x^{ie}}{|\mathbf{r}_x^{ie}|} = \frac{\mathbf{r}_x^{ie}}{\sqrt{\mathbf{r}_x^{ieT} \mathbf{r}_x^{ie}}} = \hat{\mathbf{r}}_x^{ie} \quad (15)$$

여기서 $\hat{\mathbf{r}}_x^{ie}$ 는 \mathbf{r}_x^{ie} 에 대한 단위벡터를 의미한다. 그리고 벡터 \mathbf{i}_t^{ie} 와 $\frac{\partial \mathbf{r}^{ie}}{\partial y^{ie}}$ 에 동시에 수직하는 단위 벡터 \mathbf{k}_t^{ie} 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{k}_t^{ie} = \mathbf{i}_t^{ie} \times \frac{\mathbf{r}_y^{ie}}{|\mathbf{r}_y^{ie}|} = \mathbf{i}_t^{ie} \times \hat{\mathbf{r}}_y^{ie} \quad (16)$$

여기서 $\hat{\mathbf{r}}_y^{ie}$ 는 \mathbf{r}_y^{ie} 에 대한 단위벡터이다. 따라서 식 (15)과 (16)의 단위벡터에 대한 의적을

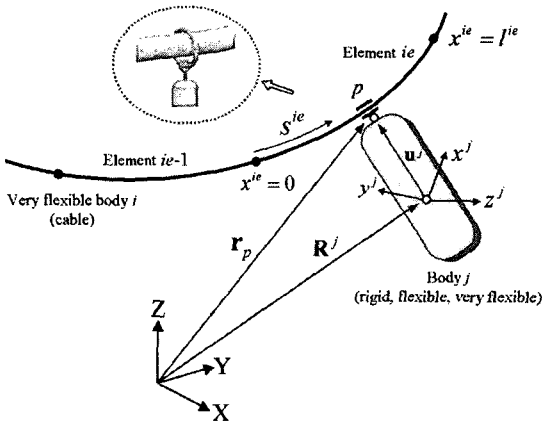


Fig. 3 Spherical-type sliding joint

이용하여 두 벡터에 동시에 수직한 벡터 \mathbf{j}_t^{ie} 를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{j}_t^{ie} = \mathbf{k}_t^{ie} \times \mathbf{i}_t^{ie} \quad (17)$$

접선좌표계에서 서로 직교하는 세 개의 단위벡터는 관성좌표계(global coordinate system)에 대한 접선좌표계의 회전변환관계를 나타내게 되며 다음과 같이 회전변환행렬로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}_t^{ie} = [\mathbf{i}_t^{ie} \quad \mathbf{j}_t^{ie} \quad \mathbf{k}_t^{ie}] \quad (18)$$

4. 슬라이딩조인트 개발

4.1 슬라이딩조인트의 구속식

Fig. 3에서는 3차원으로 정의되는 물체(강체, 탄성체, 대변형 탄성체)가 매우 유연한 빔요소들로 구성되는 케이블의 축선을 따라 이동하는 구면 슬라이딩조인트(spherical-type sliding joint)의 개념을 보여주고 있다.

슬라이딩조인트의 구속식은 임의의 빔 요소 ie 의 축선을 따라 계산되는 점 p 의 전역변위를 물체(body) j 의 기준좌표계로부터 계산되는 전역변위와 동일하게 함으로써 그 구속식을 정의할 수 있다. 이를 위해 질량과 외력에 관계되지 않고 단지 임의의 빔 요소 ie 에 대한 호-길이방향 위치를 표현하기 위해 비일반좌표인 호-길이보조좌표(arc-length parameter) s 를 구속식에 도입한다. 따라서 구면 슬라이딩조인트에 대한 구속식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi(\mathbf{q}, s, t) = \mathbf{r}_p^{ie} - \mathbf{r}_p^j = \mathbf{r}_p^{ij} = 0 \quad (19)$$

