대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.2, 139-168. Jun 2005

분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화 사례 연구[1)]

백 선 수* · 김 원 경**

본 연구에서는 분수의 곱셈에서 학생이 학교 수업을 받기 이전에 가지고 있는 비형식적 지식이 무엇인지를 알아보고, 그 지식을 형식화 할 수 있는 교수·학습 방법을 추출하기 위해서 문헌 검토를 통해 6차시의 사전 교수·학습안을 개발하고, 이를 바탕으로 초등학교 4학년 학생 7명에게 교수실험을 실시하였다. 교수실험 결과, 학생의 분수 곱셈에서의 비형식적 지식은 그림을 이용한 직접적 모델링 전략, 비형식적 언어에 의한 사고, 조작 가능한 수식에 의한 표상으로 나타났다. 또한, 교수실험과정에서 학생이 보인 반응을 분석하여 (분수)×(자연수), (자연수)×(분수), (단위분수)×(단위분수), (진분수)×(진분수)의 곱셈에서 비형식적 지식을 형식화하기 위한 교수·학습 방법을 제시하였고, 이에 터하여 분수의 곱셈에서 학생의 비형식적 지식을 형식적 지식으로 연결하기 위한 교수·학습 활동자료를 제시하였다.
본 연구에서 개발한 교수·학습 활동자료는 학생이 가진 비형식적 지식에 기초하여 형식적 지식을 의미 있게 학습할 수 있도록 할뿐만 아니라 더 나아가 수학적 사고력과 긍정적인 수학 성향을 길러줄 수 있을 것으로 기대한다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학생은 아무 것도 모르는 상태에서 학교수업에 임하지는 않는다. 학생은 학교에서 형식적인 수학을 배우기 이전에 이미 유아 때부터 자연스럽게 나름대로의 수학을 배워 왔고, 어떤 수학 개념에 대해서는 부분적이지만 제대로 이해하고 있기도 하다. 최근의 연구(Baroody & Coslick, 1998; Carpenter Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999)에 의하면 초등학교 학생은 일상 활동을 통해 많은 비형식적 지식을 획득하고 학교에서 배운 것과는 별개의 다양한 비형식적인 문제해결 전략을 개발한다고 한다.

미국수학교사협의회에서는 학생의 비형식적 지식과 관련하여 다음과 같이 언급하고 있다 (NCTM, 2000, p. 21, 재인용).

어린이들은 학교에 들어가기 휠씬 전에 많은 수학 개념들을 아주 자연스럽게 배운다(Gelman & Gallistel, 1978; Resnick, 1987). 그들은 일상생활의 경험을 통해서 수, 패턴, 모양, 양, 자료, 크기에 관하여 상당히 복잡한 일련의 비형식적인 개념을 점차 발달시키는데 이 개념 가운데 많은 것은 옳고 견고하다. … 교사는 학생에게 비형식적 전략을 말하게 함으로써 분명하게 인식하지 못했던 비형식적 지식을 깨닫도록 하고

* 대구와룡초등학교(ssbaek@tgedu.net)
** 한국교원대학교(wonkim@knue.ac.kr)
1) 이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2003-908-B00044).

형식적 지식을 구성하도록 도울 수 있다(Lampert, 1989; Mack, 1990).

학생이 가지고 있는 비형식적 지식은 교과서에 제시된 알고리즘과 같지 않을 수도 있고, 보다 더 효율적일 수도 있다. 따라서 교사는 학생이 백지상태에 있다고 생각하고 교수·학습을 하는 것이 아니라 이미 가지고 있는 비형식적 지식을 고려하여 학교에서 가르치려고 하는 형식적 지식과 의미 있게 연결시킬 수 있도록 안내해야 한다.

몇 연구(Olivier, Murray, & Human, 1990; Carpenter, et al., 1999)에 의하면 학생은 종종 형식적으로 배운 지식과 더불어 자신들의 비형식적인 지식을 매우 성공적으로 사용하고 있다고 한다. 그러나 학생의 비형식적 지식 중에는 학교에서 가르치는 형식적 지식과 일치하지 않거나 충돌할 수도 있는데 이 두 지식들 사이에 아무런 연결이 없다면 학교에서의 교수·학습은 매우 혼란스러워질 수 있다. Nunes, Schliemann, & Carraher(1993)는 브라질 어린이들이 시장이나 길거리 노점상에서 과일을 파는 상황에서 연구자가 손님으로 접근했을 때, 그들은 자신들의 비형식적인 방법을 이용하여 능숙하고 정확하게 계산하였음을 보였다. 어떤 어린이는 가격이 각각 5 Cruzeiros인 레몬 12개의 가격을 계산하기 위해서 한 번에 레몬 2개씩 묶어서 "10, 20, 30, 40, 50, 60"이라고 세었다. 그러나 학교에서 수업 받은 후, 똑같은 구조의 곱셈 문제)를 세로로 제시했을 때($\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$), 그 어린이는 처음에 있는 2를 내려서 쓰고 그 다음에 5를, 마지막으로 1을 써서 152라는 답을 얻었다.

이와 같이 효율적인 비형식적 지식을 가지고 있는 어린이가 학교에서 교육을 받은 후에 오히려 더 심각한 오개념을 형성하는 이유는 무엇일까? 이에 대한 주요 원인을 Whitney(1985)는 교사, 교육전문가, 연구자, 교과서 집필자가 학생의 비형식적 지식을 인식하지 못하거나 소중하게 생각하지 않기 때문이며, 또한 성인의 완성된 수학을 전수하려고 하기 때문이라고 지적한다. 실제로 우리나라 초등학교 수학교과서는 학생의 비형식적 지식을 형식화하기 위한 체계적인 구성이 부족하다. 예를 들면, (진분수)×(진분수) 곱셈에서의 형식적 지식은 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱한다는 원리를 발견하는 것이고, 이 경우 학생이 사용할 수 있는 비형식적 지식은 분할 전략인데 단위를 올바르게 분할하기 위해서는 단위를 재개념화 할 수 있어야 함에도 불구하고 현행 교과서에는 단위의 재개념화를 위한 내용도 부족하고 체계화도 되어 있지 않다.

Carpenter, et al.(1999)은 학생이 비형식적 지식에 기초하여 문제를 해결하는 과정에서 다양한 알고리듬을 창출할 수 있다고 하였고, Baroody & Coslick (1998)은 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결하여 수학을 이해하면 기계적인 암기로 이해하는 것보다 더 쉽게 이해하고, 더 긍정적 성향을 갖게 되며 다른 상황에 더 잘 전이할 수 있다고 하면서 비형식적 지식을 교수·학습을 위한 기초로 사용해야 한다고 하였다.

이에 따라 본 연구에서는 분수의 곱셈에서 초등학교 학생이 가진 비형식적 지식을 알아보고, 그 지식을 형식적 지식과 어떻게 연결시킬 수 있는지를 분석하고자 한다. 그리고 그것을 바탕으로 비형식적 지식을 형식화할 수 있는 교수·학습 활동자료를 개발하고자 한다.

2. 연구내용

본 연구에서는 위의 연구 목적에 따라 다음과 같은 연구내용을 설정하였다.

(1) 분수의 곱셈에서 학생의 비형식적 지식을 형식화할 수 있는 교수·학습 방법을 알아본다.
(2) 분수의 곱셈에서 비형식적 지식을 형식화할 수 있는 교수·학습 활동자료를 개발한다.

본 연구에서는 위의 연구내용을 수행하기 위해서 먼저 분수의 곱셈에서 비형식적 지식을 형식화하기 위한 사전 교수·학습안을 문헌 검토를 통해서 개발하고, 이를 초등학교 4학년 학생에게 투입하여 교수실험을 실시하고자 한다. 그리고, 교수실험의 결과를 분석하여 분수의 곱셈에 대한 학생의 비형식적 지식과 교수·학습 방법을 알아보고, 이에 터한 교수·학습 활동 자료를 제시하고자 한다. 본 연구의 Ⅱ장에서는 분수의 곱셈에 관한 이론적 배경과 선행연구를, Ⅲ장에서는 연구의 방법 및 절차를 살펴보기로 한다. 그리고, Ⅳ장에서는 사전 교수·학습안을 바탕으로 한 교수실험과 그 결과를 분석하고, Ⅴ장에서 결론을 맺는다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비형식적 지식

Baroody & Coslick(1998)은 학생의 지식은 나이나 학습내용에 관계없이 구체적인 지식으로부터 일반적인 지식으로 확장되고 그리고 추상적인 지식으로 발전한다고 하면서 지식을 직접적 지식, 비형식적 지식, 형식적 지식으로 나누었다. 직접적 지식은 외양에 의존하는 지식이다. 예를 들면, 5+3과 4+4는 외양적으로 다르므로 그 합이 다를 것이라고 생각하는 지식이다. 비형식적 지식은 일상의 경험에 기초한 구체적 지식이다. 예를 들면 5+3과 4+4를 손가락으로 세어서 그 합이 같음을 발견하는 지식이다. 형식적 지식은 학교에서 가르치는 지식이다. 예를 들면 5+3과 4+4가 수 개념에 의해 그 합이 같다는 것을 아는 지식이다.

어린이들은 학교에서 가르치고자 하는 개념들을 이미 나름대로 이해했음에도 불구하고 학교에서 의도하는 학습 절차들로 인해 더욱 혼란스러워 질 수도 있다. 어린이들은 성인들이 행하는 것과 똑같은 방식으로 수학을 생각하지 않을 수도 있다. 여러 연구(Carraher, Carraher, & Schliemann, 1987; Lave, Murtaugh, & de la Rocha, 1984; Saxe, 1988)에서 어린이들은 종종 실생활의 수학문제를 환경과의 상호작용으로부터 전수 받고, 스스로 발명한 전략을 이용하여 해결한다는 것을 입증했다. 특히, Hiebert & Behr(1988)은 어린이들의 비형식적 전략이 기호조작에 의존하기보다는 구체적 상황이나 문맥을 통해 시각적으로 이루어진다고 하였다. 이와 같은 비형식적 전략은 문제를 종종 창의적이며 논리적이고 오류가 없는 방식으로 해결할 수 있도록 해 준다. 예를 들어, Lave et al.(1984)은 학생에게 치즈 $\frac{2}{3}$컵의 $\frac{3}{4}$을 발견하게 했을 때, "측정용 컵에 치즈를 $\frac{2}{3}$만큼 채우고 그것을 판에 부어서 원형으로 만들고 그 위에 십자 표시를 한 후 그 중의 한 부분($\frac{1}{4}$)을 떼내고 나머지($\frac{3}{4}$)를 내놓는 것"을 발견했다.

따라서 학생으로 하여금 스스로 지식을 구성하도록 하려면 그들이 수학을 어떻게 생각하는지 그리고 그들의 비형식적 지식은 무엇인지를 이해할 필요가 있다(Carpenter et al., 1999). 학생이 수 개념에 관해 얼마나 이해하고 있는지를 분명하게 인식하지 못한다면 학교에서 가르치고자 하는 수학은 학생이 일상생활에서 사고하고 문제를 해결하는 방식과 단절될 수밖에 없다.

수학교육학자들은 형식적인 수업을 받기 전에 학습된 지식을 여러 가지 이름으로 명명하였다: 직관적인 지식(Leinhardt, 1988), 상황화된 지식(Brown, Collins, & Duguid, 1989), 비형식적 지식(Baroody & Coslick, 1998; Carpenter, et al., 1999), 일상의 수학(Guberman, 1996), 거리수학(Nunes, Schiliemann, & Carraher, 1993). 어떤 이름으로 불리던지 간에 이와 같은 유형의 지식은 올바르거나 올바르지 않을 수 있으며, 학생 개인에 의해 구성되어 적용된 실생활의 상황적인 지식으로 특성화될 수 있다.

한편, Becker & Selter(1996)는 비형식적 지식을 학생이 학교 밖에서 획득한 능력과 지식뿐만 아니라 직접적인 지도를 받지 않고 학교에서 개발한 개념들을 포함하여 생각한다. 더욱이 비형식적 지식에는 '사전 지식'도 포함된다. 예를 들어, Carpenter et al.(1999)은 학생이 6 더하기 8에 해당하는 문제를 8에서 1을 6에 빌려준 후 7+7=14와 같이 해결한 '수 구구 이용 전략'도 비형식적 지식으로 보고 있다. 그리고 Baroody & Coslick(1998)의 경우에도 학생이 3 나누기 $\frac{3}{8}$에 해당하는 문제를 3에서 $\frac{3}{8}$씩 동수누감한 방법을 비형식적 지식으로 보았다.

