

〈 논문 〉

선형 등가정하중을 이용한 비선형 거동 구조물의 최적설계 (I)

- 알고리즘 -

박기종* · 박경진†

(2004년 12월 9일 접수, 2005년 6월 16일 심사완료)

Structural Optimization for Non-Linear Behavior Using Equivalent Static Loads (I)

- Algorithm -

Ki-Jong Park and Gyung-Jin Park

Key Words : Equivalent Static Load(ESL, 등가정하중), Nonlinear Response Optimization(비선형 응답 최적설계), Structural Optimization(구조최적설계)

Abstract

Nonlinear Response Optimization using Equivalent Static Loads (NROESL) method/algorithm is proposed to perform optimization of non-linear response structures. The conventional method spends most of the total design time on nonlinear analysis. The NROESL algorithm makes the equivalent static load cases for each response and repeatedly performs linear response optimization and uses them as multiple loading conditions. The equivalent static loads are defined as the loads in the linear analysis, which generates the same response field as those in non-linear analysis. The algorithm is validated for the convergence and the optimality. The proposed algorithm is applied to a simple mathematical problem to verify the convergence and the optimality.

1. 서론

지금까지 구조최적설계를 구성하는데 있어, 구조물에 작용하는 외력에 대해 구조물의 응답이 선형적으로 변하는 선형 반응에 많은 관심이 집중되어 있었다. 선형 유한요소 해석의 간단함과 편리함으로 인하여 구조최적설계를 달성하는데 비용면에서 많은 이점이 있었다. 그러나 구조물이 점점 복잡해지고 사용자의 다양한 요구에 의해 더 이상 선형 반응으로는 정확한 구조물의 반응을 표현하기가 힘들어지고 있다. 기존의 강성

이 크고 변형이 거의 없는 구조물에서 점차 경량화되고 유연한 구조물이 늘어가고 있다. 따라서 구조물을 해석하는데 있어 기하학적 또는 재료상의 비선형성이 두드러지게 나타날 수 있고 선형 해석에서 한걸음 나아가 비선형을 고려해 주는 설계가 필요하게 되었다.

최근 몇 십 년 동안 구조물의 설계 시, 반응에 대한 제한조건을 만족하는 동시에 구조물의 비용을 줄이거나 성능을 향상시키는 구조최적설계를 활발히 연구하고 있다.⁽¹⁻⁵⁾ 많은 경우 시간이나 편의성의 문제로 인하여 구조물의 선형 반응에만 연구가 활발히 행하여진 것 또한 사실이다. 많은 구조물의 경우 선형해석으로는 구조물의 거동을 제대로 표현할 수 없으며, 특히 재료의 비선형형성이나 대변위, 대변형의 문제에서는 비선형 해석을 통한 구조물의 반응을 구하는 것은 이미 보편화 되어 있다. 그래서 구조물의 비선형 해석을 구조 최적설계에 이용하려는 시도가 많은

* 회원, 현대·기아 연구개발본부

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-5246 FAX : (031)407-0755

연구자들을 통해 있었으며 수학적인 최적설계 정식화 또한 잘 정리되었다.⁽⁶⁻¹⁰⁾

하지만 비선형 해석을 통한 구조물의 최적설계를 수행하는 것은 선형문제에 비해 매우 고가이며, 목적 함수나 제한 조건의 민감도 계산은 많은 시간이 소요된다. 민감도를 계산할 때 간단한 절차를 통하여 수행되는 유한차분법(finite difference method)은 접근 방법은 쉬우나, 증분에 의해 문제를 푸는 비선형해석의 경우 대단히 고가의 방법이다. 해석적 방법이나 준해석적 방법에 의한 민감도의 계산도 비선형 해석의 경로의 존성이나 증분 방법 또는 최적화의 복잡성으로 인하여 적용하기에 쉽지는 않다.

한편, 선형반응 최적화 기법은 비교적 많은 연구에 의해 잘 정리되어 있고, 이를 구조 최적설계에 쉽게 적용할 수 있는 상용 코드들 또한 흔히 구할 수 있다. 비선형 거동을 하는 구조물에 대한 최적화를 선형 반응 구조최적설계 방법을 이용하여 달성하는 방법을 제안한다. 비선형 특성을 갖는 응답과 같은 크기의 응답을 나타낼 수 있는 방법으로 등가정하중이 가해지는 선형해석을 제안한다. 등가정하중은 유한요소법을 통해 해석적 또는 수치적인 방법으로 산출한다. 비선형 구조물의 응답으로 구조물의 최적설계에 있어 많은 경우 변위와 응력을 선택하여 사용하고 있다. 산출된 변위에 대한 등가정하중과 응력에 대한 등가정하중을 기존의 선형 반응 최적화 알고리즘에 다중 하중조건으로 직접 사용하여 선형 반응 최적화를 수행하고, 이 과정을 반복함으로써 원래의 비선형 최적화 문제를 해결하고자 한다.⁽¹¹⁻¹³⁾

제안한 알고리즘의 수렴성을 고찰하기 위하여, 목적함수와 제한조건 위배량으로 구성된 강하함수(descend function)를 도입한다. 강하함수가 강하조건을 만족하는 비선형 반응과 선형 반응의 관계에 대하여 고찰한다. 또한 수렴조건이 구조문제에서 갖는 의미에 대해 토의한다. 제안한 알고리즘을 통해 얻은 해가 만족하는 Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 조건이 원래의 비선형 응답 최적화 문제에 대한 KKT조건과 동일함을 보임으로써 제안한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계(Nonlinear Response Optimization using Equivalent Static Loads; NROESL) 알고리즘의 수렴과 해의 최적성에 대하여 수치적으로 검토한다. 수치적 예제를 이용하여 제안한 알고리즘을 통해 구한 해의 최적성에 관한 확인을 한다.

2. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최

적설계 알고리즘

2.1 전통적인 비선형 응답 구조 최적설계

일반적으로 구조최적설계에서는 유한요소법을 이용한 구조물의 지배방정식과 설계조건 등을 제한조건으로 사용하는데, 목적함수나 제한조건의 성격에 따라 해결하는 방법이 따로 있다. 흔히 비선형 최적설계는 최적설계 문제를 구성하는 목적함수나 제한조건이 설계변수에 대하여 비선형이라는 것을 의미한다. 그러나 비선형 응답 구조 설계는 이러한 관계에 상관없이 상태방정식 즉 유한요소 방정식을 이루는 상태변수 사이의 관계가 비선형성을 갖는 것을 말한다. 전형적인 비선형 응답 구조최적설계는 다음과 같은 수식화에 의해 정식화된다.

$$\text{Find } \mathbf{b} \in R^n \quad (1a)$$

$$\text{to minimize } f(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \quad (1b)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z})\mathbf{z} - \mathbf{f} = 0 \quad (1c)$$

$$g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \leq 0; i = 1, \dots, m \quad (1d)$$

$$b_{iL} \leq b_i \leq b_{iU}; i = 1, \dots, n \quad (1e)$$

여기서 \mathbf{b} 는 설계변수벡터, \mathbf{K} 는 강성행렬, \mathbf{z} 는 변위벡터, \mathbf{f} 는 외력벡터이다. m 은 부동호제한조건의 개수이고 b_{iL} 와 b_{iU} 는 i 번째 설계변수의 하한과 상한치이다. 식 (1c)는 유한요소법을 사용한 상태방정식이다. $f(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ 와 $g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ 는 설계변수가 내재적(implicit)으로 표현되고 상태변수로 구성될 수 있는 목적함수와 제한조건 함수이다. 설계변수의 내재적 표현은 상태방정식을 풀어야만 하는 상태변수에 종속적이라는 것을 의미한다. 식 (1c)가 비선형 상태변수에 대하여 비선형 방정식이므로 식 (1)은 비선형 응답 최적설계 정식화가 된다. 선형응답 최적설계 문제는 식 (1c)가 선형 방정식이다.

식 (1a)-(1d)와 같은 정식화는 대부분의 구조최적설계 문제가 그렇듯이 유한요소법을 이용하여 구조물의 응답을 계산하고, 민감도정보를 계산하는 데 바탕을 두고 있다. 비선형구조물의 응답과 민감도를 계산하는 것은 선형구조물의 계산보다 비용이 훨씬 많이 든다. 따라서 유한요소를 이용한 비선형 구조물의 최적화는 대부분 고비용이고 큰 구조물에 대한 적용은 대단히 어렵다.

2.2 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조 최적설계

앞서 설명한 전통적 방법을 대신해 비선형 응

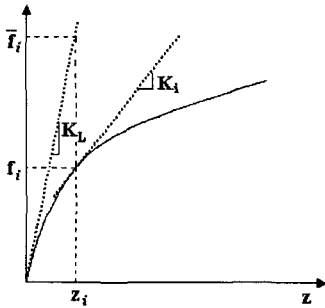


Fig. 1 Initial and tangent stiffness

답 최적설계를 수행하기 위하여 간단한 방법을 제시한다. 비선형 해석으로부터 등가정하중을 만들고 이를 이용하여 선형 응답 최적설계를 수행한다. 전체 프로세스는 선형응답 최적설계를 반복적으로 수행하면서 진행된다.

2.2.1 등가정하중의 정의

일반적인 유한요소법을 이용한 작용하중에 대한 구조물의 응답은 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$Kz = f \tag{2}$$

여기서, K 는 강성행렬(stiffness matrix), z 는 절점 변위벡터(nodal displacement vector), f 은 하중벡터이다. 일반적으로 선형해석의 경우에는 변위나 변형이 극히 작은 것으로 간주하여 변형전의 형상(configuration)과 변형후의 형상의 차이를 무시한다. 그러나 비선형 해석은 Lagrangian 수식화(formulation)를 통한 미지의 변형형상을 이용해야만 하며 이를 위해 외력의 증분(increment) 형태로 표현하고 선형 근사화해서 주어진 하중에서 평형조건을 만족할 때까지 반복하게 된다.

한편, 선형해석의 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$$K_L z_L = \bar{f} \tag{3}$$

여기서 K_L 은 선형 강성행렬, z_L 은 선형해석에서의 절점 변위벡터이다. z_L 에서 하첨자 L 은 다음에 사용하게 될 비선형해석에서의 절점변위와 명확히 구분하기 위하여 선형해석에서 얻었다는 것을 표현하는 것이다. \bar{f} 는 선형해석에서의 하중벡터이다.

Fig. 1에서처럼 비선형 해석의 경우에는 증분에 따라 강성행렬이 변한다. 따라서 각 해석 위치에서의 접선강성행렬(K_t)을 따라 해를 구하게 된다. 선형해석의 경우 해석 위치에 상관없이

초기 강성행렬(K_L)을 따르게 된다. 비선형 해석에서의 응답장과 같은 응답장을 발생시키는 선형 해석에서의 하중을 등가정하중이라 정의하며 변위장의 경우 Fig. 1에서 특정 변위 z_i 에서 비선형 강성을 따르는 하중 f_i 를 선형 강성을 따르는 하중 \bar{f}_i 에로의 사상으로 구할 수 있다. 식 (2)와 식 (3)을 사용하면 비선형 해석의 응답과 동일한 선형 해석의 응답을 구할 수 있다.

예를 들어, 등가정하중을 구하기 위하여 비선형 해석 후의 변위장과 동일한 선형해석에서의 변위장을 발생시키는 하중, 즉 변위 등가정하중은 다음과 같이 얻어진다.

$$f_{eq}^z = K_L z_N \tag{4}$$

여기서, f_{eq}^z 는 변위 등가정하중을, K_L 은 선형 시스템의 강성행렬을, z_N 은 식 (2)로부터 얻은 절점 변위벡터를 말한다. z_N 의 하첨자 N 은 앞서 설명한 선형 해석에서의 변위와 대비하여 비선형해석에서의 변위라는 의미로 사용한다.

등가정하중은 변위, 응력 등의 관심있는 응답에 대하여 변위 등가정하중(f_{eq}^z), 응력 등가정하중(f_{eq}^σ) 등으로 각각 구해질 수 있다. f_{eq}^z 과 f_{eq}^σ 은 다중하중조건으로 사용될 것이므로 같은 의미로 표현될 수 있다. 지금부터는 편의상 f_{eq} 로 통일하고 변위 관점에서만 고려하여 설명한다.

2.2.2 NROESL 알고리즘

식 (1c)의 비선형 유한요소 방정식과 식 (4)의 등가정하중을 이용하여 구성된 선형 반응 최적설계 정식화를 이용하여 비선형 반응 최적설계를 수행하는 구조최적화 알고리즘의 절차를 설명하면 다음과 같다.