여기서,

$$\mathbf{r}_p^{ie} = \mathbf{S}^{ie} (x^{ie} = s^{ie}, y^{ie} = 0, z^{ie} = 0) \mathbf{e}^{ie}$$

$$\mathbf{r}_p^j = \mathbf{R}^j + \mathbf{u}^j$$

\mathbf{q} 는 일반좌표를 의미하고 $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^i \quad \mathbf{q}^j]^T$ 로 쓸 수 있다. \mathbf{q}^i 와 \mathbf{q}^j 는 물체 i 와 j 에 대한 각각의 일반좌표를 의미하며, 특히 \mathbf{q}^i 의 경우 절대절점좌표 \mathbf{e} 이다. 그리고 \mathbf{u}^j 는 물체 j 의 기준좌표계(x^j - y^j - z^j) 원점으로부터 점 p 까지의 전역변위벡터로서, 물체 j 의 탄성변형 특성에 따라 기준좌표(reference coordinates), 모달좌표(modal coordinates), 절대절점좌표를 이용하여 계산될 수 있다.

식 (19)에서 구속식의 변위차 벡터 \mathbf{r}_p^{ij} 를 빔 요소 ie 내의 조인트좌표계로 투사(projection)시켜 식 (20)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, s, t) = \mathbf{A}_t^{ie T} \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t^{ie T} \mathbf{r}_p^{ij} \\ \mathbf{j}_t^{ie T} \mathbf{r}_p^{ij} \\ \mathbf{k}_t^{ie T} \mathbf{r}_p^{ij} \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

참고로 슬라이딩조인트에 대한 구속식 (19)을 그대로 이용하여 자코비안과 가속도 우변항을 계산할 수도 있지만 이럴 경우 그 계산과정이 매우 복잡해질 뿐만 아니라 다른 형태의 슬라이딩조인트 구속식을 정의하기가 매우 어려워진다.⁽⁵⁾

식 (20)의 구속식을 살펴볼 때, 슬라이딩조인트는 세 개의 구속식으로 표현이 되지만 하나의 새로운 변수인 비일반좌표 s 가 도입되었으므로 하나의 구속식은 시스템적으로 제거될 수 있다. 따라서 최종 운동방정식에는 슬라이딩조인트의 구속반력과 관계되는 두 개의 라그랑지 승수 벡터만이 포함되게 된다. 다음 절에서는 하나의 구속식을 시스템적으로 제거하는 과정에 대해서 설명한다. 참고로 이후부터는 수식의 간략화를 위하여 첨자는 생략한다. 즉 $\mathbf{A}_t^{ie} = [\mathbf{i}_t^{ie} \quad \mathbf{j}_t^{ie} \quad \mathbf{k}_t^{ie}]$ 를 $\mathbf{A} = [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}]$ 로 표기한다.

식 (20)의 구속식은 다음과 같이 독립 구속식과 종속 구속식으로 분리하여 식 (21)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L \\ \mathbf{C}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_l \\ C_{m1} \\ C_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T \mathbf{r}_p^{ij} \\ \mathbf{j}^T \mathbf{r}_p^{ij} \\ \mathbf{k}^T \mathbf{r}_p^{ij} \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

여기서, $\mathbf{C}_L = [C_l] = [\mathbf{i}^T \mathbf{r}_p^{ij}]$, $\mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} C_{m1} \\ C_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}^T \mathbf{r}_p^{ij} \\ \mathbf{k}^T \mathbf{r}_p^{ij} \end{bmatrix}$

식 (21)에서 첫번째 구속식 \mathbf{C}_L 은 변수 s 에 대한 비선형 방정식이므로 Newton-Raphson 방법을 이용하여 s 의 계산이 가능하다.

식 (21)의 구속식은 가상변위를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{C}_L &= [\delta C_l] = \mathbf{C}_{L,q} \delta \mathbf{q} + \mathbf{C}_{L,s} \delta s = 0 \\ \delta \mathbf{C}_M &= \begin{bmatrix} \delta C_{m1} \\ \delta C_{m2} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{M,q} \delta \mathbf{q} + \mathbf{C}_{M,s} \delta s = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $\mathbf{C}_{L,q}$ 은 일반좌표 \mathbf{q} 에 대한 구속식 \mathbf{C}_L 의 자코비안 행렬이고, $\mathbf{C}_{L,s}$ 은 비일반좌표인 s 에 대한 자코비안 행렬을 의미한다. $\mathbf{C}_{M,q}$ 와 $\mathbf{C}_{M,s}$ 도 동일한 의미를 갖는다. 또한 각각의 좌표에 대한 자코비안 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L,q} \\ \mathbf{C}_{M,q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L,s} \\ \mathbf{C}_{M,s} \end{bmatrix} \quad (23)$$