이와 같은 여러 학자들의 비형식적 지식의 정의를 고려하여 본 연구에서는 비형식적 지식을 특정한 수학 개념에 대하여 학교 수학을 배우기 전에 획득한 지식 즉, 학생이 실생활 경험으로부터 자연스럽게 획득한 지식과 사전 지식, 그리고 스스로 발명한 지식으로 정의한다.

2. 분수에 대한 비형식적 지식의 특징

분수에 대한 학생의 비형식적 지식의 일반적 특성에 대해서는 지난 몇 년 동안 의미있는 연구가 이루어져왔다. 몇 연구(Kieren, 1988; Leinhardt, 1988)에서 학생은 분수에 대해 많은 비형식적 지식을 가지고 수업에 임한다는 것을 보였지만, 그러한 비형식적 지식은 본질적으로 다음과 같은 세 가지 특징으로 제한되어 있다 (Mack, 1993).

가. 분할과 관련된 비형식적 지식

분수에 대한 학생의 비형식적 지식은 근본적으로 '부분-전체'의 개념 즉, 분수를 분자, 분모라는 각각의 부분으로 이루어진 전체로 보는 개념에 기초하고 있다. 학생은 분수를 단위를 분할한 것 또는 단위를 비교하여 나타난 하나의 양으로서가 아니라, 전체를 구성하는 부분의 입장에서 생각한다. 예를 들어, $\frac{3}{4}$과 같은 분수를 학생은 '네 조각으로 나누어진 피자의 세 부분' 또는 '피자를 세 조각 가지고 있는데, 전체는 네 조각이다'라고 생각한다(Leinhardt, 1988; Mack, 1990). 따라서 분수에 대한 학생의 비형식적 전략은 단위를 부분으로 나누고, 각 부분을 마치 독립된 단위나 자연수처럼 다룬다고 할 수 있다(Kieren, 1988; Leinhardt, 1988; Mack, 1990).

학생이 분수를 이해하는 데에는 분할이 중요한 역할을 한다(Pothier & Sawada, 1983). Leinhardt(1988)는 학생의 비형식적 분할 전략은 처음에 분수를 이해하는데 걸림돌이 되는 것처럼 보일 수 있으나, 그러한 분할 전략이 분수의 크기를 고려하는 전략으로 전이됨으로써 그들의 문제 해결과정은 보다 유연해지고 정교하게 되며 분수를 단일체로 표상하게 된다고 하였다.

나. 비형식적 지식과 단위의 재개념화

학생이 자연수의 학습에서 분수의 학습으로 넘어갈 때, 수의 속성과 단위의 개념화와 관련하여 사고의 변화가 일어날 필요가 있다(Hiebert & Behr, 1988; Behr, Harel, Post, & Lesh, et al., 1993). 저학년에서 수와 단위의 속성과 관

련된 학생의 경험은 학년이 올라갈수록 점점 정교하게 된다. 자연수의 덧셈과 뺄셈에서 각각의 자연수는 단일체 또는 단위를 표상하는 것으로서 생각될 수 있지만, 자연수의 곱셈과 나눗셈에서는 단위가 단일체로 이루어진 것에서부터 다양체로 이루어진 것으로 변하는 과정으로 넘어간다(Steffe, 1988). 즉, 3+4=□의 문제는 3이라는 단일체와 4라는 단일체의 합이다. 그러나 3×4=□의 문제는 3이라는 단위가 4번 포함되어 있다는 의미이므로 다양체라고 할 수 있다.

학생이 3~4학년이 되면 분수를 접하게 되고 단위의 속성에 있어서 추가적인 변화에 직면한다. 그 중에서 두 가지의 중요한 변화는 다음과 같다.

첫째, 학생이 분수를 부분-전체의 의미로서 생각할 때, 단위가 셀 수 있는 이산량에서 측정하거나 분할할 수 있는 연속량으로 바뀌고, 단위를 $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$의 형태인 단 하나의 수로 나타낼 수 있다(Kieren, 1988).

둘째, 학생이 분수의 곱셈과 나눗셈에서 연산자의 의미를 접함에 따라 단위의 개념이 분자가 하나의 단위를 나타내고 분모가 또 다른 단위를 나타내는 단위의 비교로 바뀐다. 그리고 그들은 두 개의 원래의 단위를 비교하여 새로운 종류의 단위를 만든다(Schwarz, 1988).

따라서 학생에게 분수를 명확하게 이해시키기 위해서는 분수를 처음 지도할 때, 단위에 대한 개념을 다루어야한다.(Behr at al., 1993; Kieren, 1993).

최근의 연구(Leinhardt, 1988; Mack, 1993)에 의하면 분수에 대한 학생의 비형식적 개념이 처음에는 폭넓지도 유연하지도 않기 때문에 학생은 종종 적절한 단위를 정하는 것을 어려워한다고 한다. 학생은 종종 문제를 표상하는 그림이나 자료에서 확인된 모든 요소들의 단위를 임의적으로 변경한다. 이 때문에 1보다 큰 분수를 다루는 능력이 떨어진다. 다음의 프로토콜은 그와 같은 경우를 예시한다(Mack, 1993, p. 92).

Mack: 두 분수 $\frac{5}{8}$나 $\frac{5}{4}$ 중에서 작은 것이 어느 것인지 말해봐.

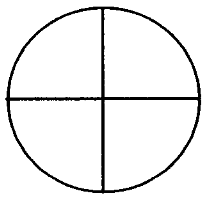
Tony: 글쎄요. $\frac{5}{4}$와 같은 것은 불가능하지 않나요?

Mack: 왜?

Tony: 왜냐하면, … 만약 4조각의 피자 중에 5조각을 가지고 있다면, … 하지만 어떻게 4개 중에 5개를 가질 수 있죠? 어떻게 $\frac{5}{4}$를 가질 수 있죠?

Mack: 그럼, 어떻게 $\frac{5}{4}$를 가질 수 없지?

Tony: 왜냐하면 보세요([그림 Ⅱ-1]을 그린다). 4개가 있잖아요, 하지만 어떻게 5개를 가질 수 있죠?



[그림 Ⅱ-1] Tony의 그림

Behr et al.(1993)은 학생이 가진 분수에 대한 부분-전체의 비형식적 지식은 다양한 방식으로 단위를 재개념화하지 않았기 때문에 처음에는 분수를 이해하는데 장애가 될 수가 있으나 1보다 큰 분수를 다루는 활동을 통해서 적절한 단위를 정하는데 성공했음을 입증했다.

다. 비형식적 지식과 형식적 지식의 초기의 단절

몇 연구자(Carraher et al., 1987; Mack, 1990)는 기호를 조작할 필요가 없는 실생활 문제를 학생에게 구두로 제시하면 비형식적 지식을 이용하여 문제를 해결하나, 문제를 기호나 그림

또는 구체적인 표상으로 제시하면 학생은 문제를 해결하기 위해서 형식적인 기호나 절차에 의존하거나 그림이나 구체적인 표상을 조작하려고만 한다는 것을 보였다.

Mack(1990)은 분수 개념에 대한 6학년 학생의 비형식적 지식이 처음에는 형식적 기호나 절차에 관한 지식과 연결되어 있지 않음을 발견했다. 그의 연구에서 학생은 실생활 문제를 성공적으로 해결할 수 있었고 자신의 풀이를 분수에 대한 비형식적 지식을 바탕으로 일관되게 설명했으나, 기호로 제시된 문제에 대한 자신의 풀이를 종종 형식적 기호나 알고리듬적인 절차와 관련된 잘못된 지식의 관점에서 설명했다. 그의 연구에서 사용된 문제는 다음과 같이 실생활 상황에서 분수 문제를 제시한 후 기호로 나타낸 것이다.

「똑같은 크기의 피자를 가지고 있다고 하자. 그들 중의 하나를 똑같은 크기의 여섯 조각으로 자르고, 다른 하나를 똑같은 크기의 여덟 조각으로 잘라라. 만약에 네가 각 피자에서 한 조각을 가진다면 어느 것이 더 크겠니? 그리고 나서 $\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{8}$중에서 어느 분수가 더 큰지 말해 보아라.」

위의 피자 문제 상황에서 모든 학생은 "여섯 개로 자른 것이 조각 수가 더 적기 때문에 각 조각이 더 크다"고 대답했다. 그러나 기호로 제시된 문제에 대해서는 한 학생만 제외하고 모두가 8은 6보다 더 크기 때문에 $\frac{1}{8}$이 더 크다고 말했다. 학생은 이렇게 오답이 나온 이유를 "여기에서는 과자에 대해서 이야기하고 있고, 여기에서는 수에 관하여 이야기하고 있잖아요"와 같이 변명한다(Mack, 1990).

이와 같이 분수에 대한 학생의 비형식적 지식은 형식적 기호나 절차에 대한 지식과 연결되어 있지 않다. 따라서 학생의 비형식적 지식을 고려하지 않은 수업은 유사한 문제라도 상황이 다르면 다른 오답이 나오기 때문에 교수·학습의 초기에 분수를 지도하는데 장애가 된다.

3. 분수 곱셈에서의 비형식적 지식의 형식화 방안

Mack(1993)은 친숙한 상황으로 이루어진 문제와 기호로 이루어진 문제를 교대로 제시하면 학생이 분수 기호를 자신들의 비형식적인 지식과 연결한다는 것을 발견했다. 그는 학생에게 '$4-\frac{7}{8}$' 이라는 기호로 제시된 문제와 '과자 4개에서 1개의 $\frac{7}{8}$을 먹었을 때 남는 과자의 수는 얼마인가?' 라는 상황문제를 교대로 제시했을 때, 학생은 기호적인 표상과 비형식적 지식과의 관계를 인식하여 문제를 해결했다는 것을 보였다.

몇 연구자(Behr et al., 1993; Empson, 1999; Kieren, 1988; Olive, 1999)는 분할에 관한 지식 즉, 전체 또는 단위를 똑같은 크기로 나누는 과정이 분수 곱셈에 대한 이해를 위한 기초를 제공할 수 있다고 제안한다. 특히, Behr et al.(1993)과 Kieren(1988)은 분할에 관한 지식이 분수의 의미 특히, 연산자의 의미를 이해하는데 도움이 된다고 제안한다. "연산자"의 의미는 분수가 함수 기계의 역할을 맡아서 어떤 양에 작용하여 새로운 양을 발생시키는 것인데, 예를 들어, 사과 10개의 $\frac{2}{5}$는 4개가 된다. 그리고 이러한 연산자의 의미는 분수 곱셈 즉, '전체의 부분의 부분을 찾는 것'의 의미를 이해하는데 도움이 된다. 예를 들어, '$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=$'은 피자 한 판의 $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{4}$을 발견하는 것, 또는 한 단위의 $\frac{2}{3}$인 어떤 양을 그것의 원래 크기의

$\frac{3}{4}$으로 축소하는 것을 뜻한다.

학생이 분할에 관한 지식에 기초하여 분수 곱셈을 이해하기 위해서는 단위(무엇을 전체 또는 1로 볼 것인가?)를 재개념화 할 수 있어야 한다(Behr et al., 1993; Olive, 1999). 단위의 재개념화는 분할해야 할 적절한 단위를 결정할 수 있을 뿐 아니라 분할된 결과의 단위도 해석할 수 있게 된다. 예를 들어, $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=$의 문제를 생각해보자. 학생이 이 문제를 해결할 수 있는 한 가지 방법은 처음에 $\frac{2}{3}$를 전체 단위(즉, 피자 한 개)의 일부분으로 보고, $\frac{2}{3}$를 분할해야 할 새로운 단위로서 생각하고, 마지막으로 $\frac{2}{3}$를 4개의 같은 크기로 나누는 것이다. 그 다음에 $\frac{2}{3}$단위의 $\frac{3}{4}$ 혹은 $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{4}$의 3배를 생각하고, 그리고 분할한 결과인 $\frac{1}{2}$을 알기 위해 원래의 단위(즉, 피자 한 개)와 연관시킨다(Olive, 1999). 이와 관련하여 Steffe(1988)은 학생이 다음과 같은 4개의 서로 다른 유형의 단위를 재개념화하고 분할할 수 있어야 한다고 이론화했다.