- 단계 1: 초기값을 설정한다. (사이클 수 $k=0$, 설계변수 $b^{(k)} = b^{(0)}$, 수렴조건 ϵ 은 작은 양수로 정의)
- 단계 2: 설계변수 $b^{(k)}$ 에 대하여 식 (1c)와 같이 비선형 유한요소 해석을 수행한다. 여기서 선형 강성행렬과 비선형 응답을 얻을 수 있다.
- 단계 3: 관심 있는 비선형 해석의 응답에 대하여 다음과 같이 등가 하중을 계산한다.

$$f_{eq}^{(k)} = K_L z_N \tag{5}$$

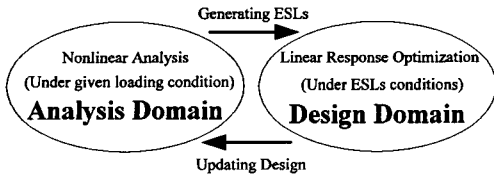


Fig. 2 Repeated mapping process between analysis domain and design domain

단계 4: $k = 0$ 이면 단계 5로 간다. $k > 0$ 일 때,

$$\| \mathbf{f}_{eq}^{(k)} - \mathbf{f}_{eq}^{(k-1)} \| \leq \epsilon \quad (6)$$

이면 알고리즘을 멈추고 그렇지 않다면 다음 단계로 간다.

단계 5: 다음의 선형 응답 최적화를 수행한다.

Find $\mathbf{b}^{(k+1)} \quad (7a)$

to minimize $f(\mathbf{b}^{(k+1)}) \quad (7b)$

subject to $\mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k+1)})\mathbf{z} - \mathbf{f}_{eq}^{(k)} = 0 \quad (7c)$

$$g_j(\mathbf{b}^{(k+1)}, \mathbf{z}) \leq 0, j = 1, \dots, m \quad (7d)$$

$$\mathbf{b}_{iL}^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_i^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_{iU}^{(k+1)}, i = 1, \dots, n \quad (7e)$$

여기서 식 (7c)는 선형 유한요소 방정식이다. 외력 \mathbf{f}_{eq} 는 등가정하중이다. 등가정하중은 변위나 응력 등의 각각의 응답에 대하여 구해지고 식 (7c)에서 다중하중조건(multiple loading conditions)으로 선형 유한요소해석을 구성하게 된다.

단계 6: 설계결과를 갱신하고 단계 2로 간다. ($k = k + 1$)

k 번째 사이클에서 단계 5가 되기 전에 선형 응답(\mathbf{z}_L)은 비선형응답(\mathbf{z}_N)과 일치한다. 그러나 단계 5를 거치면서 두 반응은 달라진다. 그 차이는 사이클의 반복에 의해 해소될 수 있다. 사이클은 주어진 설계변수 하에서 비선형해석을 수행하고 등가정하중을 계산하고 선형응답 최적설계를 수행하는 과정이다. 사이클은 수렴조건을 만족할 때까지 반복된다. Fig. 2에서처럼 실제 구하고자 하는 반응의 해석을 하는 해석영역과 등가하중에 의해 변환된 반응에 의해 최적화가 이루어지는 설계영역 사이의 반복적 사상과정이다.

3. NROESL 알고리즘의 수렴

최적화 알고리즘이 임의의 설계점에서 시작하여 최적점에 도달하면 그 알고리즘은 수렴한다고 말

한다. 반복 알고리즘은 특정 시작점에서 출발하게 된다. 알고리즘의 수렴성은 특정한 강하함수가 수렴한다는 것으로 증명한다. 제한조건이 없는 문제라면 목적함수를 강하함수로 사용하여 알고리즘의 진행과정이 최적점으로 향하고 있다는 것을 보여주면 된다. 하지만 제한조건이 있는 문제에서는 강하함수를 목적함수의 값에 제한조건의 위배에 관한 벌칙을 더하여 구성할 수 있다. 강하함수 성질의 한가지는 최적점에서의 강하함수의 값이 목적함수의 값과 같아야 한다.^(4,5) 이 장에서는 제안한 방법을 위한 강하함수가 존재한다는 것을 설명한다.

3.1 NROESL 알고리즘의 수렴

3.1.1 NROESL 알고리즘의 강하함수

NROESL 알고리즘에서 강하함수는 식 (7)에서 정의된 문제의 선형반응 최적화의 최적점에서의 Lagrange 함수로부터 유도할 수 있다. 단 여기서 부등호 제한조건은 등호 제한조건인 연립방정식을 푸는 것에 의해 변형되므로 등호 제한조건을 제거하여 다음과 같이 강하함수 $\Phi(\mathbf{b})$ 를 정의한다.

$$L(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i \leq f(\mathbf{b}) + \left(\sum_{i=1}^m u_i \right) V_L(\mathbf{b}) \quad (8)$$

$$\leq f(\mathbf{b}) + \left(\sum_{i=1}^m u_i \right) V(\mathbf{b}) \leq f(\mathbf{b}) + RV(\mathbf{b}) \equiv \Phi(\mathbf{b})$$

여기서 u_i 는 i 번째 제한조건에 대한 라그랑지승수, $V_L(\mathbf{b})$ 은 선형 반응 최적점에서의 제한조건 최대 위배량이다. 제안한 알고리즘에서 선형반응 최적설계는 완벽하게 수렴하고 최적점을 찾아가는 것으로 간주하기 때문에 최대 위배량 $V_L(\mathbf{b})$ 은 0이다. $V(\mathbf{b})$ 은 NROESL 알고리즘에서 비선형을 감안했을 때 제한조건 최대 위배량이며 다음 식과 같다.

$$V = \max \{0; g_i, i = 1 \text{ to } m\} \quad (9)$$

선형반응 최적화의 최적점에서 모든 제한조건이 만족되더라도 갱신된 설계로 비선형 응답을 구하면 제한조건은 위배될 수도 있다. 즉 $V(\mathbf{b}) \geq V_L(\mathbf{b})$ 의 관계를 갖게 된다. 따라서 선형반응 최적화의 최적점에서의 Lagrange 함수는 NROESL 알고리즘의 강하함수 $\Phi(\mathbf{b})$ 의 하한이 된다. R 은 벌칙계수로 매 사이클의 선형반응 최적화의 최적점에서 모든 Lagrange 승수의 합보다 크거나 같아야 한다.

위에서 설명한 조건을 만족하는 NROESL 알고리즘의 강하함수는 다음과 같다.

$$\Phi(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) + RV(\mathbf{b}) \quad (10)$$

여기서 f 는 설계점 \mathbf{b} 에서의 목적함수이고, V 는 제한조건의 최대 위배량이다. R 은 충분히 큰 양수이다.