식 (22)로부터 비일반좌표에 대한 가상변위는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\delta s = -\mathbf{C}_{L,s}^{-1} \mathbf{C}_{L,q} \delta \mathbf{q} = \mathbf{G} \delta \mathbf{q} \quad (24)$$

여기서 $\mathbf{G} = -\mathbf{C}_{L,s}^{-1} \mathbf{C}_{L,q}$ 이다. 그리고 비일반좌표의 속도는 식 (24)에서 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{s} = -\mathbf{C}_{L,s}^{-1} \mathbf{C}_{L,q} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} \quad (25)$$

4.2 슬라이딩조인트의 운동방정식
일반적인 다물체시스템에 대한 변분형 운동방정식은 식 (26)과 같이 쓸 수 있다.⁽¹⁹⁾

$$\{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}\}^T \delta \mathbf{q} = 0 \quad (26)$$

여기서, \mathbf{M} 은 슬라이딩조인트로 연결된 두 물체에 대한 질량행렬이고, \mathbf{Q} 는 일반외력벡터이다. 그리고 구속식 (21)은 시스템 좌표에 대한 가상변위를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \mathbf{C} = \mathbf{C}_q \delta \mathbf{q} + \mathbf{C}_s \delta s = 0 \quad (27)$$

식 (26)과 식 (27)에 대하여 라그랑지 승수이론⁽¹⁹⁾을 적용하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \mathbf{q}^T \{ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} \} + \delta s^T \mathbf{C}_s^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (28)$$

식 (23)을 식 (28)에 대입하고 각각의 구속식에 대한 라그랑지 승수벡터의 항으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \left\{ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L,q}^T & \mathbf{C}_{M,q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_L \\ \boldsymbol{\lambda}_M \end{bmatrix} - \mathbf{Q} \right\} + \\ \delta s^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L,s}^T & \mathbf{C}_{M,s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_L \\ \boldsymbol{\lambda}_M \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

식 (24)와 식 (25)를 식 (29)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 보다 확장된 식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \left\{ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{C}_{L,q}^T + \mathbf{G}^T \mathbf{C}_{L,s}^T \right) \boldsymbol{\lambda}_L + \right. \\ \left. \left(\mathbf{C}_{M,q}^T + \mathbf{G}^T \mathbf{C}_{M,s}^T \right) \boldsymbol{\lambda}_M - \mathbf{Q} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

여기서, $\mathbf{C}_{L,q}^T + \mathbf{G}^T \mathbf{C}_{L,s}^T$ 항은 0이 된다. 따라서 식 (30)을 일반적인 형태로 정리하여 다시 쓰면 식 (31)과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \left\{ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda}_M - \mathbf{Q} \right\} = 0 \\ \mathbf{H} = \mathbf{C}_{M,q} + \mathbf{C}_{M,s} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (31)$$

따라서 식 (31)은 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda}_M = \mathbf{Q} \quad (32)$$

또한 식 (21)을 시간에 대해 2차 미분을 수행하게 되면 다음과 같다.

$$\ddot{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{C}}_L \\ \ddot{\mathbf{C}}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L,q} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{L,s} \ddot{s} + (\mathbf{Q}_d)_L \\ \mathbf{C}_{M,q} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{M,s} \ddot{s} + (\mathbf{Q}_d)_M \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

여기서 (Q_d) 는 구속식에 대한 가속도 우변항을 의미한다. 그리고 비일반좌표 s 의 가속도는 식 (33)의 첫번째 식을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= -C_{L,s}^{-1} (Q_d)_L - C_{L,s}^{-1} C_{L,q} \ddot{q} \\ &= -C_{L,s}^{-1} (Q_d)_L - G \ddot{q} \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)를 식 (33)의 둘째 식에 대입하여 정리하면 식 (35)와 같다.

$$\begin{aligned} [C_{M,q} + C_{M,s} G] \ddot{q} = \\ - (Q_d)_M + C_{M,s} C_{L,s}^{-1} (Q_d)_L \end{aligned} \quad (35)$$

따라서 식 (35)는 식 (31)을 이용하여 다음과 같은 일반적인 형태로 쓸 수 있다.