(1) 세기단위(counting units): 세기단위는 "단일성"을 충족하는 서로 독립적인 별개의 양이다. 예를 들어, 과자가 12개 담긴 한 접시는 각각 1개씩의 과자로 이루어진 12개의 접시로 생각할 수 있다. 마찬가지로, 분수에 대한 세기단위는 전체 중에서 일부분이다. 즉, '$\frac{2}{3}$'는 '3조각들 중의 2개'를 의미한다.

(2) 합성단위(composite units): 합성단위는 공통적인 속성을 가진 단위들의 집합이다. 예를 들어, 과자 12개가 담긴 접시에 서로 다른 4종류의 과자들이 똑같은 개수로 이루어져 있다면 각각의 과자 종류는 하나의 단위로서 고려할 수 있고, 과자 접시는 4개의 하위 단위로 구성된 하나의 단위로 생각할 수 있다. 마찬가지로, 피자 한 판의 $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$씩 두 단위로 구성된 한 단위로서 생각할 수 있다.

(3) 측정단위(measurement units): 측정단위는 전체를 동일한 부분으로 나누었을 때의 한 부분의 단위이다. 예를 들어, 과자 12개가 담긴 접시에서 서로 다른 4종류의 과자는 접시에 있는 과자의 $\frac{1}{4}$이다. 마찬가지로, 피자 한 판에서 똑같은 3부분들 중 2개는 피자 한 판의 $\frac{2}{3}$이다.

(4) 단위의 단위(units-of-units): 단위의 단위는 새로운 포괄적인 단위로 재개념화되는 합성단위라고 할 수 있다. 예를 들어, 과자 12개가 담긴 접시 또는 3개 짜리 4단위는 12개짜리 한 단위 또는 한 다스로 재개념화할 수 있다. 마찬가지로, 피자의 한 판의 $\frac{4}{6}$는 $\frac{2}{6}$의 2단위 또는 $\frac{2}{3}$의 1단위로서 재개념화할 수 있다.

단위를 재개념화 하고 분할하기 위해서 분할 지식을 이용하는 경우에는 문제 유형에 의해 영향을 받을 수 있다 (Behr et al, 1993 Steffe, 1988). 예를 들어, 두 진분수의 곱셈 문제 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$에서 a와 d사이의 관계는 다음과 같은 세 가지 유형이 있다.

① 두 항이 서로 같은 경우: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{a}$

② 한 항이 다른 항의 배수인 경우: $\frac{na}{b}\times\frac{c}{a}$ 또는 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{na}$

③ 두 항이 서로 소인 경우: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$

따라서, 두 진분수 곱셈에서 학생의 비형식적 지식을 형식화 하는 방안은 단위를 분할하고 재

개념화할 수 있는 세 가지 유형의 쉬운 분수 곱셈의 상황문제를 먼저 제시해 주는 것이다.

4. 선행연구의 고찰

분수 영역에서의 학생의 비형식적 지식의 일반적 특성에 관한 연구 중에서 본 연구와 직접적으로 관련이 있는 주요 연구를 개괄적으로 고찰해 보면 다음과 같다.

Song & Ginsburg(1985)는 4~5세의 미국 어린이가 한국 어린이보다 훨씬 더 비형식적 지식을 잘 사용했지만, 8세의 한국 어린이가 절차적인 문제와 개념적인 문제에서 형식적 수학을 훨씬 더 잘 해결했다고 하면서 이와 같은 차이는 학교교육에서 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결을 어느 정도 고려했느냐의 차이라고 하였다.

Leinhardt(1988)는 4학년 학생의 분수에 관한 비형식적 지식을 평가한 결과, 부분-전체, 분수의 대소 관계, 1과 같은 분수 찾기 등의 개념을 잘 이해하고 있다고 하면서 학생의 비형식적 지식은 수학적인 것처럼 보이지 않는 문제 상황에서만 유용하다는 결론을 내렸다.

Mack(1990)은 분수 개념에 대한 6학년 학생이 비형식적 지식이 처음에는 형식적 기호나 절차에 관한 지식과 연결되어 있지 않음을 발견했다. 그의 연구에서 학생은 처음에 실생활 문제를 성공적으로 해결할 수 있었고 자신의 풀이를 분수에 대한 비형식적 지식을 바탕으로 일관되게 설명했으나, 기호로 제시된 문제에 대한 자신의 풀이를 종종 형식적 기호나 알고리즘적인 절차와 관련된 잘못된 지식의 관점에서 설명했다.

Mack(1993)은 기호로 이루어진 문제와 친숙한 상황으로 이루어진 문제를 교대로 제시했을 때, 학생은 기호적인 표상과 비형식적 지식과의 관계를 인식하여 문제를 해결했음을 밝혔다.

Baroody & Coslick(1998)은 학생이 일상의 활동을 통해 상당한 비형식적 지식을 획득하였음을 밝히고, 그들의 비형식적 지식은 기호로 표현된 수학이나 학교에서 가르치는 수학을 이해하기 위한 중요한 기초가 될 수 있다고 하면서 형식적 지식과 비형식적 지식의 연결, 절차와 개념의 연결, 다양한 표상이나 모델의 연결, 수학 주제들 사이의 연결, 수학과 일상생활의 연결을 통하여 학생이 수학을 이해하게 된다면 기계적인 암기에 의한 수업보다 더욱 긍정적인 성향을 갖게 되고, 더욱 쉽게 학습할 수 있으며 더욱 내용을 잘 기억할 수 있고, 다른 상황에 더욱 잘 전이 할 수 있다고 하였다.

Kim(2002)은 초등학교 1학년 학생을 대상으로 동치와 덧셈에 대해 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결할 수 있는 프로그램을 개발하였으나, 학생이 실제로 두 지식을 어떻게 연결하는지에 대한 교수실험은 실시하지 않았다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구설계 및 연구대상

본 연구에서는 분수의 곱셈에서 학생의 비형식적 지식과 그 형식화를 위한 교수·학습 방법을 알아보기 위해서 4차시의 교수실험을 연구자(초등학교 교사)의 지도아래 방과 후에 실시하였다.

교수실험의 대상은 청원군에 위치한 W초등학교 4학년 학생 중 분수의 곱셈을 형식적으로 지도 받지 않은 7명의 희망자이다. 이 학생의 학업성취수준은 보통이며, 교수실험 이전에 이미 분수의 개념과 덧셈, 뺄셈에 대한 형식적 수업을 받았지만 보충학습의 의미로 이 부분에

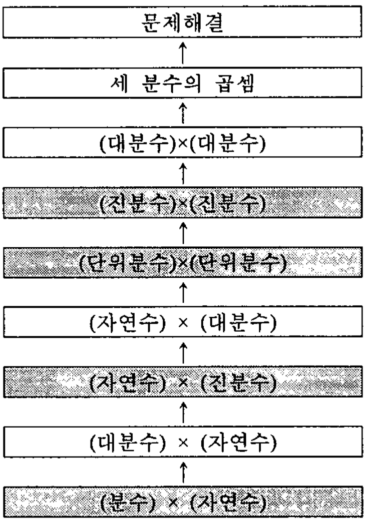
대한 형식적 수업을 연구자가 재차 지도하였다.

교수실험을 하기 위해서 연구자는 먼저 이론적 배경에서 살펴본 분수의 곱셈에서의 비형식적 지식의 특징과 형식화 방안을 바탕으로 6개의 사전 교수·학습안을 개발하고, 이를 실험 대상 학생에게 투입하였다. 사전 교수·학습안은 교수실험 이전에 개발되었으나 각 실험과정에서 나타나는 학생의 반응을 부분적으로 다음 차시의 사전 교수·학습안에 반영하였다. 모든 교수실험은 비디오로 촬영하였고, 이를 전사하여 분석한 결과를 바탕으로 전체 사전 교수·학습안을 수정·보완하여 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화를 위한 교수·학습 활동자료로 제시하였다.

2. 사전 교수·학습안 개발

가. 내용선정

교육인적자원부(2001)에서 발행한 초등학교 수학교과서 5-가에서 분수의 곱셈에 대한 학습 과정은 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 분수 곱셈의 학습 과정

이 그림에서 색칠된 부분이 분수의 곱셈원리를 이해하는 데 핵심적인 부분이고, 그 밖에 대분수의 연산이나 세 분수의 곱셈은 그 직전의 학습에서 탐구하여 알게 된 형식적 지식을 그대로 적용하면 되는 절차적 지식이므로 학생의 비형식적 지식이 발현될 여지가 적다.

따라서 본 연구에서는 교수실험에서 사용될 사전 교수·학습안의 내용으로 [그림 Ⅲ-1]에서 색칠된 부분을 선정하였다.

나. 사전 교수·학습안 개발 기준

수학교과서 5-가의 (자연수)×(분수)의 곱셈에서는 문장제 문제가 식으로 제시되어 있기 때문에 학생이 문장제 문제를 해결하기 위해서 어떤 연산자를 사용할 것인지를 고민할 필요가 없다. 또한 (자연수)×(분수)의 곱셈은 동수누가의 의미로 해결할 수 없으므로 곱셈의 연산자의 의미로 해결해야하나 교과서에는 연산자의 의미가 약하고, 이를 학습할 수 있는 기회가 많이 부족하다. 한편, (진분수)×(진분수) 곱셈에서의 형식적 지식은 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱한다는 원리를 발견하는 것이다. 이 경우 학생이 사용할 수 있는 비형식적 지식은 분할 전략인데 단위를 올바르게 분할하기 위해서는 단위를 재개념화할 수 있어야 함에도 불구하고 현행 교과서는 단위의 재개념화를 위한 체계적인 구성이 부족하다.

따라서 본 연구에서는 학생의 비형식적 지식을 고려하여 다음과 같은 세 가지를 사전 교수·학습안 개발의 기준으로 삼았다.

첫째, 학생의 비형식적 지식을 자극할 수 있는 문제를 고안한다. 선행연구에서는 과자 세 개를 다섯 명이 똑같이 나누는 문제(Kieren, 1988), 과자 한 개의 $\frac{7}{8}$을 먹는 문제(Mack, 1990), 뱀장어에게 먹이주기 문제(Hart, 1988) 등이 학생의 비형식적 지식을 자극하도록 고안

되어 제시되었다.

둘째, 다양한 유형의 분수 곱셈 상황에서 곱셈의 연산자의 의미를 이해하고, 단위를 분할하여 재개념화 할 수 있도록 구성한다.

셋째, 학생이 표상하기 쉬운 친숙한 상황과 기호로 이루어진 문제를 교대로 제시하여 비형식적 지식을 형식적 기호와 절차로 나타낼 수 있도록 조직한다.

이와 같은 기준에 따라 분수의 곱셈 유형별로 6개의 사전 교수・학습안을 개발하였고, 이를 교수실험에 투입하였다.

IV. 교수실험 및 연구결과

1. 교수실험

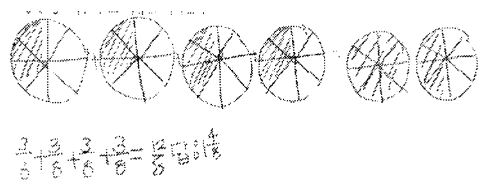
교수실험은 학생이 분수의 곱셈에서 어떤 비형식적 지식을 가지고 있고, 그러한 지식을 형식적 지식과 연결시킬 때 어떠한 교수・학습방법이 필요하며, 학생의 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결하기 위해서는 개발한 사전 교수・학습안을 어떻게 수정・보완해야할 것인지에 초점을 두고 분석하였다.

가. 사전 교수・학습안 1 : (분수) × (자연수)

1) 문제 상황: 피자 한 판의 $\frac{3}{8}$씩 놓여 있는 접시가 4개 있다. 접시에 있는 피자를 한 곳에 모으면 얼마나 되는가?