3.1.2 NROESL 알고리즘의 수렴

제안한 알고리즘의 절차에 따르면 비선형 응답을 등가정하중을 통하여 선형 응답으로 변환하여 최적화를 달성한다. 여기서 선형 응답은 최적화의 방향을 결정하는 주된 과정이다. 선형 응답 최적화 결과를 다시 비선형 해석하는 과정이 선형 해석으로 인한 응답의 왜곡을 바로 잡는 역할을 하게 된다. 따라서 선형 응답과 비선형 응답 사이의 관계가 설계변수의 영역에서 어떻게 표현되어야 하는가가 NROESL 알고리즘의 수렴에 있어 주된 요인이 된다.

일반적으로 구조최적설계 문제에서 응답은 변위나 응력 등이다. 제안한 알고리즘의 수렴은 선형 응답해석과 비선형응답해석 사이의 관계로 설명되어진다. 본 논문에서는 변위를 가지고 수렴을 수학적으로 입증한다. 응력은 변위의 조합이므로 편의성을 위하여 응력은 설명에서 제외하였다.

NROESL 알고리즘에서, k 번째 사이클의 비선형 상태방정식의 해를 $\mathbf{z}_N^{(k)}$, 선형반응 최적화의 최적점에서 선형 상태방정식의 해를 $\mathbf{z}_L^{(k)}$ 라 하자. 등가정하중의 정의에 의해 다음이 성립한다.

$$\mathbf{z}_N^{(k)} = \mathbf{z}_L^{(k)} \equiv \mathbf{z}_{eq}^{(k)} \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{z}_{eq}^{(k)}$ 는 $\mathbf{z}_N^{(k)}$ 와 $\mathbf{z}_L^{(k)}$ 의 새로운 표현이다.

비선형 응답과 이와 일치하는 선형 응답사이의 관계를 식 (12)~(14)의 세가지 조건으로 나눌 수 있다. 제안한 알고리즘의 수렴은 각 조건에 대하여 검증한다.

조건 1. $\left| z_{eq,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \right| \leq \left| z_{eq,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \right|$
 when $\left(z_{eq,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \right) \left(z_{eq,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \right) \geq 0$ (12)

조건 2. $\left| z_{eq,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \right| \geq \left| z_{eq,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \right|$
 when $\left(z_{eq,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \right) \left(z_{eq,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \right) \geq 0$ (13)

조건 3. $\left(z_{eq,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \right) \left(z_{eq,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \right) \leq 0$ (14)

여기서 하첨자 M 은 최대위배량을 갖는다는 것을 의미하고, 제한조건 위배량이 없다면 제한조건 경계로부터 가장 가까운 것을 의미한다.

조건 1에서는 선형과 비선형 해석에서 설계변수의 변화방향이 같다는 것을 의미하고 선형해석에서의 변화가 비선형 해석에서의 변화보다 더 크다

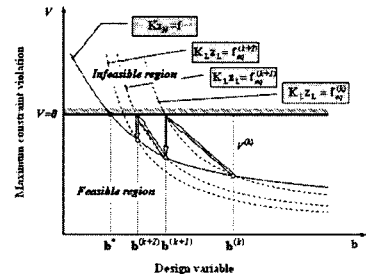
는 것을 말한다. 각 사이클에서의 비선형 해석의 경향과 선형해석의 경향을 실선과 점선으로 Fig. 3에 각각 나타내었다. 조건 2는 응답이 조건 1과 같은 방향이고 점선의 기울기가 실선의 기울기보다 크다. 조건 3에서는 두 응답이 반대 방향을 향하고 있다. 일반적인 구조문제에서는 대부분 조건 1을 만족하므로 알고리즘의 수렴은 조건 1을 이용하여 검증하였다.

정리 1. NROESL 알고리즘에서 조건 1이 만족되면 다음과 같은 강하함수의 강하조건이 만족되고 알고리즘은 수렴한다.

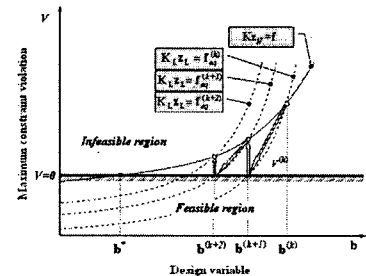
$$\Phi(\mathbf{b}^{k+1}) - \Phi(\mathbf{b}^k) \leq 0 \quad (15)$$

증명. 식 (10)의 강하함수를 이용하면, k 번째 사이클에서 선형응답 최적설계의 강하함수는 $\Phi_L(\mathbf{b}^{(k)})$ 이다. 이는 선형응답 최적설계 후에 계산된다. k 번째 설계점 $(\mathbf{b}^{(k)})$ 이 가용영역(feasible region)과 비가용영역(infeasible region)의 두가지 경우에 대하여 나누어 생각한다.

첫째, k 번째 설계점이 가용영역에 있다면 선형 응답 최적설계에서 목적함수는 감소하고 제한조건 최대위배량은 0이 된다. 따라서 강하함수 $\Phi_L(\mathbf{b}^{(k)})$ 의 변화는 다음과 같다.



(a) Starting from the feasible region



(b) Starting from the infeasible region

Fig. 3 Convergence with an initial design variable

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_L &= \Phi_L(\mathbf{b}^{(k+1)}) - \Phi_L(\mathbf{b}^{(k)}) \\ &= \Delta f = f(\mathbf{b}^{(k+1)}) - f(\mathbf{b}^{(k)}) \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

조건 1에 의하여 선형 반응의 변화량이 비선형 반응의 변화량보다 크므로 선형 반응의 제한 조건이 활성화되는 동안 비선형 반응의 제한조건은 아직 활성화되지 못하고 여전히 가용영역 내에 존재하게 되고 강하함수 $\Phi(\mathbf{b}^{(k)})$ 는 다음과 같이 강하조건을 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(\mathbf{b}^{(k+1)}) - \Phi(\mathbf{b}^{(k)}) \\ &= \Delta f = f(\mathbf{b}^{(k+1)}) - f(\mathbf{b}^{(k)}) \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