$$H \ddot{q} = W \quad (36)$$

여기서,

$$W = - (Q_d)_M + C_{M,s} C_{L,s}^{-1} (Q_d)_L \quad (37)$$

식 (32)와 식 (37)을 행렬형태로 조합하여 다음과 같이 슬라이딩조인트를 포함하는 두 물체의 최종 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ W \end{bmatrix} \quad (38)$$

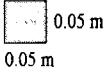
식 (38)에서 알 수 있듯이 최종운동방정식에는 슬라이딩조인트의 구속식에 대해 두 개의 라그랑지 승수벡터만을 포함하게 된다. 즉, 슬라이딩조인트에 의한 구속반력은 빔의 축선의 접선방향에 수직인 두 법선방향에 대해서만 계산이 된다. 그리고 식 (38)은 다물체시스템의 운동방정식 (12)에 포함된다.

5. 수치예제 및 검증

5.1 케이블 위를 움직이는 강체

본 절에서는 제안한 3 차원 슬라이딩조인트의 신뢰성을 검증하기 위해 Fig. 4 와 같이 케이블 위를 움직이는 강체의 시뮬레이션 모델을 구성하고 참고문헌(6)에서 개발한 2 차원 슬라이딩조인트를

Table 1 Material data for example (1)

Body	Material Properties		
	Rigid Body A	Mass (kg)	1.0
Cable	E (Gpa)	0.4	 0.05 m
	G (Gpa)	0.2	
	ρ (kg/m ³)	4200	

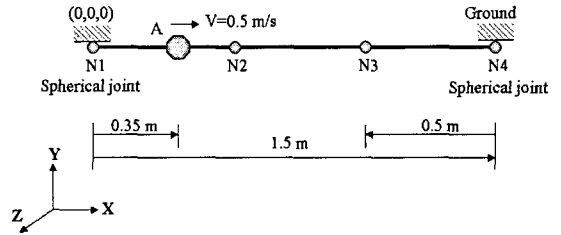


Fig. 4 Numerical example for sliding joint

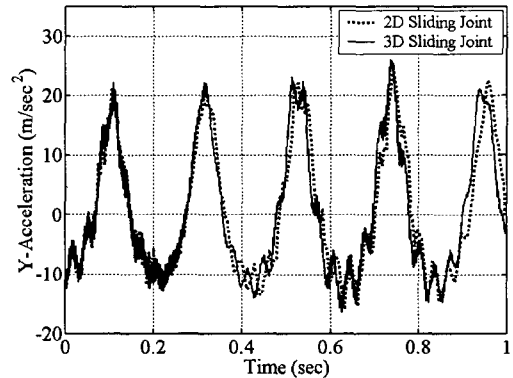


Fig. 5 Y-Acceleration of rigid body A

이용한 해석결과와 비교하였다. Table 1 은 시뮬레이션 모델에 사용되는 케이블의 물성치를 보여주고 있으며, Fig. 4 에서 A 로 표시되어 있는 물체 j 는 강체로 고려하였다. 케이블은 수평상태의 1.5 m 길이이며 세 개의 빔 요소로 구성하였고 케이블의 양 끝점은 구면조인트(spherical joint)로 구속하였다. 그리고 강체 A 는 초기속도를 가지고 케이블을 따라 이동한다.

Fig. 5 는 시뮬레이션 모델에 대하여 1 초 동안 해석했을 때, 강체 A 의 y 방향 가속도를 참고문헌에서 제안한 2 차원 해석결과와 비교하여 보여주고 있다.

해석결과에서 알 수 있듯이 전체적으로 매우 비슷한 결과를 보임을 확인할 수 있다.