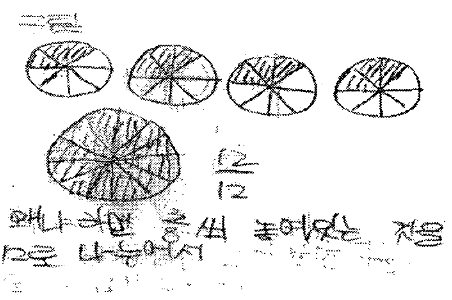
2) 실험결과 분석

4명의 학생은 [그림 IV-1]에 나타난 세명이의 풀이와 같이 원그림을 이용한 직접적인 모델링 전략을 사용하거나 동수누가의 의미를 이용하여 같은 수를 반복하여 더하는 덧셈식으로 해결했다. 그리고 1명의 학생은 교과서에 제시된 형식화된 분수와 자연수의 곱셈식 $\frac{3}{8}\times 4$ 으로 나타내었다.



[그림 IV-1] 세명이의 풀이

그런데 2명의 학생이 체계적인 오류를 보였다. [그림 IV-2]에 제시된 수아의 오류는 단위에 대한 개념이 세기단위에 기초하고 있고, 단위를 제대로 인식하지 못했기 때문이라고 할 수 있다.



[그림 IV-2] 수아의 풀이

즉, $\frac{3}{8}$은 '8조각들 중의 3개'를 의미하므로 3개 짜리를 4번 모으면 모두 12개가 되고, 전체 12개 중에 12개가 있으므로 $\frac{12}{12}$라고 대답하였다고 할 수 있다. 오류를 범하게 된 또 다른 원인은 문제 상황의 영향 때문이라고도 할 수 있다. 문제 상황을 자세히 살펴보면 '접시에 있는 피자를 한 곳 모으면…'으로 되어 있다. 따

라서 상황을 충실하게 표상하면 한 접시에 12조각을 모으게 되고, 그것을 그림으로 나타내면 $\frac{12}{12}$가 된다. 원래 "한 곳"이라는 말을 문맥에 포함한 이유는 래혁이와 같은 오류를 피하기 위해서였다. 래혁이의 경우에는 수아가 표상한 그림 모델 중에 피자가 네 접시 있는 위의 그림만을 표상하였다. 이와 같이 단위를 피자 한 접시로 보지 않고 피자 네 접시를 단위로 볼 경우에는 전체 조각 수가 32조각이 되고, 그 중에 12조각이 담겨져 있기 때문에 $\frac{12}{32}$라는 반응을 보일 수 있다. 이 결과는 $\frac{3}{8}\times4 = \frac{3\times4}{8\times4} = \frac{12}{32}$와 같이 분자, 분모에 모두 4를 곱한 것이다.

따라서 이와 같은 문제 상황에서 학생이 올바르게 형식화할 수 있도록 하기 위해서는 '한 곳'이라는 말과 '접시'라는 말이 단위를 인식하는데 방해가 되므로 가급적 쓰지 않아야 할 것이다. 또한, 위의 문제 상황은 곱셈의 동수누가의 의미로 해결할 수 있으므로 오류를 보이는 학생에게는 피자의 양을 2배부터 4배까지 점차적으로 증가시키면서 문제를 해결하도록 해야 할 것이다. 담당교사는 수아와 래혁이의 풀이를 전체토론에 제시하였고, 토론과정에서 준혁이는 단위가 다름을 지적하여 올바른 풀이를 유도하였다. 도영이는 $\frac{1}{8}$짜리 조각이 3개씩 4번 있으므로 $\frac{3}{8}$의 분자에만 4를 곱해야 한다는 형식적 지식에 도달하였다.

나. 사전 교수·학습안 2 : (자연수) × (분수)

1) 문제 상황: 길이가 12m인 색 테이프가 있다. 이 테이프로 선물을 포장하기 위해서 $\frac{2}{3}$를 사용하였다. 사용한 색 테이프의 길이는 몇 m인가?

2) 실험결과 분석

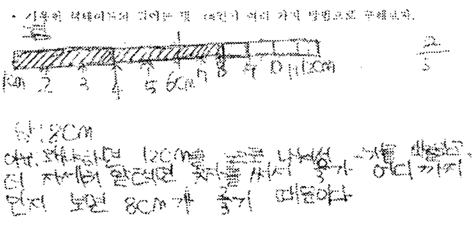
학생은 이 문제를 해결하기 위하여 띠 모델(수아, 래혁, 준혁), 원 모델(세명, 준혁), 직사각형 모델(지홍), 낱개로 이루어진 이산량 모델(도영) 등 다양하게 분할 전략을 이용하여 답이 8m라는 것을 발견하였다. 그러나 자신이 구한 방법을 식으로 나타내어보게 했을 때, 자연수의 연산으로 변형하여 비형식적으로 나타내기는 했지만 (자연수)×(분수)로 나타내지는 못했다.

수아는 프로토콜 025, 027, 029에서 보는 것처럼 처음에는 12m의 $\frac{2}{3}$를 어떻게 구해야할지 몰랐다.

025 수아: (12m 막대를 그린 후, 어떻게 해야할지 모르고 있음)
026 교사: (수아가 그린 그림을 보면서) 12m의 $\frac{2}{3}$가 뭐지?
027 수아: …
028 교사: 그럼 $\frac{2}{3}$가 뭐지?
029 수아: …
030 교사: 그럼, 사과 한 개의 $\frac{2}{3}$를 먹으면 얼마나 먹게 되지?
031 수아: 사과 한 개를 3개로 똑같이 나눈 것 중의 2개예요.
032 교사: 그럼, 이것의 $\frac{2}{3}$는?
033 수아: 이것을 똑같이 나눈 것 중의 2개예요. 아, 알았다. (12m를 똑같이 3등분하여 2등분을 나타내려고 함)

비록 수아가 처음에 12m의 $\frac{2}{3}$를 어떻게 구할지 몰랐지만 교사가 수아에게 사과 한 개의

$\frac{2}{3}$의 의미를 묻고 그 의미를 깨닫게 함으로써 [그림 Ⅳ-3]과 같이 띠 모델을 이용하여 문제를 해결하게 되었다.

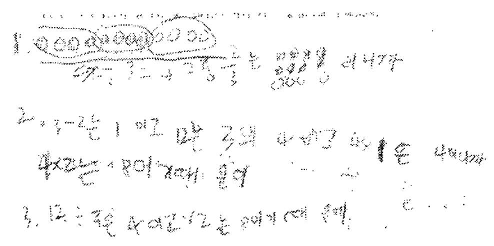


[그림 Ⅳ-3] 수아의 풀이

Pirie & Kieren(1994)은 학생이 개념을 보다 철저히 이해하기 위해서는 종종 초기의 이해 상태로 되돌아갈 필요가 있고 만일 초기의 이해 상태로 되돌아 갈 수 없는 경우에는 교사가 적절히 안내하여 초기의 이해상태로 되돌아갈 수 있도록 해야 한다고 했다. 그렇다면 학생이 분수곱셈에서 이용할 수 있는 초기의 이해 상태는 무엇인가? 그것은 수아의 프로토콜 031에 나타난 것과 같이 '분할'에 관한 비형식적 지식이다. 교사가 수아의 초기 상태의 비형식적 지식을 자극함으로써 수아는 형식적 해결에 접근할 수 있었다.

도영이는 12m를 [그림 Ⅳ-4]에서와 같이 낱개로 그려서 해결했다. 그리고 자신이 해결한 과정을 비형식적 수식으로 나타내었다. 여기서 도영이의 두 번째 해결 방법을 보면 잘 이해가 되지 않는다. 그런데 도영이의 반응을 토대로 그의 의도를 살려서 말들을 추가해 보면 다음과 같은 의미가 된다.

'3-2는 1($\frac{1}{3}$을 의미함)이고, 12는 3의 4배이고 4×1(여기서 1이란 $\frac{1}{3}$을 의미)은 4이니까 4×2(여기서 2란 $\frac{2}{3}$를 의미함)는 8이기 때문에'



[그림 Ⅳ-4] 도영이의 풀이

도영이의 세 번째 해결 방법은 두 번째 방법을 좀 더 간단히 표현한 것이다. 그리고 그 방법을 더 간단히 나타낸 것이 프로토콜 035에서 볼 수 있는 세명이의 방법이다. 세명이는 원을 그려서 분할 전략을 이용하여 8m를 구하고, 그 결과를 '12÷3×2=8'과 같이 나타냈다.

학생이 다양한 모델을 이용하여 발표한 후에,

034 교사: 자, 이 문제를 간단하게 식으로 나타내면 어떻게 될까?

035 세명: 12 나누기 3 곱하기 2예요. 왜냐하면 12 나누기 3을 하면 $\frac{1}{3}$이 되고 $\frac{2}{3}$는 그것의 2배이니까요.

036 교사: 음, 그럼 12와 $\frac{2}{3}$라는 말을 사용해서 나타낸다면? 그것을 식으로 나타낸다면? … 여기(세명이가 나타낸 방법을 지적하면서)에서처럼 12 나누기 3 곱하기 2를 이용할 수도 있겠지? 하지만 너무 복잡하잖아. 12와 $\frac{2}{3}$라는 말을 사용해서 나타내면 어떻게 될까? 누구 발표해 볼 사람?

037 준혁: 저요!(12=$\frac{3}{3}$를 쓰고 난 후 망설임) 잘 모르겠어요.

038 교사: 12와 $\frac{2}{3}$라는 말을 사용해서 나타내면? 자, 모두 식으로 못 나타내겠어요? 어려워요?

039 학생: …

040 교사: 자, 오늘은 이만하자.

학생은 세명이가 구한 것과 같이 종종 분수의 연산이 아닌 자연수의 연산으로 표현하였다. 이렇게 분수 곱셈 상황임에도 불구하고 자연수의 연산으로 표현한 이유는 다음과 같이 세 가지로 추론할 수 있다.

첫째, 철저히 분수 개념에 근거해서 문제를 해결하다 보면 자연수 연산으로 해결할 수 있다. 현행 교과서에서의 3-가 단계(p. 94)에서는 색칠한 부분이 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3이면 $\frac{3}{4}$이라는 것을 먼저 가르친다. 교사는 통상적으로 분자는 "몇 개"를 나타내고, 분모는 "전체를 만들기 위해서 필요한 부분의 개수"라고 지도한다. 그러나, 빵 $\frac{1}{4}$조각은 다른 조각들을 각각 $\frac{1}{4}$씩 자르지 않고 $\frac{3}{4}$조각만 남기고 만들 수 있다. 즉, 단지 두 조각 중의 한 조각이지만 $\frac{1}{4}$이 된다. 또한 빵을 8조각이 되도록 자르고 그 중에서 2조각을 가지고 있다면 그것도 여전히 $\frac{1}{4}$이다. 따라서 분수개념에서는 분모를 제수로 분자를 승수로 지도하는 것이 필요하다. 즉, $\frac{3}{4}$은 하나의 전체를 4부분으로 나누었을 때 얻은 것을 3배한 것이다. 세명이의 풀이를 보면 분모는 제수로 분자는 승수로서 보고 있음이 분명하다. 즉, 세명이의 풀이 전략은 철저하게 비형식적 지식인 분수 개념에 기초하고 있다고 할 수 있다. 그러나 현행 교과서에 의해 지도하면 이와 같은 비형식적 지식에 의한 지도가 어렵다. 따라서 세명이의 풀이와 같이 분수 곱셈 상황에서도 처음에는 자연수의 연산으로 표현 할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

둘째, 세명이의 풀이는 식을 세우는데 있어서 "조작 가능한 수식"을 사용했다고 볼 수 있다. 문제 상황을 식으로 세우는 경우에는 문제 상황을 그대로 표현하는 "기술적인 수식"과 그렇게 만들어진 수식을 하나의 조작 대상으로 간주하고 수식을 조작함으로써 문제를 해결하는 "조작 가능한 수식"으로 나눌 수 있다. 학생은 자연수에서의 연산 경험을 바탕으로 기술적인 수식보다는 조작적인 수식의 의미로 인식하고 있을 것이다. 위의 문제 상황에서 $12\times\frac{2}{3}$라는 식은 학생의 입장에서는 조작할 수 없고, 따라서 자신이 조작할 수 있는 자연수의 연산으로 바꾼 것이다.

셋째, 곱셈에서의 배의 개념을 제대로 인식하지 못했다고 볼 수 있다. 학생이 현행 교과서를 통해서 배운 자연수에서의 곱셈의 의미는 주로 동수누가의 개념으로만 형성되어 있다. 따라서 승수가 분수일 때 동수누가의 의미로는 더 이상 해석할 수 없게 되자 다른 연산으로 식을 세웠을 수 있다. 이러한 해석은 교수실험 1에서 문제를 동수누가의 의미로 해석하여 해결할 수 있을 때에는 큰 어려움이 없었다는 점을 상기한다면 설득력이 있다.

학생은 (자연수)×(분수)의 곱셈 상황에서는 자신들의 비형식적 지식인 (자연수)÷(자연수)×(자연수)의 연산으로 표현하려고 하므로 먼저 분수개념에 대한 비형식적 지식을 기초로 곱셈에서의 배의 개념을 이해시키는 것이 필요하다.

다. 사전 교수 · 학습안 3 : 곱셈에서의 배의 의미(수직선 표상)

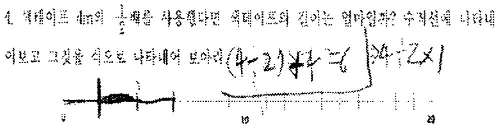
1) 문제 상황: 길이가 4m인 색 테이프가 있다. 이 색 테이프를 차례로 4배, 2배, 1배, $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{4}$배를 사용했다면 각각의 색 테이프의 길이가 얼마인지를 수직선에 나타내어 보고, 그것을 식으로 표현해 보아라. 또, 4m의 $\frac{3}{4}$배의 길이를 구하고 그것과 4m의 $\frac{3}{4}$과의 관계를 알

아보아라.

2) 실험결과 분석

(자연수)×(자연수) 곱셈에서 학생은 식을 세워 문제를 해결했으나, (자연수)×(단위분수) 곱셈에서는 분모로 나누는 나눗셈으로 식을 세웠다. 그 이유는 학생이 곱셈을 동수누가의 의미로만 인식하고 있기 때문이라고 할 수 있다. 즉, 4m의 4배는 4+4+4+4=4×4=16과 같이 생각할 수 있지만, 4m의 $\frac{1}{2}$배에 대해서는 그와 같은 동수누가의 의미로 해석할 수가 없다.

[그림 Ⅳ-5]와 프로토콜을 검토하면서 도영이가 배의 의미를 어떻게 알게 되는지 살펴보자.



[그림 Ⅳ-5] 도영이의 풀이

097 교사: (도영이가 4m의 $\frac{1}{2}$배를 잘못 나타낸 것을 보면서, 1배, 2배의 의미를 각각 물어봄) 그럼, 4배는?

098 도영: 4개 있는 거요.

099 교사: 잘 했어요. 그러면, 1배와 $\frac{1}{2}$배는 어떤 차이가 있을까?

100 도영: $\frac{1}{2}$배는 그것의 반배이고, 한배는 그냥 그대로 하나가 있는 거예요.

101 교사: 그러면, 한배가 클까 반배가 클까?

102 도영: 한배요.

103 교사: 그런데 여기 결과((4÷2)+4=6으로 표시한 식을 가리키면서)는 반배가 더 크네? 왜 그렇지?

104 도영: 아! 아까 했던 방법이 더 낫겠다.

도영이는 처음에 4m의 $\frac{1}{2}$배를 6m라고 오류를 보였는데, 교사의 안내를 통해 자신이 학교 밖에서 획득했던 '반 배'라는 비형식적 지식을 이용하여 자신의 결과가 부적절했음을 깨닫게 되었다. 몇몇 학생은 '배'라는 용어를 의식해서인지 $\frac{1}{2}$배 한 결과가 1배를 한 결과보다 더 큰 것으로 인식했다. 그 이유는 자연수에서의 곱셈 연산에 익숙한 학생에게는 '배'라는 말이 붙어 있으면 그 결과가 더 커져야 한다고 생각하기 때문이다. 위의 예에서와 같이 학생이 사용할 수 있는 비형식적 지식에는 사회에서 관습화된 언어 즉, '반 배'와 같은 용어에 의한 사고가 포함된다.

다음 프로토콜은 '반 배'를 이용하여 형식적인 지식과 연결하는 과정이다.

(영빈이가 나와서 4의 $\frac{1}{2}$배를 수직선에 정확하게 나타내고 4÷2=2라고 식을 쓴다)

105 교사: $\frac{1}{2}$이라는 숫자를 쓰지 않았어요. 4와 $\frac{1}{2}$이라는 숫자를 이용해서 나타낼 수 있을 것 같은데, … 어떤 친구는 4÷$\frac{1}{2}$로 나타내던데 … 세명이가 설명해 보자. 왜 처음에 나눗셈으로 나타내었지?(세명이의 활동지에는 처음에는 나눗셈으로 나타내었다가 나중에 곱셈으로 고쳐서 나타내었다.)

106 세명: 처음에는 반이라서 $\frac{1}{2}$로 나누었어요.

107 교사: 그런데?

108 세명: 4m의 반배라서 곱하기로 나타내었어요.

109 교사: 어떻게 나타내었어?

110 세명: (4×$\frac{1}{2}$로 나타냄)

111 교사: 답이 어떻게 돼?

112 세명: 2요. 왜냐하면 4 곱하기 $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{2}$을 4번 더한 것과 같아서요.

위 프로토콜은 색 테이프 4m의 $\frac{1}{2}$배를 구

하고 그것을 형식적인 수식으로 연결하는 과정을 나타낸 것이다. 대부분의 학생은 처음에 4m의 $\frac{1}{2}$배를 수직선에 정확하게 나타내어 문제의 답을 구할 수 있었다. 그러나 그것을 수식으로 나타내는데 있어서 4÷2나 4÷2×1과 같이 나타내었다. 그래서 교사가 4와 $\frac{1}{2}$이라는 숫자를 사용해서 나타내어 보도록 자극했다. 그런데 프로토콜 106에서의 세명이와 같이 4m의 $\frac{1}{2}$배가 '반'이어서 '4÷$\frac{1}{2}$'로 나타내는 학생도 있었다. 이렇게 반응한 이유는 4m의 $\frac{1}{2}$배를 한 결과가 '2m' 혹은 '4m의 반'이라는 것을 알고, 그것이 원래의 크기(4m)보다 줄어들었기 때문에 자연수의 연산에서와 같이 연산결과가 처음의 양보다는 더 작아지기 위해서는 곱하기보다는 나누기를 했다고 분석할 수 있다.

그런데, 그러한 곤란을 극복할 수 있었던 것은 프로토콜 108에서와 같이 '4m의 반 배'라는 말과 곱셈기호를 서로 연결시킬 수 있었기 때문이다. 프로토콜 100에서 도영이가 '반 배'라는 용어를 처음으로 사용하고 난 이후에 학생은 $\frac{1}{2}$과 반이 서로 같으므로 '$\frac{1}{2}$배'와 '반 배'도 서로 같은 개념임을 깨닫게 되었다. 따라서 몇 배를 하더라도 즉, 얼마를 곱하더라도 반드시 곱한 결과가 처음보다 더 커지지 않을 수도 있다는 것을 생각하게 되었고 자연스럽게 분수의 곱셈으로 표현할 수 있게 되었다.

따라서 (자연수)×(분수)의 곱셈에서는 곱셈에서의 배의 의미, 이를테면 4의 $\frac{1}{2}$배의 의미를 이해시키는 것이 필요하다. 또한 교수실험과정에서 대부분의 학생은 색 테이프를 수직선이 아닌 띠 막대로 표상하여 나타내었는데 이로부터 교수·학습 활동 자료를 수직선이 아닌 띠 막대로 제시하는 것이 바람직 할 것으로 생각된다.

라. 사전 교수·학습안 4 : 곱셈에서의 배의 의미(심화)

1) 문제 상황 :

① 이상한 나라의 엘리스 이야기에서 엘리스는 요술빵을 먹으면 키가 커지고 요술병에 든 물을 먹으면 키가 작아진다고 한다. 예를 들어 요술병에 $\frac{1}{9}$라고 적혀있는 물을 먹으면 처음 키에 $\frac{1}{9}$이 된다고 한다. 엘리스의 처음 키가 120cm 이라고 할 때, $\frac{5}{6}$라고 적혀있는 요술병에 든 물을 먹으면 엘리스의 키는 얼마가 되는가?

② 엘리스의 키를 식으로 나타내려면 120과 $\frac{5}{6}$사이에 +, - ×, ÷ 중에서 어떤 것이 필요한가?

2) 실험결과 : 교수실험 4에서는 분수 배의 의미를 심화시키기 위해 학생의 경험과 밀접한 소재 즉, '엘리스의 모험'과 관련된 이야기를 가지고 수업을 전개했는데 교수 실험 3과 같은 맥락인 관계로 여기서는 분석을 생략한다.

마. 사전 교수·학습안 5 : (단위 분수)×(단위 분수)

1) 문제 상황 :

① 세명이는 초코렛 과자의 $\frac{1}{2}$를 가지고 있는데 자기가 가지고 있는 것의 $\frac{1}{4}$를 수아에게 주었다. 수아에게 준 초코렛 과자는 전체의 몇 분의 몇인가?

② $\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$을 구하는 문제를 어떻게 식으로 나타낼 수 있는가?

2) 실험결과 : 4명의 학생은 직접적인 모델링 전략과 분할전략을 이용하여 잘 해결했지만 문제를 곱셈식으로 표현하는 데 어려움을 겪고 있었다. 나머지 학생은 문제를 거의 해결하지

못했는데 이것은 재분할된 $\frac{1}{2}$를 새로운 단위로 인식하지 못하였기 때문이다. ②번에서 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$사이에 어떤 기호를 사용해야 할 것인가를 물어보았을 때, 2명의 학생이 더하기나 빼기 기호가 들어가야 할 것 같다고 했고, 나머지 학생은 나누기 기호가 들어가야 할 것 같다고 했다. 그러나 아무도 곱하기 기호가 들어가야 할 것이라고는 말하지 않았다. 따라서 (단위분수)×(단위분수)의 곱셈에서는 승수에 의해 재분할된 단위를 새로운 단위로 인식시키는 것이 필요하고, 이를 형식화시키기 위해서는 단위의 재개념화와 배의 의미를 이해시키기 위한 교사의 지도가 필요하다.

바. 사전 교수·학습안 6: (진분수)×(진분수)

1) 문제 상황

① 지홍이는 피자 한 판의 $\frac{5}{8}$를 가지고 있는데, 그것의 $\frac{2}{5}$를 준혁이에게 주었다. 준혁이에게 준 피자는 한 판의 몇 분의 몇인가?

② 세명이는 과자 한 봉지의 $\frac{2}{3}$를 가지고 있다. 영빈이는 세명이가 가진 것의 $\frac{3}{4}$만큼 가지고 있다. 영빈이는 과자 한 봉지의 몇 분의 몇을 가지고 있는가?

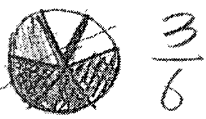
③ 이상한 나라의 엘리스는 키가 $\frac{9}{10}$m였다. 그런데 요술 병에 들어 있는 물을 마시고는 그 키의 $\frac{2}{3}$가 되었다. 요술 병에 들어 있는 물을 마신 후의 엘리스의 키는 얼마가 되었을까?

④ 도영이는 커다란 초콜릿 한 개의 $\frac{2}{3}$를 가지고 있다. 도영이가 자신이 가진 초콜릿의 $\frac{2}{5}$를 수아에게 주었다면, 수아는 초코릿 한 개의 몇 분의 몇을 가지고 있는가?

2) 실험결과 분석

①번 문제는 $\frac{5}{8}$의 $\frac{2}{5}$를 구하는 것인데 5명의 학생은 직사각형 그림을 그리는 직접적인 모델링 전략으로 답을 구하였다. 자세한 분석은 두 번째 문제와 중복되므로 생략한다. ②번 문제는 $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{4}$을 구하는 문제인데 준혁이는 다음과 같이 해결하였다.

150 교사: 세명이는 얼마나 가지고 있지?
151 준혁: $\frac{2}{3}$요. ([그림 Ⅳ-6]에서와 같이 원을 그린 후, $\frac{2}{3}$를 표시함)



[그림 Ⅳ-6] 준혁이의 풀이

152 교사: 영빈이는 세명이가 가진 것의 얼마나 가지고 있지?
153 준혁: $\frac{3}{4}$이요.
154 교사: 그러면 어떻게 나타내면 될까?
155 준혁: … (잠시 머뭇거림)
156 교사: $\frac{3}{4}$이 뭐야?
157 준혁: 4개 중에 3개요.
158 교사: 어떻게 나타내면 될까?
159 준혁: (잠시 머뭇거리다가, $\frac{2}{3}$조각 중에서 $\frac{1}{3}$조각을 각각 반씩 잘라서 4개 중 3개를 색칠한다.)
160 교사: 그럼, 영빈이는 얼마나 가지게 되지?
161 준혁: $\frac{3}{4}$
162 교사: 조각이 모두 몇 개인지 알아봐!

163 준혁: 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯! $\frac{3}{5}$!

164 교사: $\frac{3}{5}$이야? 잘 생각해 봐.

165 준혁: 이렇게까지 하면(빗금 칠하지 않은 부분도 2조각으로 등분한다), $\frac{3}{6}$!

프로토콜 155에서 준혁이가 $\frac{2}{3}$라는 새로운 단위에 대해 그것의 $\frac{3}{4}$을 나타내지 못하자 교사는 준혁이의 분수에 대한 초기의 이해를 재고할 수 있도록 $\frac{3}{4}$의 의미를 되물었다(프로토콜 156). 그런데 프로토콜 161에서와 같이 준혁이가 $\frac{3}{4}$이라고 답했고, 따라서 단위의 재개념화가 필요했다. 즉, 준혁이가 과자 한 봉지를 분할한 것을 단위로 인식하게 하기 위해서 교사는 프로토콜 162에서 전체 조각 수를 알아보도록 자극했다. 이 때, 준혁이는 프로토콜 163에서와 같이 단순히 조각의 개수만을 세어서 그것을 분수로 나타내려고 했다. 분수로 나타내기 위해서는 각각의 조각의 크기가 서로 같아야 한다는 점을 준혁이는 간과한 것 같다. 그러나, 교사가 "잘 생각해 보라"는 격려를 통하여 준혁이는 각 조각의 크기가 같도록 재분할할 수 있었고, 따라서 올바른 답을 구할 수 있었다.

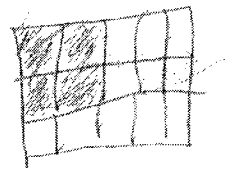
③번 문제는 $\frac{9}{10}$의 $\frac{2}{3}$를 구하는 문제인데 ②번 문제를 해결하고 난 뒤라서 그런지 학생은 비교적 쉽게 해결했다. 몇몇 학생은 "앞에서와 똑같은 문제다"라고 말하기도 했다. 그런데 ③번 문제는 분수 부분을 다시 재분할하지 않고 단순히 분수 조각들을 다시 묶으면 답을 구할 수 있었으므로 학생은 ②번 문제보다도 더 쉽게 해결했다.

마지막으로 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소인 문제를 학생은 어떻게 해결했는지 다음 프로토콜을 살펴보자.

준혁이가 나와서 직사각형 모델을 그려서 $\frac{2}{3}$를 그리고 그것의 $\frac{2}{5}$도 그린다.

166 교사: 자, 설명해 보자.

167 준혁: 원래 이것([그림 Ⅳ-7]에서 색칠하지 않은 부분 안에 있는 선)을 지우면요, $\frac{2}{3}$잖아요($\frac{2}{3}$를 강조하기 위해 $\frac{2}{3}$의 테두리를 다시 그린다). 여기서 $\frac{2}{5}$를 나타내기 위해서는 $\frac{2}{3}$를 다시 (세로로) 5칸을 나누어서 2칸을 색칠하면 됩니다. 그리고 나서 똑같은 조각이어야 하니까 지웠던 부분을 다시 연결하면 $\frac{4}{15}$가 됩니다.



[그림 Ⅳ-7] 준혁이의 풀이

168 래혁: 무슨 말인지 모르겠어요.

169 교사: (준혁이가 설명한 것을 다시 재설명함)

170 래혁: 아! 이제 알겠어요.

171 교사: 자, 이제 정리를 해 보자.

172 교사: 맨 처음에 했던 것을 알아보자. (학생과 상호작용하면서 ① 번부터 ④번까지의 문제를 각각 다음과 같이 칠판에 정리함: ① $\frac{5}{8}$의 $\frac{2}{5}$는 $\frac{2}{8}$ ② $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{4}$은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, ③ $\frac{9}{10}$의 $\frac{2}{3}$는 $\frac{6}{10}$, ④ $\frac{2}{3}$의 $\frac{2}{5}$ 는 $\frac{4}{15}$

173 교사: 자, 이제 식으로 알아보자. $\frac{5}{8}$의 $\frac{2}{5}$

는 $\frac{2}{8}$라는 것을 식으로 어떻게 나타낼까?

174 준혁: $\frac{5}{8}$ 곱하기 $\frac{2}{5}$는 $\frac{2}{8}$예요.

175 교사: 그 다음 문제는?

176 학생: …

177 교사: 자, 이제 계산하는 방법을 살펴보자. 어떤 규칙을 찾을 수 없을까?

178 학생: …

179 교사: 자, 이렇게 식으로 나타내었고 … 이러한 답을 나오게 하는 방법을 찾을 수 없을까?

180 교사: (다시 준혁이가 그린 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$의 직사각형 모델로 되돌아간다.) $\frac{2}{3}$를 그려서 전체를 똑같이 5개로 나누어 2개를 칠했는데,… 답이 얼마가 되지?

181 학생: $\frac{4}{15}$

182 교사: 왜 $\frac{4}{15}$가 되었지?

183 교사: 15는 어떻게 구했어?

184 영빈: 조각 조각을 내어서

185 교사: (직사각형 모델에서 가로 변과 세로 변에 각각 분수를 표시해 준다.) 전체의 개수는 어떻게 구했죠?

186 학생: 분모하고 분모를 곱했어요.

187 교사: 그렇죠! 분모 3하고 분모 5를 곱하면 15가 나왔죠.

188 래혁: (끼어 들면서) 그리고 저 4는 2곱하기 2를 하면 되요.

189 영빈: (끼어 들면서) 우~~ 우~~ 알았다!

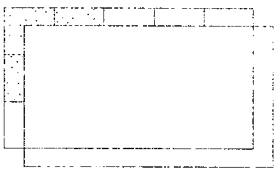
190 교사: 아! 그래서 분수의 곱셈은 어떻게 하면 될까?

191 상혁: 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱해요.

우선 교사는 학생이 비형식적으로 모델을 이용하여 해결한 것들을 식을 세워보게 하고, 모델과 식에서 규칙을 찾아 '분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱하면 된다'는 형식적 지식으로 '연결하고자 하였다. 그러나 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우에는 학생이 형식화하는데 걸림돌이 될 수 있다는 것을 발견했다. 왜냐하면 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우에는 직접적 모델링으로 구한 결과가 이미 약분된 형태로 나타나지만 분모와 분자, 분자와 분자끼리 곱한 결과는 약분된 형태가 아니기 때문이다. 따라서 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우보다는 서로소인 경우를 먼저 형식화하는 것이 바람직하다.

현행 초등학교 교과서의 (진분수)×(진분수)의 곱셈에서는 피승수의 분자가 승수의 분모와 같은 경우와 배수인 경우는 다루지 않고 있다. 교과서에서 다루는 (진분수)×(진분수)의 곱셈 예를 들면, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$는 직사각형을 가로로 4등분한 다음 $\frac{3}{4}$만큼 노란색을 칠하고, 세로를 7등분한 다음 노란색을 칠한 부분의 $\frac{5}{7}$만큼 파란색을 겹쳐서 칠하도록 되어 있다. 그러나 학생이 그러한 활동을 할 수 있다하더라도 왜 분수의 곱을 구하기 위해서 그렇게 겹쳐서 색칠하는지 그 이유를 알기 어렵다. 그러나 프로토콜 167에서 준혁이가 제시한 것과 같이 우선 모델을 이용하여 피승수($\frac{2}{3}$)를 나타내고, 그것을 단위로 생각하여 승수를 나타낸 후 그 결과를 다시 처음의 단위에 비추어 해석하는 과정을 거쳐야 한다. 즉, 교과서의 전개과정은 그러한 과정의 일부분이 역전되어 나타나기 때문에 학생이 이해하기가 어렵다. 더욱이 학생의 비형식적 지식을 토대로 하여 단위를 재개념화할 수 있는 체계적인 과정이 생략되어 있어서 학생 스스로 분수 곱셈의 원리를 재발명하기가 쉽지 않다. 그리고 프로토콜 184에서와 같이 학생은 구체적인 모델링으로 구한 답을 정당화할 때, 분할된 조각의 개수만을 세어서 대답했

다. 학생이 이렇게 반응하는 경우에는 분수의 곱셈을 해결하는 방법을 형식화 할 수 없으므로 교수실험에서와 같이 모델 옆에 각각의 분수를 나타내거나, [그림 Ⅳ-8]과 같이 학생이 만든 모델을 백지로 가린 후, 겹쳐서 색칠된 부분(2×2=4)과 전체(3×5=15)을 분수로 나타내게 함으로써 형식화를 유도할 수 있다.



[그림 Ⅳ-8] 분수 곱셈의 원리를 발견하기 위한 방법

(진분수)×(진분수)의 교수실험과정에서 나타난 학생의 반응을 교수·학습 활동 자료에 반영하면 문제 ①, ②, ③에서 직접적 모델링으로 단위를 재 개념화할 수 있도록 하고, 형식적인 지식으로의 연결은 ④번 문제를 다룰 때까지 미루도록 한다.

2. 연구결과

가. 분수의 곱셈에서의 비형식적 지식

본 연구의 교수실험에서 나타난 분수의 곱셈에서의 학생의 비형식적 지식은 다음과 같다.

첫째, 문제 상황에 기술된 행위 또는 관계를 원과 직사각형 등의 그림을 그려서 직접적으로 모델링하는 전략을 사용한다.

둘째, 일상생활에서 사용하는 비형식적 언어, 예를 들면 '반 배'와 같은 용어를 사용하여 문제를 해결한다. 학생에게 어떤 양의 $\frac{1}{2}$배가 얼마인지를 물었을 때 '배'를 했기 때문에 그 곱셈의 결과는 '자연수 배'를 한 것과 같이 처음 수보다 커진다고 생각한다. 이 비형식적 지식은 우리나라 학생만의 독특한 비형식적 지식이다.

셋째, 조작 가능한 식으로 표상한다. 예를 들어 색 테이프 4m의 $\frac{1}{2}$배의 길이를 구하는 문제에서 학생은 자신들이 조작할 수 없는 분수의 곱셈식 $4\times\frac{1}{2}$이 아니라 조작할 수 있는 $4\div2$라는 자연수의 나눗셈으로 표상한다.

나. 형식화를 위한 교수·학습 방법

Baratta (1976)은 일반적으로 수업이 개념단계, 연결단계, 형식화단계를 거쳐서 진행되어야 한다고 하면서 각 단계별로 다음과 같은 지도방법을 제시하였다. 첫째, 개념단계에서는 학생이 기초적이고 직관적인 이해를 구성할 수 있도록 개개인에게 의미 있는 방법으로 주제를 탐구할 수 있는 기회를 제공하고, 학생의 비형식적 지식이 존중되고 확장될 수 있도록 지도한다. 둘째, 연결단계에서는 구체적이고 친숙한 문제 상황을 통해서 비형식적 지식을 기호나 절차로 표현할 수 있도록 도와준다. 셋째, 형식화단계에서는 추상적인 기호를 사용하여 문제 상황을 수식으로 형식화할 수 있는 기회를 제공한다.

이 지도방법에 따르면 분수의 곱셈에서 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결단계에서는 학생이 사용하는 직접적 모델링 또는 분할 전략을 기호나 절차로 표현하여 형식적 알고리듬과 연결하는 것이다. 그러나 Mack(1990)에 의하면 학생이 절차 중심의 형식적 지식을 이해하도록 하기 위해서는 일정한 기간 동안 기호적인 표상을 사용하지 않는 것이 필요하다고 지적하였다.

따라서 분수의 곱셈에서 학생의 비형식적 지식을 형식화하기 위해서는 먼저 직접적 모델링 또는 분할 전략을 사용할 수 있는 실제적인 문제 상황을 제시해야 하고, 그 문제를 해결해 나가는 과정에서 적절한 시점에 기호적 표상의 도입과 형식적 지식으로의 연결을 해주어야 한

다. 본 연구의 교수실험과정에서 학생이 보인 반응을 분석한 결과, 비형식적 지식을 형식화하기 위한 교수 · 학습 방법은 다음과 같다.

첫째, (분수)×(자연수)의 곱셈에서는 비형식적 지식인 동수누가의 개념을 이용하여 같은 수의 반복 덧셈 식으로 나타내고, 이를 축약하여 곱셈식으로 나타내도록 한다.

둘째, (자연수)×(분수)의 곱셈에서는 동수누가의 개념으로 형식적 지식과 연결되지 않으므로 분할을 이용하여 분수의 연산자의 의미와 곱셈에서의 배의 의미를 이해할 수 있도록 해야 한다.

셋째, (단위분수)×(단위분수)의 곱셈에서는 승수에 의해 재분할된 단위를 새로운 단위로 인식시키는 것이 필요하다.

넷째, (진분수)×(진분수)의 곱셈에서는 분할을 이용한 단위의 재개념화가 필요하고, 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우보다 서로소인 경우를 먼저 형식화 하는 것이 바람직하고, [그림 Ⅳ-8]과 같은 구체적인 모델을 활용할 것을 권장한다.

다. 교수 · 학습 활동 자료의 개발

본 연구에서는 위와 같은 교수 · 학습 방법을 교수실험의 사전 교수 · 학습안에 반영하여 분수의 곱셈에서 학생의 비형식적 지식을 형식적 지식으로 연결하기 위한 교수 · 학습 활동자료를 개발하였다. 개발된 자료는 학습주제, 학습목표, 문제상황, 활동절차의 순서로 구성하였으며 부록에 첨부하였다.

본 교수 · 학습 활동자료는 분수의 곱셈에서 학생이 가진 비형식적 지식을 교수실험을 통하여 파악하고, 실험과정에서 학생이 보인 반응을 바탕으로 개발되었으므로 학생의 비형식적 지식을 사고 및 논리의 비약 없이 원활하게 형식적 지식으로 연결해 줄 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

학생은 수학을 학교에서만 배우는 것이 아니라 일상 활동을 통해서도 자연스럽게 배운다. 학생이 학교에서 수학적 개념을 배울 때에는 그들이 가지고 있는 비형식적 수학 지식을 먼저 떠 올리게 된다. 이 때, 비형식적 지식이 형식적 지식과 연결되지 못하고 충돌을 일으키게 되면 학생은 많은 인지적 부담을 느끼게 되고 수학을 어렵다고 생각하게 된다. 따라서 교사는 학생이 가지고 있는 비형식적 지식을 형식적 지식과 연결시킬 수 있는 교수 · 학습 방법과 교수 · 학습 활동자료를 필요로 한다.

이를 위해 본 연구에서는 먼저 분수의 곱셈에서 학생이 가지고 있는 비형식적 지식과 그 형식화 방법이 무엇인지를 살펴보았다. 문헌검토를 통해 6차시의 사전 교수 · 학습안을 개발하고, 이를 바탕으로 본 연구자의 지도하에 W초등학교 4학년 학생에게 교수실험을 실시하여 분석한 결과, 학생의 분수 곱셈에서의 비형식적 지식은 그림을 이용한 직접적인 모델링 전략, 비형식적 언어에 의한 사고, 조작 가능한 수식 표현으로 나타났다.

한편, 교수실험과정에서 학생이 보인 반응을 분석한 결과 비형식적 지식을 형식화하기 위한 교수 · 학습 방법은 다음과 같음을 알 수 있었다.

첫째, (분수)×(자연수)의 곱셈에서는 비형식적 지식인 동수누가의 개념을 이용하여 같은 수의 반복 덧셈 식으로 나타내고, 이를 축약하여 곱셈식으로 나타내도록 한다.

둘째, (자연수)×(분수)의 곱셈에서는 동수누가의 개념으로 형식적 지식과 연결되지 않으므로 분할을 이용하여 분수의 연산자의 의미와 곱셈에서의 배의 의미를 이해할 수 있도록 해야 한다.

셋째, (단위분수)×(단위분수)의 곱셈에서는

승수에 의해 재분할된 단위를 새로운 단위로 인식시키는 것이 필요하다.

넷째, (진분수)×(진분수)의 곱셈에서는 분할을 이용한 단위의 재개념화가 필요하고, 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우보다 서로소인 경우를 먼저 형식화 하는 것이 바람직하고, [그림 Ⅳ-8]과 같은 구체적인 모델을 활용할 것을 권장한다.

본 연구에서는 위와 같은 교수·학습 방법을 교수실험의 사전 교수·학습안에 반영하여 분수의 곱셈에서 학생의 비형식적 지식을 형식적 지식으로 연결하기 위한 교수·학습 활동자료를 개발하였다. 개발된 자료는 학습주제, 학습목표, 문제 상황, 활동절차의 순서로 구성되었다.

본 연구에서 개발한 교수·학습 활동자료는 학생이 비형식적 지식에 기초하여 형식적 지식을 의미 있게 학습하도록 할뿐만 아니라 더 나아가 수학적 사고력과 긍정적 수학 성향을 길러줄 수 있다. 그러나 본 연구에서 제시한 교수·학습 활동자료는 하나의 자료일 뿐이며 학생의 수학적 사고력을 신장시키기 위해서는 교사가 학생의 비형식적 지식을 존중하고 그것에 기초하여 형식화하려는 노력이 필요하다.

참고문헌

교육인적자원부(2001). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서.

Baratta, L. M. (1976). *Mathematics their way.* Menlo Park. CA: Addison Wesley.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Becker, J. P., & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatric, J. & Laborde, C. (Eds.), *International handbok of mathematics education* (pp.511-564). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M. J., Harel, S., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-Emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An integration of research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-42.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 83-87.

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction, 17,* 283-342.

Guberman, S. R. (1996). The development of everyday mathematics in Brazilian children with limited formal education. *Child Development, 67,* 1609-1623.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. In

J. Hierbert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Behr, M. J. (1988). Inroduction: Capturing the major themes. In J. Hierbert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 1-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hierbert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kim, J. (2002). *Development of instructional unites connecting informal and formal mathematical knowledge of equivalency and addition.* Unpublished doctoral dissertation, Columbia University.

Lave, J., Murtaugh, M., & de la Rocha, O. (1984). The dialectic of arithmetic in gro-cery shopping. In B. Rogoff & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition* (pp. 67-94). Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Leinhardt, G. (1988). Getting to know: Tracing students' mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist, 23*(2), 119-144.

Mack, N. K. (1990). Learning fraction with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education 21*(1), pp. 16-32.

____________(1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Rational Numbers: *An integration of research* (pp. 85-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The author.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Oakleigh, Victoria(Australia): Cambridge University Press.

Olive, J. (1999). From fraction to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 279-314.

Olivier, A., Murray, H., & Human, P. (1990). Building on young children's informal arithmetical knowledge. *Proceedings of PME, 14*(3), 3-10.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190.

Pothier, Y., & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Re-*

search in Mathematics Education, 14(5), 307-317.

Saxe, G. B. (1988). Candy selling and math learning. *Educational Researcher, 17*(6), 14-21.

Schwarz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Song, M., & Ginsburg, H. P. (1985). The development of informal and formal mathematical thinking in Korean and American children. *Annual meeting of American Educational Research Association*(69th, Chicago, IL.)

Steffe, L. P. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In Hiebert, J. & Behr, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 119-140). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior. 3.* 219-235.

A Case Study on Children's Informal Knowledge of the Fractional Multiplication

Baek, Sun Su (Taegu Warong Elementary School)
Kim, Won Kyung (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to investigate children's informal knowledge of the fractional multiplication and to develop a teaching material connecting the informal and the formal knowledge. Six lessons of the pre-teaching material are developed based on literature reviews and administered to the 7 students of the 4th grade in an elementary school. It is shown in these teaching experiments that children's informal knowledge of the fractional multiplication are the direct modeling of using diagram, mathematical thought by informal language, and the representation with operational expression. Further, teaching and learning methods of formalizing children's informal knowledge are obtained as follows.

First, the informal knowledge of the repeated sum of the same numbers might be used in (fractional number)×(natural number) and the repeated sum could be expressed simply as in the multiplication of the natural numbers .

Second, the semantic meaning of multiplication operator should be understood in (natural number)×(fractional number).

Third, the repartitioned units by multiplier have to be recognized as a new units in (unit fractional number)×(unit fractional number).

Fourth, the partitioned units should be reconceptualized and the case of disjoint between the denominator in multiplier and the numerator in multiplicand have to be formalized first in (proper fractional number)×(proper fractional number)

The above teaching and learning methods are melted in the teaching meterial which is made with corrections and revisions of the pre-teaching meterial.

* key words : fractional multiplication(분수의 곱셈), informal knowledge(비형식적 지식), formal knowledge(형식적 지식), partitioning(분할), reconceptualization of unit(단위의 재개념화)

논문접수 : 2005. 4. 21.
심사완료 : 2005. 6. 8.

<부 록> 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화를 위한 교수·학습 활동자료

1) 활동 1: (분수)×(자연수)

(1) 학습목표: (분수)×(자연수)의 곱셈에 관한 실생활의 문제를 비형식적 지식을 바탕으로 다양한 방법으로 해결하고, 그것을 수식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황: 친구들이 피자 가게에 가서 피자 한 판의 $\frac{3}{8}$씩 똑같이 4명이 먹었다. 먹은 피자는 모두 얼마인가?

(3) 활동 절차

- 피자 가게에 가 보았던 경험을 이야기한다.
- 문제 상황을 구두로 제시한다. 이 때 상황을 학생에게 친숙한 상황으로 변경하여 제시할 수 있다.
- 얼마쯤 되는지 어림해보게 한다.
- 다양한 방법으로 구해보게 한다.
- 소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 곱셈의 원리를 파악한다.

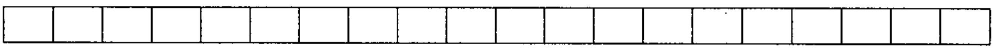
소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 각자 구한 방법을 발표하고 문제 해결을 위한 전략을 공유한다. 교사는 발표시킬 때 우선 구체적인 방법으로 해결한 학생을 먼저 발표시키고, 점차 추상적이고 효율적인 방법으로 해결한 학생을 발표시킨다. 즉, 직접적 모델을 이용한 방법, 동수누가 방법을 이용한 덧셈식, 곱셈식 순서로 발표하게 하여 학생이 자신의 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결할 수 있는 환경을 조성한다.

2) 활동 2: 곱셈에서의 배의 의미

(1) 학습목표: 자연수에서의 곱셈에 대한 경험을 바탕으로 곱셈을 동수누가의 의미뿐만 아니라 배의 의미로 이해하도록 한다.

(2) 문제 상황:

① 선물을 포장하기 위해 색 테이프 4m를 사왔다. 그런데 상품을 포장하다보니 색 테이프가 모자라서 처음에 가지고 있던 색 테이프의 4배를 사용했다. 사용한 색 테이프의 길이를 그림으로 나타내어 보아라.



그림으로 알아본 것을 식으로 나타내어 보아라.

② 색 테이프 4m의 2배 혹은 1배를 사용했다면 색 테이프의 길이는 각각 얼마일까? 그림으로 나타내고 그것을 식으로 나타내어 보아라(이하 그림 생략).

③ 색 테이프 4m의 $\frac{1}{2}$, 반 배, $\frac{1}{2}$배를 사용했다면 색 테이프의 길이는 각각 얼마일까? 그림으로 나타내어 보아라.

④ 색 테이프 4m의 $\frac{1}{2}$, 4m의 반 배, 4m의 $\frac{1}{2}$배는 서로 어떤 관계가 있는가? 그리고 그것을 식으로 나타내어 보아라.

⑤ 색 테이프 4m의 $\frac{1}{4}$, 반의 반 배, $\frac{1}{4}$배를 사용했다면 색 테이프의 길이는 각각 얼마일지 그림을 그려서 알아보고 어떤 관계인지 알아보아라. 그리고 그것을 식으로 나타내어 보아라.