둘째, k 번째 설계점이 제한조건을 위배하고 있는 비가용영역에 있을 때이다. 선형 반응 최적화를 수행하기 전에 등가정하중에 의해 비선형 반응에 선형 반응을 일치시키므로 $\mathbf{z}_N^{(k)} = \mathbf{z}_L^{(k)}$ 가 되고 비가용영역에 있으므로 $V_L(\mathbf{b}^{(k)}) = V(\mathbf{b}^{(k)}) \geq 0$ 를 만족한다. $V_L(\mathbf{b}^{(k)})$ 는 k 번째 사이클에서 선형응답 최적설계 시작점에서의 제한조건 최대위배량이다. 선형 반응 최적화에 의하여 다음 설계점이 구해지고, 이때 선형 반응의 제한조건 최대 위배량은 $V_L(\mathbf{b}^{(k+1)}) = 0$ 가 된다. 즉, 선형 반응 최적설계의 강하조건은 큰 벌칙계수 R_L 에 대하여

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_L &= \Phi_L(\mathbf{b}^{(k+1)}) - \Phi_L(\mathbf{b}^{(k)}) \\ &= f(\mathbf{b}^{(k+1)}) - f(\mathbf{b}^{(k)}) + R_L(-V(\mathbf{b}^{(k)})) \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

을 만족한다. $V_L(\mathbf{b}^{(k)}) = V(\mathbf{b}^{(k)}) \geq 0$ 이므로

$$V_L(\mathbf{b}^{(k+1)}) - V_L(\mathbf{b}^{(k)}) = -V_L(\mathbf{b}^{(k)}) \leq 0 \quad (19)$$

을 만족하고 조건 1로부터

$$V(\mathbf{b}^{(k+1)}) - V(\mathbf{b}^{(k)}) \leq 0 \quad (20)$$

이 성립한다. 뿐만 아니라 목적함수의 변화량은 선형반응 최적설계에서의 변화량과 같다. 따라서 충분히 큰 벌칙계수 R 에 대하여 다음과 같이 강하조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(\mathbf{b}^{(k+1)}) - \Phi(\mathbf{b}^{(k)}) = f(\mathbf{b}^{(k+1)}) \\ &\quad - f(\mathbf{b}^{(k)}) + R(V(\mathbf{b}^{(k+1)}) - V(\mathbf{b}^{(k)})) \leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 벌칙계수 R 은 가장 최근의 벌칙계수들의 의미한다. 이는 식 (8)에 의하여 선형반응 최적화의 최적점에서 모든 Lagrange 승수의 합보다 크거나 같은 조건이면 강하조건을 만족할만한 충분히 큰 값을 갖는다.

두 경우를 Fig. 3에 도시하였다. 비선형 응답 최

적설계는 실선을 따라 수행된다. 하지만 제한한 방법은 점선을 따른다. Fig. 3에서 점선과 실선의 교점은 등가정하중이 구해지는 단계이고 이점에서 선형 응답 최적설계가 시작된다. 따라서 조건 1이 만족될 때 최적설계는 제한조건이 위배되지 않는 곳으로 진행된다. 사이클이 진행됨에 따라 최대 위배하는 제한조건이 변화될 수도 있지만 이 경우에도 조건 1만 만족하면 강하조건은 만족되고 알고리즘은 Fig. 3에서와 같이 수렴한다.

조건 2나 3의 경우에도 같은 방법으로 수렴을 검증할 수 있다. 하지만 그 경우 알고리즘의 수렴성은 또 다른 조건들에 의해 수렴할 수도 그렇지 못할 수도 있다. 이 경우에는 다음 사이클에서 제한조건 최대위배량이 매우 중요하다. 설계 변수의 강렬한 설계변수의 변화는 제한조건 최대 위배량의 강렬한 변화로 이어진다. 따라서 알고리즘상에서 설계의 진행 방향과 크기를 결정하는 선형 응답 최적화의 설계 변화의 크기를 적절히 제한함으로써 이루어질 수 있다. 즉 설계변수 이동제한(move limit)을 사용하게 된다. 이에 대한 검증은 지면관계상 참고문헌⁽¹⁵⁾으로 대신한다.

3.2 구조문제에서의 수렴조건의 고찰

Fig. 4와 같은 변형 형상을 갖는 2부재 트러스 문제를 고려하자. 탄성재료에 대하여 대칭조건을 이용하여 한 부재만을 고려하고 Total Lagrangian 수식화를 이용하여 변형량을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{E}{0L^3} \left(z_N^3 - 3(0L \sin \alpha) z_N^2 + 2(0L^2 \sin^2 \alpha) z_N \right) = P \quad (22)$$

제한한 NROESL 알고리즘의 절차에 따라 등가정하중을 구하면 다음과 같다.

$$f_{eq} = \frac{2E}{0L} A \sin^2 \alpha z_N = K_L z_N \quad (23)$$

주어진 문제에 대하여, $0A = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 이고 $0L = 0.2 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $P = -10000.0 \text{ N}$, $E = 1.0 \text{ GPa}$

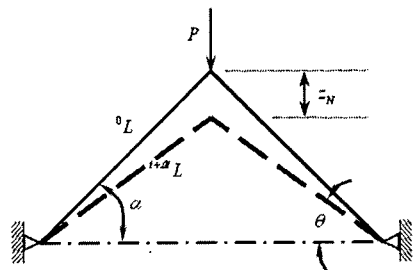


Fig. 4 Deformed shape of tow bar truss

라 두자. 비선형 응답을 구하면 $z_N = -0.02756m$ 가 된다. 이때, 식 (23)을 이용하여 등가정하중을 구하고 부재의 단면적에 대한 선형응답을 구하면 다음과 같다.

$$z_L = \frac{f_{eq}^0 L}{2E^0 A \sin^2 \alpha} = \frac{-2.756 \times 10^{-6}}{0A} \quad (24)$$

설계변수 0A 를 변화시켜 식 (22)의 비선형 반응과 식 (24)의 선형 반응을 도시하면 Fig. 5와 같다. 그림에서 알 수 있듯이 설계영역 내에서 선형 반응과 비선형 반응은 수렴 조건 1을 만족한다. 따라서 이러한 문제의 경우 NROESL 알고리즘은 수렴한다. 예로든 문제와 같이 구조물에서는 비선형 반응과 그때 등가정하중을 이용한 선형 반응은 설계 공간 내에서 설계변수의 변화에 대해 같은 방향성을 가지고 변하는 경우가 많다. 이런 경우 앞절에서 살펴본 바와 같이 NROESL 알고리즘은 수렴한다. 어떤 경우 비선형 반응의 변화가 선형반응 보다 큰 경우에도 설계변수 이동제한 등의 방법을 통하여 제안한 알고리즘이 수렴하게 할 수 있다. 따라서 앞서 제시한 조건을 만족하는 많은 구조물의 설계 문제에는 적절히 적용이 가능할 것으로 보인다. 많은 비선형 반응 구조 최적설계문제에 관한 예제를 보임으로써 범용성도 보일 수 있을 것으로 본다.