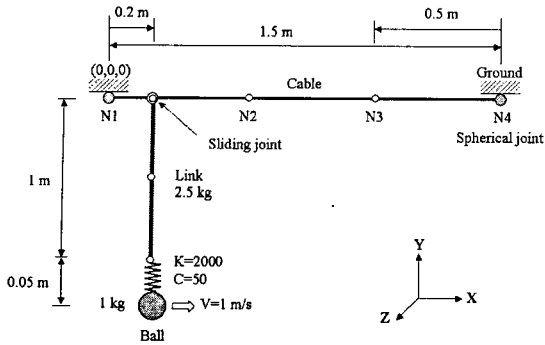


Fig. 6 Numerical example for sliding joint

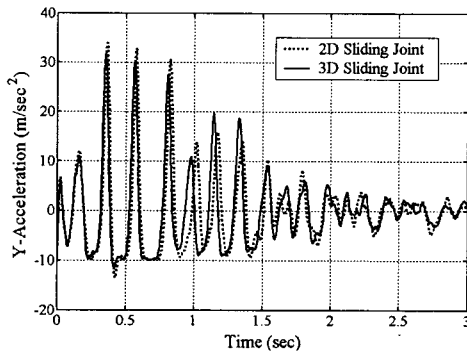


Fig. 7 Y-Acceleration of ball (rigid link)

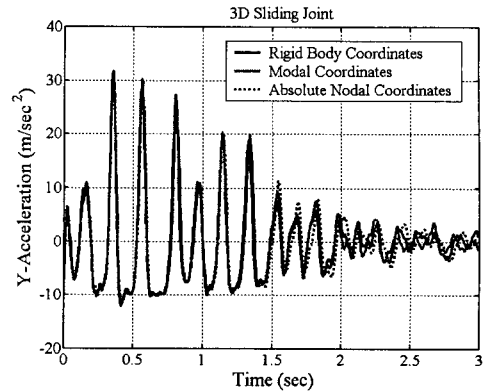


Fig. 8 Y-Acceleration of ball (flexible link)

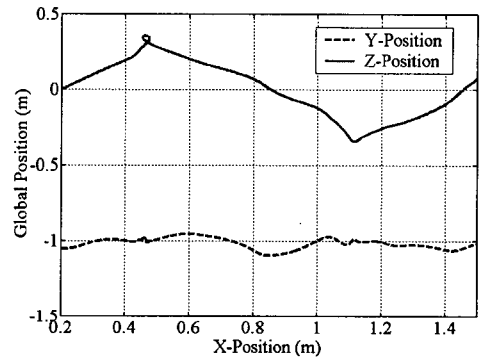


Fig. 9 Global position of ball

5.2 케이블 위를 움직이는 유연체

Fig. 6의 시뮬레이션 모델에서는 케이블을 따라 이동하는 물체를 각각 강체, 탄성체, 대변형 탄성체로 고려했을 경우의 결과를 확인하기 위한 모델의 초기상태를 보여주고 있다. 여기서 케이블의 물성치는 Table 1과 동일하며 링크(link)가 모드좌표를 이용한 탄성체 및 절대절점좌표를 이용한 대변형 탄성체로 고려될 경우의 종탄성계수(Young's modulus of elasticity)는 $E=0.2$ Gpa, 포아송 비례상수(Poisson ratio) $\nu=0.3$ 이고 전단면은 한 변의 길이가 0.03 m인 정사각형이다. 참고로 링크는 모드좌표를 이용하여 탄성체로 고려될 경우 10개의 빔 요소로 등분(mesh)하고 5개의 최저차 진동모드를 구하여 해석에 사용하였다. 링크가 절대절점좌표를 이용한 대변형 탄성체로 고려될 경우는 2개의 빔 요소로 등분된다.

Fig. 7에서는 링크를 강체로 고려했을 경우 볼(ball)의 y 방향 가속도를 2차원 슬라이딩조인트를 이용한 해석결과와 비교하여 보여주고 있다. 두 해석결과에서 알 수 있듯이 위상과 진폭이 매우 잘 일치하고 있다.

Fig. 8에서는 링크를 강체, 모드좌표를 이용한 탄성체, 절대절점좌표를 이용한 대변형 탄성체로 고려하고 3차원 슬라이딩조인트를 이용하여 해석했을 경우 볼의 y 방향 가속도를 비교하여 보여주고 있다. 1.5 초 이후에서 해석결과가 약간의 차이를 보이는데, 이는 링크를 탄성체로 모델링한 좌표시스템의 특성 때문으로 사료된다.