⑥ "이상한 나라의 엘리스" 이야기를 들은 적이 있나요? 엘리스는 요술빵을 먹으면 키가 커지고, 요술물병에 든 물을 먹으면 키가 작아진다고 한다. 엘리스의 키는 54인치인데, 요술빵이나 요술물병에 쓰여진 숫자만큼 키가 커지고 작아진다고 한다. 예를 들면, 요술물병에 $\frac{1}{3}$이라고 적혀 있으면 처음의 키의 $\frac{1}{3}$배가 된다고 한다. 오른 쪽 표를 보고 변화된 엘리스의 키를 구해보자.

엘리스의 처음의 키	물병과 빵	변화된 엘리스의 키
54인치	3	
54인치	2	
54인치	1	
54인치	$\frac{1}{3}$	
54인치	$\frac{1}{6}$	
54인치	$\frac{1}{9}$	

(3) 활동 절차

- 색 테이프 4m의 4배, 2배, 1배의 길이는 자연수에서의 곱셈에 대한 경험을 바탕으로 쉽게 구할 수 있을 것이다. 분수 배의 의미를 학습하도록 하기 위해서는 "반 배"와 같은 학생의 비형식적 지식, 더 엄밀히 말한다면 관습적인 언어를 활용하도록 한다. 결국 이와 같은 활동을 통하여 학생이 4m의 $\frac{1}{2}$, 4m의 반 배, 4m의 $\frac{1}{2}$배가 서로 같다는 것을 발견하도록 한다. 그리고 이러한 활동을 통하여 곱셈을 동수누가의 의미뿐만 아니라 연산자의 의미로 해석할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 전체 토의 및 정리 단계에서는 우선 가장 쉬운 비형식적 전략들을 발표하도록 하고, 점차적으로 형식화하도록 한다. 학생이 풀이를 정당화하는 과정에서 나타난 것과 같이, $4\times\frac{1}{4}$ =

$\frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$와 같은 추론 활동도 자극하는 것이 좋다. 또한, 학생의 다양한 활동, 즉, $4 \times \frac{1}{4} = 4 \div 4 = \frac{4}{4} = 1$과 같은 활동은 장래에 분수의 나눗셈을 학습할 때 '나누는 수의 역수를 곱하면 된다'는 원리와 연결시킬 수 있는 발판이 될 수 있다.

3) 활동 3: (자연수)×(분수)

(1) 학습목표: (자연수)×(분수)의 곱셈에 관한 실생활의 문제를 비형식적 지식을 바탕으로 다양한 방법으로 해결하고, 그것을 수식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황:

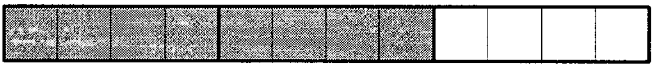
① 길이가 12m인 색 테이프가 있다. 이 중에서 선물을 포장하기 위해서 $\frac{2}{3}$를 사용하였다. 사용한 색 테이프의 길이는 몇 m인가?

② 사용한 색 테이프의 길이를 식으로 나타내려면 12 와 $\frac{2}{3}$ 사이에 어떤 기호가 필요한가?

(3) 활동 절차

- 선물을 포장해 보았던 경험을 이야기한다.
- 문제 상황을 구두로 제시한다.
- 얼마쯤 될지 어림해보게 한다.
- 다양한 방법으로 구해보게 한다.

학생은 그림을 그리거나 수식으로 나타내어 해결할 수 있다. 그림을 그려서 해결할 때 다음과 같이 그림으로 나타내고 $\frac{2}{3}$ 혹은 $\frac{2}{3}$m라고 답할 수 있다.



이러한 경우, 그림에서 1m를 찾아보도록 함으로써 학생이 단위가 1m가 아니라 12m임을 인식할 수 있도록 자극한다. 단위를 정확하게 인식할 수 있도록 돕는 방법 중에는 앞에서 어림한 값을 상기해 보도록 할 수도 있다.

- 소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 곱셈의 원리를 파악한다.

4) 활동 4: 단위의 재 개념화

(1) 학습목표: (분수)×(분수)의 곱셈(피승수의 분자와 승수의 분모가 약분되는 경우)을 직접적 모델링에 의해 분할된 단위를 재개념화 할 수 있도록 한다.

(2) 문제 상황:

① 직사각형 모양의 꽃밭의 $\frac{5}{8}$에 장미꽃을 심고, 그 중의 $\frac{2}{5}$에 노란 장미꽃을 심었다. 노란 장미꽃을 심은 부분은 전체 꽃밭의 몇 분의 몇인지 알아보아라.

② 영빈이는 아침에 초콜릿 한 개를 사서 조금 먹고는 $\frac{9}{10}$를 남겼다. 점심을 먹은 후, 영빈이는 남은 초콜릿의 $\frac{2}{3}$를 먹었다. 점심을 먹은 후에 영빈이가 먹은 것은 초콜릿 한 개의 몇 분의 몇인지 알아보아라.

③ 세명이는 가족 신문의 $\frac{2}{3}$를 가족 소식으로 꾸미고, 가족 소식의 $\frac{3}{4}$에는 지난 주말에 갔다 왔던 가족여행에 관해 싣기로 하였다. 가족 여행에 관한 기사는 가족 신문의 몇 분의 몇을 차지하는지 알아보아라.

(3) 활동 절차

- 초콜릿이나 과자, 떡, 피자 등을 나누어 먹었던 경험이나 가족 신문, 벽신문, 화단, 밭 등을 나누어 보았던 경험을 이야기해 보게 한다.
- 앞에서 나누었던 대화를 토대로 문제 상황을 적절히 변형하여 구두로 제시한다.
- 얼마쯤 될지 어림해보게 한다.
- 다양한 방법으로 구해보게 한다.
- 소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 곱셈의 원리를 파악한다.

앞의 활동에서 곱셈의 연산자의 의미를 이해했다면 문제상황을 그대로 식(기술적 식)으로 나타낼 수 있고, 그 결과를 그림이나 조작 가능한 식($\frac{5}{8}\div5\times2=\frac{2}{8}$)을 통해서 구할 수 있을 것이다. 그러나 왜 그러한 결과가 나왔는지를 식에만 의존하여 정당화하지는 못할 것이다. 학생이 조작적 식으로 형식화할 수 있는 하나의 방안을 예상해 본다면 다음과 같다. $\frac{5}{8}\div5\times2=\frac{2}{8}$과 같이 해결한 방법을 직접적인 모델을 이용한 방법과 연결시키는 것이다. 즉, $\frac{5}{8}$의 $\frac{2}{5}$란 $\frac{5}{8}$을 똑같이 5부분으로 나눈 것($\frac{1}{8}$)의 2배이므로 $\frac{2}{8}$가 되는 것이다. 따라서 $\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}$를 할 때에는 '피승수의 분자를 승수의 분모로 나누고, 승수의 분자만큼 곱하면 된다'고 형식화할 수 있다. 여기서 승수의 분모 5는 $\frac{5}{8}$를 똑같이 5부분으로 나눈다는 의미가 있으므로 약분과 연결시킬 수 있다. 현재의 교과서에서는 약분을 왜 하는지를 연산의 결과가 서로 같다는 것에만 기초하고 있어 학생이 그 과정을 알기 어렵다. 하지만, 앞에서와 같은 방법으로 지도한다면 학생이 약분을 하는 이유를 개념에 기초해서 보다 명확하게 인식할 수 있을 것이다.

5) 활동 5: (단위분수)×(단위분수)

(1) 학습목표: (단위분수)×(단위분수)의 곱셈에 관한 실생활의 문제를 분할된 단위의 재개념화 방법으로 해결하고, 그것을 수식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황:

① 세명이는 초콜릿 한 개의 $\frac{1}{2}$을 가지고 있고, 수아는 세명이가 가진 것의 $\frac{1}{4}$을 가지고 있다. 수아가 가진 초콜릿은 초콜릿 한 개의 몇 분의 몇인지 알아보아라.

② 수아가 가진 초콜릿을 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$를 이용하여 식으로 나타내어라.

(3) 활동 절차

- 초콜릿이나 과자, 떡, 피자 등을 나누어 먹었던 경험을 이야기해 보게 한다. 특히, 어떤 음식의 '몇 분의 일의 몇 분의 일'과 같이 나누어 먹었던 경험을 이야기 해 보게 한다.
- 문제 상황을 구두로 제시한다.
- 얼마쯤 될지 어림해보게 한다.
- 다양한 방법으로 구해보게 한다.

학생은 그림을 그리거나 수식으로 나타내어 해결할 수 있다. 그림을 그려서 해결할 때 $\frac{1}{2}$을 단위로서 인식할 수 있도록 자극할 필요가 있다. $\frac{1}{2}$을 단위로서 인식할 수 없을 경우에는 구하고자 한 것이 무엇인지를 묻고, 그것이 '세명이가 가진 것의 $\frac{1}{4}$임'을 일깨운다. 그리고 나서 세명이가 가진 것이 얼마인가를 묻고 그것이 초콜릿 한 개의 $\frac{1}{2}$임을 지각하도록 하여 $\frac{1}{2}$을 분할하도록 한다.

학생 중에는 $\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$을 식으로 구하기 위해서 $\frac{1}{2}\div4$와 같은 방법으로 해결하는 학생이 있을 수 있다. 그렇게 구한 방법도 인정해 주어야 할 것이다. 이러한 반응은 분수의 나눗셈에서 $\frac{1}{2}\div4=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$과 연결시켜줄 수 있는 발판이 될 것이다. 즉, 분수의 곱셈과 나눗셈을 서로 별개의 문제로서 인식할 것이 아니라 서로 밀접하게 연관되어 있음을 학생이 지각할 수 있도록 자극할 수 있다.

- 소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 곱셈의 원리를 파악한다.

6) 활동 6: (진분수)×(진분수)

(1) 학습목표: (단위분수)×(단위분수)의 지식을 바탕으로 (진분수)×(진분수)의 곱셈에서 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱한다는 형식적 지식으로 연결할 수 있다.

(2) 문제 상황:

(피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소) 학습란의 $\frac{2}{3}$에 과목별로 퀴즈를 내고, 그 중의 $\frac{2}{5}$에는 수학퀴즈에 관해 싣기로 하였다. 수학 퀴즈는 학습란의 몇 분의 몇을 차지하는지 알아보아라.

(3) 활동 절차

- 여러 가지 물건을 나누어 보았던 경험을 이야기해 보게 한다.
- 앞에서 나누었던 대화를 적절히 이용하면서 문제 상황을 구두로 제시한다.
- 얼마쯤 될지 어림해보게 한다.

• 다양한 방법으로 구해보게 한다.

학생 중에는 '조각 수가 서로 맞지 않아서 구할 수 없다'고 말하는 학생이 있을 것이다. 그러한 경우에는 $\frac{2}{5}$란 무엇인지 물어본다. 그러면 학생은 5개로 나눈 것 중에서 2개라고 답하고, 우선 $\frac{2}{3}$를 표시한 후 그것을 5조각으로 나누어 그 중에서 2조각이 얼마인지 알아보려고 할 것이다. 학생 중에는 $\frac{1}{3}$조각들을 5조각으로 각각 나누어 그것들 중에서 4조각, 혹은 $\frac{1}{3}$조각을 각각 5개로 나눈 것 중에서 2조각씩을 각각 색칠할 것이다. 그리고 나서 색칠된 부분이 전체의 몇 분의 몇 인가를 알아보기 위해서 조각의 크기가 서로 같아야 한다는 것을 발견하고, 나머지 $\frac{1}{3}$조각도 5조각으로 다시 나눌 것이다. 그러한 활동을 통해 $\frac{2}{5}$의 $\frac{2}{3}$란 전체 15조각 중에서 4조각이므로 $\frac{4}{15}$라고 답할 것이다. 그리고 나서 직접적인 모델링 전략을 이용하여 해결한 것을 보고 식으로 표현하도록 자극함으로써 형식화를 유도한다.

• 소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 곱셈의 원리를 파악한다.

사전 교수·학습안 6에서와 같이, 모델 자체에 분수를 각각 표시해 주거나, 학생이 만든 모델의 일부분을 백지로 가린 상태에서 겹쳐서 색칠된 부분을 분수로 나타내게 함으로써 분수 곱셈의 형식화를 유도할 수 있다.