4. NROESL 알고리즘의 해의 최적성

본 장에서는 제안한 알고리즘에 의해 얻어진 해의 최적성에 대하여 논의하고 입증하고자 한다. 최적점(optimum point)은 Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 필요조건을 만족해야만 한다.^(4,5) 먼저, 제안한 알고리즘의 프로세스가 종료되었을 때 등가정하중을 이용한 선형반응 최적설계의 KKT 필요조건을 유도할 것이다. 또한, 비선형 해석을 등호제한조건

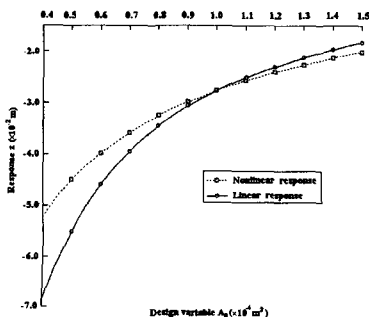


Fig. 5 Linear and nonlinear response with respect to design variable change

으로 갖는 원래의 비선형 반응 최적설계의 KKT 필요조건을 유도할 것이다. 두가지 방법으로 풀해가 동일함을 보임으로써 제안한 알고리즘의 해가 최적해임을 입증한다.

제안한 알고리즘이 수렴하였을 때, 원래의 비선형 반응 최적화 식인 식 (1)의 KKT 필요조건과 등가정하중에 의해 변환된 선형 반응 최적설계 식인 식 (7)의 KKT 필요조건이 같다는 것을 보임으로써 알고리즘의 해의 최적성에 대하여 설명한다. 알고리즘이 수렴 조건 1에 의하여 k 번째 사이클에서 수렴한다고 가정하면 다음이 성립한다.

$$\|f_{eq}^{(k)}\| \cong \|f_{eq}^{(k-1)}\| \quad (25a)$$

$$b^{(k)} \neq b^{(k-1)} \quad (25b)$$

식 (25)는 순차적인 절차에 의한 두개의 설계변수에 대하여 비선형 해석을 수행할 때, 응답이 변하지 않고 결국 등가하중이 같아지는 것을 의미한다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\delta f_{eq} = \nabla_b f_{eq} \cdot \delta b = 0 \quad (26)$$

여기서 δf_{eq} 는 등가정하중의 변화량, $\nabla_b f_{eq}$ 는 등가정하중의 설계변수에 대한 구배(gradient), δb 는 설계변수의 변화량을 나타낸다. 그런데, 식 (26)을 만족시키기 위하여 다음의 두가지 조건중 하나가 만족되어야 한다.

$$(i) \nabla_b f_{eq} = 0 \quad (27a)$$

$$(ii) \nabla_b f_{eq} \text{와 } \delta b \text{가 서로 직교} \quad (27b)$$

따라서 제안한 NROESL 알고리즘이 수렴하면 결국 식 (27a)나 식 (27b) 중 하나의 조건에 의해서 반복절차를 끝내게 된다는 것을 의미한다.

4.1 일반적인 비선형 응답 최적설계의 KKT조건

식 (1)의 KKT 필요조건을 유도하고자 한다. 식 (1c)는 비선형 연립 방정식의 행렬 표현식이며, 이는 최적설계 프로세스에서 등호 제한조건처럼 다루어진다. 따라서 아래와 같이 내재적(implicit) 표현이 가능하다.

$$z_N = z_N(b) \quad (28)$$

식 (1d)의 제한조건을 식 (28)로 치환하면, Lagrange 함수 L 을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$L = f(b) + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j(b, z_N) \quad (29)$$

여기서 μ_j 는 j 번째 제한조건에 대한 Lagrange 승수이다. KKT조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial b_i} + \sum_{j=1}^m \mu_j \left[\frac{\partial g_j(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N)}{\partial b_i} + (\nabla_{\mathbf{z}_N} g_j)^T \cdot \frac{d\mathbf{z}_N}{db_i} \right] = 0 \quad (30a)$$

$$\mu_j \cdot g_j = 0; \quad \mu_j \geq 0; \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, m \quad (30b)$$

여기서 n 은 설계변수의 개수이고 m 은 제한조건의 개수이다. $d\mathbf{z}_N/db_i$ 는 음함수 미분을 사용하여 식 (1c)로부터 계산할 수 있다.

4.2 NROESL의 마지막 사이클에서 선형 응답 최적설계의 KKT조건

제안한 알고리즘의 절차에 따르면, 매 사이클마다 식 (7)의 선형 반응 최적설계를 수행하게 된다. 이렇게 얻은 각 사이클에서의 최적해는 항상 그 문제에 대한 KKT 조건을 만족한다. 식 (7c)의 등호 제한조건은 설계 민감도 정보에 의하여 제거된다. 최적화로 얻어진 결과가 다음 사이클에서의 설계변수 이므로 $\mathbf{b}^{(k)}$ 는 $\mathbf{b}^{(k+1)}$ 로 대신 사용한다. Lagrange 함수 L 은 다음과 같다.

$$L = f(\mathbf{b}) + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j(\mathbf{b}, \mathbf{z}_L) \quad (31)$$

KKT 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial b_i} + \sum_{j=1}^m \mu_j \left[\frac{\partial g_j(\mathbf{b}, \mathbf{z}_L)}{\partial b_i} + (\nabla_{\mathbf{z}_L} g_j)^T \cdot \frac{d\mathbf{z}_L}{db_i} \right] = 0 \quad (32a)$$

$$\mu_j \cdot g_j = 0; \quad \mu_j \geq 0; \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, m \quad (32b)$$

4.3 두 문제에 대한 KKT 조건의 비교

두 문제에 대한 KKT 조건은 각각 식 (30)과 식 (32)이다. 두 문제의 제한조건은 동일한 형태를 가지고 있고 상태변수는 각각 \mathbf{z}_N 와 \mathbf{z}_L 이다. 상태변수 \mathbf{z}_N 와 \mathbf{z}_L 는 설계변수 \mathbf{b} 의 함수이고, 등호 제한조건인 각자의 평형방정식을 만족해야 한다. 알고리즘의 $k-1$ 번째 사이클의 선형응답 최적설계 수행 이후에 다음을 만족한다.

$$\mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k)})\mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq}^{(k-1)} \quad (33)$$

$k-1$ 번째 사이클의 선형응답 최적설계 수행의 결과를 이용하여 비선형 응답 해석을 수행한 후 등가정하중을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{(k)} = \mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k)})\mathbf{z}_N \quad (34)$$

k 번째 사이클에서 알고리즘이 수렴한다면 식 (25)를 만족한다. 식 (25)와 식 (33), (34)로부터 다음이 성립한다.

$$\mathbf{K}_L \mathbf{z}_L = \mathbf{K}_L \mathbf{z}_N = \mathbf{f}_{eq} = \text{constant} \quad (35)$$

$$\mathbf{z}_L = \mathbf{z}_N = \mathbf{K}_L^{-1} \mathbf{f}_{eq} \quad (36)$$

식 (35)를 미분하고 정리하면

$$\frac{\partial \mathbf{z}_L}{\partial b_i} = -\mathbf{K}_L^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{z}_L \quad (37)$$

와

$$\frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial b_i} = -\mathbf{K}_L^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{z}_N \quad (38)$$

식 (36)과 식 (37), (38)로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{z}_L}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial b_i} \quad (39)$$

이제 식 (30a)와 식 (32a)를 비교하자. 두 식에서 목적함수의 설계변수에 대한 미분치인 $\partial f/\partial b_i$ 는 동일하다. 제한조건의 설계변수에 대한 미분치 $\partial g_j/\partial b_i$ 또한 식 (30a)와 식 (32a)의 것이 같다. 상태변수 \mathbf{z}_N 과 \mathbf{z}_L 이 같고 등가정하중을 이용한 응답의 변환에서 비선형 응답을 선형응답으로 대체할 뿐 제한조건의 형태는 변하지 않으므로 $\partial g_j/\partial \mathbf{z}_N$ 과 $\partial g_j/\partial \mathbf{z}_L$ 도 동일하다. 마지막으로 식 (39)에 의해 식 (30a)와 식 (32a)가 완전히 동일한 식이 된다. 물론 Lagrange 승수 식인 식 (30b)와 식 (32b)도 서로 같다. 따라서 두 문제의 KKT 조건은 동일하다.

결론적으로 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계 알고리즘의 절차가 수렴한다면, 식 (1)의 기존의 비선형 반응 최적설계의 KKT 필요조건과 제안한 알고리즘 절차의 마지막 사이클에서 식 (7)의 선형 반응 최적설계의 KKT 필요조건은 같다.

4.4 수치예제

지금까지 살펴본 알고리즘의 절차, 수렴과 최적해를 논의하기 위하여 간단한 수학 예제에 적용하였다. 수학예제에서는 고차항이 포함된 다항식으로 구성된 문제를 고려하여 비선형성이 크고 간단한 문제를 만들었다. 등가정하중을 이용한 최적

Table 1 Optimum result for the numerical problem

Design variables	NROESL	Conventional method
1	21.217	21.242
2	22.182	22.151
Objective	43.398	43.393
No. of iterations (cycles)	9	3
No. of linear analyses	237	-
No. of nonlinear analyses	9	28
No. of nonlinear analysis except for gradient calls	-	22
CPU TIME ^{a)} (sec)	1.37	1.54

a) Pentium III 933MHz

설계와, 비선형 해석을 통한 유한차분법에 의한 민감도를 바탕으로 한 비선형 응답 구조최적설계의 결과를 비교하고, 그 결과의 유용성과 효율성에 대해 토의해 보고자 한다. 유한차분법을 이용한 비선형 응답 구조최적설계를 위하여 상용 최적설계 소프트웨어인 DOT 5.3⁽¹⁶⁾을 이용한다.

2개의 설계 변수를 갖고, 고차항을 포함하는 2개의 상태변수로 이루어진 다항식으로 구성된 연립방정식을 풀어 두 설계 변수의 합을 최소화하면서 두 상태변수가 각각 -50과 -60을 넘기지 않도록 설계하는 문제이다. 설계 변수는 b_1 과 b_2 이고, 비선형 상태변수는 z_{N1} 과 z_{N2} 이며 다음 식과 같이 정식화하였다.

Find b_1, b_2 (40a)

to minimize $b_1 + b_2$ (40b)

subject to

$$h_1 = \frac{1}{b_1^2}(z_{N1} - b_1)^2 + \frac{1}{b_2^2}(z_{N2} - b_2)^2 - 25 = 0 \quad (40c)$$

$$h_2 = \frac{1}{b_1^2}z_{N1}^3 + b_1z_{N1} - b_2z_{N2} + 10 = 0 \quad (40d)$$

$$g_1 = z_{N1} + 50 \leq 0 \quad (40e)$$

$$g_2 = z_{N2} + 60 \leq 0 \quad (40f)$$

$$10 \leq b_1, b_2 \leq 100 \quad (40g)$$

식 (40c)와 식 (40d)인 등호 제한조건으로 표현한 비선형 연립방정식을 풀기 위하여 Newton-Raphson법을 적용하였다. 비선형 연립방정식이 포함된 식 (40)은 등가정하중을 통하여, 다음 식과 같이 선형 연립방정식이 포함된 식으로 변형된다.

Find b_1, b_2 (41a)

to minimize $b_1 + b_2$ (41b)

subject to

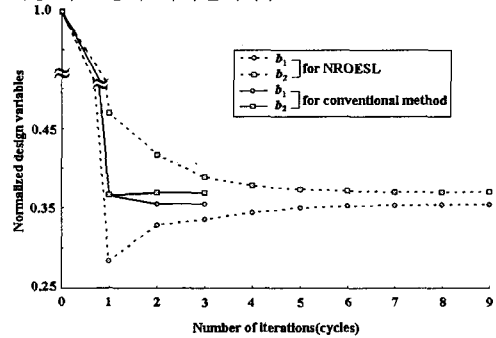


Fig. 6 History of optimization results of the numerical example

$$\hat{h}_1 = -\frac{2}{b_1}z_{L1} - \frac{2}{b_2}z_{L2} - f_{eq1} = 0 \quad (41c)$$

$$\hat{h}_2 = b_1z_{L1} - b_2z_{L2} - f_{eq2} = 0 \quad (41d)$$

$$g_1 = z_{L1} + 50 \leq 0 \quad (41e)$$

$$g_2 = z_{L2} + 60 \leq 0 \quad (41f)$$

$$10 \leq b_1, b_2 \leq 100 \quad (41g)$$

여기서 f_{eq1} 과 f_{eq2} 는 등가정하중이며 원래의 비선형 연립방정식인 $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ 를 풀어 상태변수 z_{N1} , z_{N2} 를 구한 후 다음 식으로부터 구한다.

$$\begin{Bmatrix} f_{eq1} \\ f_{eq2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{b_1} & -\frac{2}{b_2} \\ b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{N1} \\ z_{N2} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

초기 설계점 $b_1 = b_2 = 60.0$ 에 대하여 제안한 NROESL 방법과 유한차분법으로 민감도를 계산하는 기존의 방법으로 각각 문제를 풀어 비교하였다. Table 1에 유한차분법을 이용한 기존의 최적화와 등가정하중을 이용한 최적화에 대한 결과를 나타내었다. 두 방법 모두의 결과에서 두 부등호 제한조건은 활성제한조건이며 목적함수와 설계변수의 결과 값은 서로 거의 같았다. 제안한 방법에서는 비선형해석을 수행하는 회수는 9회로 기존방법의 28회보다 적었지만, 선형 응답 최적설계에서 선형해석을 237회 수행하였다. 하지만 비선형 응답 최적설계에서 시간적으로 가장 고가인 비선형 해석의 수행 회수가 제안한 등가정하중 방법을 이용하는 것이 적어 총 계산 시간에서 약간 빠른 것을 알 수 있다. 하지만 총 계산 시간은 프로그래밍 방법 등의 사용자 환경에 따라 절대적인 비교는 어려울 것으로 판단된다. 제안한 NROESL 알고리즘과 기존의 방법을 이용했을 때, 각 설계변수의 이력을 Fig. 6에 나타내었다.

5. 결론

비선형 반응과 선형 반응을 일치시킬 수 있는 등가정하중을 정의하였다. 이를 이용하여 비선형 응답 최적설계를 수행하는 알고리즘을 제안하였다. 제안한 방법의 주요 특징은 설계의 진행 방향을 계산하기 위하여 시간적 소모나 해석에 있어 힘든 비선형 방정식을 직접 풀지 않는다는 것이다. 비선형 응답 최적화를 이루는데 가장 큰 어려움은 많은 비선형 방정식을 풀어야 하는데 있었다. 그러나 제안한 알고리즘에서는 비선형 해석을 통해 등가정하중을 구하고 이를 이용하여 선형 응답 최적화를 수행한다. 선형 응답 최적화에서는 선형 대수 방정식으로 구성된 상태방정식을 풀기 때문에 비선형 방정식을 매번 풀어야 하는 수고를 덜 수 있다. 선형 응답 최적화의 결과를 다시 비선형 해석을 수행하고 등가정하중을 구하는 제시한 일련의 단계를 반복해 비선형 반응 최적화를 달성할 수 있다. 제안한 알고리즘에서도 매 사이클 단계마다 비선형 해석을 수행해야 하지만 이는 이전의 방법에 비해 월등히 적은 양으로 이 방법의 가장 큰 장점이 될 수 있다.

제안한 알고리즘의 수렴 조건에 대해 고찰하였다. 원래의 비선형 반응과 이때 등가정하중을 이용한 비선형 반응 사이의 설계변수에 대한 관계를 가정하여 제안한 알고리즘의 수렴조건을 설명하였다. 대표적인 수렴 조건으로 설계 영역 내에서 설계변수에 대하여 비선형 반응과 그때 등가정하중 하에서의 선형 반응이 같은 방향성을 지녀야 한다. 간단한 구조물의 해석적 문제에 적용하여 수렴조건이 갖는 의미에 대해 논의하였다. 제안한 알고리즘의 해의 최적성에 대하여 논의하였다. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계의 최적화 관점에서의 이론적 배경을 설립하였다. 제안한 알고리즘이 수렴한다는 가정에서 시작한다. 이전의 원래 비선형 응답 최적설계의 KKT 필요조건과 제안한 NROESL 알고리즘의 최종 사이클에서의 선형 반응 최적설계의 KKT 필요조건이 동일함을 보였다. 수확문제에 적용하여 NROESL 알고리즘과 기존의 비선형 반응 최적화 기법에 의해 얻은 결과와 비교하였다. 두 결과는 잘 일치하는 것을 보임으로써 제안한 알고리즘을 수치적으로 확인하였다.

후 기

이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에

의하여 연구 되었음 (KRF-2003-041-D00093).

참고문헌

- (1) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- (2) Kirsch, U., 1981, *Optimum Structural Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, USA.
- (3) Schmit, L.A., 1981, "Structural Synthesis - Its Genesis and Development," *AIAA J.*, Vol. 19, pp. 1249~1263.
- (4) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, USA.
- (5) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, New-York, USA.
- (6) Khot, N.S. and Kamat, M.P., 1985, "Minimum Weight Design of Truss Structures with Geometric Nonlinear Behavior," *AIAA J.*, Vol. 23, No. 1., pp. 139~144.
- (7) Ryu, Y.S., Haririan, M., Wu, C.C. and Arora, J.S., 1985, "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response," *Computers & structures*, Vol. 21, No. 1/2, pp. 245~255.
- (8) Wu, C.C. and Arora, J.S., 1987, "Design Sensitivity Analysis And Optimization Of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure," *AIAA J.*, Vol. 25, No. 8, pp. 1118~1125.
- (9) Tsay, J.J. and Arora, J.S., 1990, *Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems. Part 1/Part 2: General Theory*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 81, pp. 183~208.
- (10) Lee, T.H. and Arora, J.S., 1995, "A Computational Method for Design Sensitivity Analysis of Elastoplastic Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 122, pp. 27~50.
- (11) Kang, B.S., Choi, W.S. and Park, G.J., 2001, "Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *Computer & Structures*, Vol. 79, No. 2, pp. 145~154.
- (12) Choi, W.S. and Park, G.J., 2002, "Structural Optimization Using Equivalent Static Loads at All the Time Intervals," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2105~2122.
- (13) Park, K.J., Lee, J.N. and Park, G.J., 2003, "Structural Shape Optimization under Static Loads Transformed from Dynamic Loads," *Transactions of KSME A*, Vol. 27, No. 8, pp. 1363~1370.
- (14) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- (15) Park, K.J., 2004, *Nonlinear Response Structural Optimization Using Equivalent Static Loads*, Ph. D. Thesis, Hanyang University, Korea.
- (16) DOT Users Manual Version 5.3, 2003, Vanderplaats Research & Development, Inc., CO, USA.