Fig. 9에서는 슬라이딩조인트에 대한 3차원 거동을 확인하기 위해 링크를 강체로 고려하고 볼의 무게중심에 X와 Z 방향으로 각각 1 m/s의 초기속도를 부과하였을 때 진행방향에 대한 볼의 변위를 보여주고 있다. 볼의 초기속도 영향으로 공간상의 거동이 잘 구현되고 있음을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 케이블과 같이 매우 유연한 빔 요소를 따라 다물체시스템이 이동할 때, 빔 요소와의 연속적인 동적 상호작용을 해석할 수 있는 일반적인 다물체동역학 해석목적의 3차원 슬라이

딩조인트를 개발하였으며, 기존의 2 차원 동역학해석목적으로 개발되었던 방법과 비교하여 그 신뢰성을 검증하였다.

개발한 슬라이딩조인트는 그 동안 해석이 어려웠던 케이블의 대변형 문제를 포함하는 다양한 기계시스템, 즉 폴리나 케이블 카, 그리고 판토히아프(pantograph)와 집전케이블(catenary cable)로 구성되는 고속전철 집전장치(current collection system) 등의 3 차원 동역학 해석에 적용이 가능하다.

참고문헌

- (1) Wang, Y. M., 2000, "The Transient Dynamics of a Cable-Mass System Due to the Motion of an Attached Accelerating Mass," *Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 1361~1383.
- (2) Al-Qassab, M., Nair, S., 2003, "Dynamics of an Elastic Cable Carrying a Moving Mass Particle," *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 33, pp. 11~32.
- (3) Siddiqui, S. A., Golnaraghi, M. F., 1998, "Dynamics of a Flexible Cantilever Beam Carrying a Moving Mass," *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 15, pp. 137~154.
- (4) Hwang, R. S., Haug, E. J., 1990, "Translational Joints in Flexible Multibody Dynamics," *Journal of Mechanical Structures and Machines*, Vol. 18, No. 4, pp. 543~564.
- (5) Sugiyama, H., Escalona, J., Shabana, A. A., 2003, "Formulation of Three-Dimensional Joint Constraints Using Absolute Nodal Coordinates," *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 31, pp. 167~195.
- (6) Seo, J. H., Jung, I. H., Han, H. S., Park, T. W., 2004, "Dynamic Analysis of A Very Flexible Cable Carrying A Moving Multibody System," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp.150~156.
- (7) Huston, R. L., Passerello, C. E., 1982, "Validation of Finite Segment Cable Models," *Journal of Computers and Structures*, Vol. 15, No. 6, pp. 653~660.
- (8) Winget, J. M., Huston, R. L., 1976, "Cable Dynamics -A Finite Segment Approach," *Journal of Computers and Structures*, Vol. 6, pp. 475~480.
- (9) Kamman, J. W., Huston, R. L., 2001, "Multibody Dynamics Modeling of Variable Length Cable Systems," *Journal of Multibody System Dynamics*, Vol. 5, pp. 211~221.
- (10) Shabana, A. A., 1998, "Computer Implementation of the Absolute Nodal Coordinate Formulation for Flexible Multibody Dynamics," *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 16, pp. 293~306.
- (11) Escalona, J. L., Hussien, H. A., Shabana, A. A., 1998, "Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Multibody System Dynamics," *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 16, pp. 293~306.
- (12) Yoo, W. S., Lee, S. J., Sohn, J. H., 2003, "Large Oscillations of a Thin Cantilever Beam: Physical Experiments and Simulation Using Absolute Nodal Coordinate Formulation," *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 34, pp. 3~29.
- (13) Mikkola, A. M., Shabana, A. A., 2003, "A Non-Incremental Finite Element Procedure for the Analysis of Large Deformation of Plates and Shells in Mechanical System Applications," *Journal of Multibody System Dynamics*, Vol. 9, pp. 283~309.
- (14) Shabana, A. A., Yakoub, R. Y., 2001, "Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Theory," *Transaction of the ASME*, Vol. 123, pp. 606~613.
- (15) Shabana, A. A., Yakoub, R. Y., 2001, "Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Implementation and Applications," *Transaction of the ASME*, Vol. 123, pp. 614~621.
- (16) Bonet, J., Wood, R. D., 1997, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press.
- (17) Kenneth, H. H., Thornton. E. A., 1995, *The Finite Element Method for Engineers*, John Willey & Sons.
- (18) Shabana, A. A., 1997, "A QR Decomposition Method for Flexible Multibody Dynamics," Technical Report No. MBS97-2-UIC, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago.
- (19) Haug, E. J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon.