대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.2, 103-121. Jun 2005

분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로

임 재 훈* · 김 수 미** · 박 교 식***

이 연구에서는 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서를 비교 · 분석하여 분수 나눗셈 알고리즘 도입을 위한 교재 구성 및 학습 지도의 개선 방향을 제안하고자 한다. 이를 위해 먼저 분수 나눗셈 알고리즘의 의미를 '포함제', '단위비율 결정', '비 또는 측정 단위 세분', '곱셈의 역연산', '분수의 곱셈으로부터의 유추'의 다섯 맥락에서 살펴보았다. 이어 북한, 중국, 일본 그리고 우리나라 초등학교 수학 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 및 전개 방법의 특징을 분석하였다. 이러한 분석으로부터 얻은 시사점은 다음의 다섯 가지이다. 첫째, 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 의미를 명확하게 드러내도록 다루어야 한다. 둘째, 분수 나눗셈을 단위비율 결정 맥락에서 도입하는 방안을 검토하여야 한다. 셋째, 현재 <7-가 단계> 용어인 '역수'를 <6-나 단계> 분수의 나눗셈 지도 장면에서 제기하거나, 적어도 역수의 의미가 드러나도록 지도하여야 한다. 넷째, 분수 나눗셈은 다양한 맥락에서 풍부한 의미로 전달되어야 한다. 끝으로 <5-나 단계>, <6-나 단계>에 걸쳐 여러 지엽적인 주제로 세분되어 있는 현재의 분수 나눗셈 단원 구성은 포괄적이고 통합적인 방식으로 구성하여야 한다.

I. 서 론

이 연구의 목적은 다양한 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘의 의미를 고찰하고, 분수 나눗셈 알고리즘의 도입방법에 대한 남북한, 일본, 중국 교과서의 내용을 비교하고, 우리나라에서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입을 위한 교재 구성 및 학습 지도의 개선 방향을 제시하는 것이다.

분수 나눗셈은 우리나라 초등학교수학의 '수와 연산' 영역의 정점에 있는 내용으로, 그 알고리즘은 "나누는 수의 분자와 분모를 뒤집어 곱한다."는 것으로 요약될 수 있다. 이 알고리즘은 그 자체로 간단하며 기억하기도 어렵지 않다. 그러나 이 알고리즘을 이용하여 분수 나눗셈 계산을 할 줄 아는 학생들 중에는 '뒤집어서 곱하는' 이유를 모르거나 제수의 역수의 의미를 모르는 학생들이 적지 않다(송정화, 2005; 백선수, 2004; 박혜경, 2003). 분수 나눗셈 알고리즘에 내재된 의미의 이해라는 측면에서 볼 때, 이러한 현상은 결코 만족스럽지 않다.

이 연구에서는 먼저 다양한 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘의 의미, 곧 제수의 역수의 의미와 왜 제수의 역수를 곱하는지에 대해 고찰

* 경인교육대학교(jhyim@ginue.ac.kr)
** 경인교육대학교(smkim@ginue.ac.kr)
*** 경인교육대학교(pkspark@ginue.ac.kr)

할 것이다. 그리고 남북한, 일본, 중국의 초등학교 교과서에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 방법이 어떻게 다른지 비교·분석할 것이다. 끝으로, 분수 나눗셈 알고리즘의 의미 분석과 교과서 비교 결과를 토대로, 현재 우리나라 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방식을 반성하고 교재 구성 및 학습지도의 개선 방향을 제시할 것이다.

남북한의 수학 교과서에 대한 초창기 비교연구에서는 주로 교육과정 및 교과서의 외형과 체제, 각 영역별 내용 요소, 도입 시기 등 다소 일반적이고 양적인 비교에 초점을 둔 것들이 주를 이루었다(김삼태, 이식, 1999; 박경미, 1995; 신성균, 황혜정, 박경미, 강문봉, 박문환, 1997; 임재훈, 이경화, 박경미, 2003a; 최택영, 김인영, 1998; 현진오, 강태석, 1999). 그러나 최근에는 피타고라스 정리나 분수 개념과 같은 학교수학의 구체적인 내용에 대한 내용 구성 및 전개 과정의 구체적인 특징에 주목한 질적인 비교·분석이 이루어지고 있다(박문환, 2002a, 2002b; 임재훈, 이경화, 박경미, 2003b; 임재훈, 2003: 박교식, 이경화, 임재훈, 2004). 이 연구는 이러한 질적인 비교 분석 연구의 연장선 상에 있다.

또한 이 연구에서는 일본과 중국의 교과서의 내용도 같이 비교한다. 한국, 중국, 일본은 같은 동북아시아 문화권에 속한 나라로 고대부터 서로 긴밀한 관계를 유지하며, 서로에게 영향을 미쳤다. 특히 국가 공통 교육과정 체제를 가지고 있다는 점이 유사하다. 또, 적은 지면에 많은 내용의 정수만 뽑아 간결하게 제시하는 교과서 체제도 유사하다.

그러나 학교 수학을 전개하는 방식을 자세히 살펴보면, 내용에 따라 상당한 차이점이 발견된다. 이 연구에서는 분수 나눗셈 알고리즘의 도입 장면에서 이러한 차이점을 확인하고, 수학 교재 구성 및 학습 지도를 위한 시사점을 추출하고자 한다.

II. 분수 나눗셈 알고리즘의 의미

분수 나눗셈 알고리즘의 이해에서 핵심은 '제수의 역수'의 의미이다. 제수의 역수는 맥락에 따라 각각 다르게 파악될 수 있다. 여기서는 '포함제', '단위비율 결정', '비와 측정단위의 세분', '곱셈의 역연산', '분수의 곱셈으로부터의 유추'의 다섯 맥락으로 나누어 분수 나눗셈 알고리즘이 도입되는 다양한 방식과 제수의 역수의 의미를 고찰해 보고자 한다.

1. 포함제 맥락

포함제 맥락에서 나눗셈은 예를 들어, "한 수에 다른 수가 몇 번 포함 되는가 또는 들어가는가"로 해석된다. 즉 "$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$는 $\frac{3}{4}$에 $\frac{2}{7}$가 몇 번 들어가는가?"와 같이 해석된다. 포함제 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘의 의미를 이해하기 위해서는 우선 '피제수가 1인 나눗셈', 즉 '1÷(어떤 수)' 형태의 나눗셈의 의미를 이해하여야 한다. 예를 들어 $1\div\frac{3}{5}$은 포함제 맥락에서 다음과 같이 해결할 수 있다(Siebert, 2002).

1 안에는 $\frac{3}{5}$이 <1번> 들어가고 $\frac{2}{5}$가 남는다. $\frac{2}{5}$안에는 $\frac{3}{5}$의 <$\frac{2}{3}$>만 들어가므로, 1 안에는 $\frac{3}{5}$이 총 <$\frac{5}{3}$>번 들어가는 셈이다.

또는 다음과 같이 생각할 수 있다.

1 안에는 $\frac{1}{5}$이 <5번> 들어간다. $\frac{1}{5}$은 $\frac{3}{5}$의 $\frac{1}{3}$이다. 그러므로 1 안에 $\frac{3}{5}$의 <$\frac{1}{3}$>이 5번 들어간다. 즉, 1 안에는 $\frac{3}{5}$이 <$\frac{5}{3}$번> 들어간다.

피제수가 1이 아닌 경우는 피제수가 1인 경우에 대한 비례적 사고를 통해 다음과 같이 해석할 수 있다.

> 1 안에는 $\frac{3}{5}$이 $\frac{5}{3}$번 들어가므로, 2 안에는 $\frac{3}{5}$이 $\frac{5}{3}\times 2$번 들어간다. 따라서 $2\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}\times 2$이다. 대분수인 경우도 마찬가지로, $1\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$은 $\frac{5}{3}$에 $1\frac{1}{2}$을 곱하면 된다.

결국 '(분수)$\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}\times$(분수)'이다. 이로부터 "피제수와 제수의 역수를 곱한다."라는 알고리즘이 유도될 수 있다. 포함제의 의미로, $\frac{3}{5}$의 역수 $\frac{5}{3}$는 "1 안에 $\frac{3}{5}$이 몇 번 들어가는가?"를 나타낸다. 즉, $\frac{3}{5}$을 $\frac{5}{3}$번 하면 1이 되고, 이는 곱셈의 뜻에 의해 $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=1$이 된다.

이상과 같이 포함제 맥락은 제수의 역수에 나름대로의 의미를 부여하고, 왜 제수의 역수를 곱하게 되는지를 보여주지만, 다음과 같은 단점이 있다. "$\frac{3}{4}$ 안에 $\frac{2}{5}$가 몇 번 들어가는가?"라는 문제에 "$1\frac{7}{8}$번 들어간다."라고 하는 것은 어색하다. 분수는 '몇 번'이라는 표현과 잘 어울리지 않는다. 뿐만 아니라 "1번 들어가며 $\frac{7}{8}$이 남는다."와 같은 오답을 유도할 가능성이 있다. 또, 제수가 피제수보다 커지면 어색하다. 예를 들어, "$\frac{3}{4}m$를 $\frac{5}{2}m$씩 자르면 몇 도막이 되는가?"라는 문제에 대해 '$\frac{3}{10}$도막'이라는 답을 형식적으로 도출했다 해도, 이 답을 받아들이는 것은 어색하다. 또, (피제수)÷(제수)가 곧바로 (피제수)×(제수의 역수)가 아니라, (제수의 역수)×(피제수)가 된다는 점에서 교과서에 제시된 표준 알고리즘과 일치하지 않는다.

2. 단위비율 결정 맥락

단위비율 결정 맥락에서 분수의 나눗셈은 예를 들어 "1인당 사탕을 몇 개씩 받는가?", 또는 "1m 당 무게는 얼마인가?"와 같이 '1' 곧, 단위에 대한 양을 구하는 것에 관련 된다[1].

예를 들어, $\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$는 "철근 $\frac{2}{7}m$의 무게가 $\frac{3}{4}kg$ 일 때 철근 1m의 무게는 몇 kg 인가?"와 같은 단위비율의 문제로 생각할 수 있다.

포함제 맥락에서는 '1÷(어떤 수)'가 제수의 역수의 의미와 관련하여 중요하였으나, 단위비율 결정 맥락에서는 '(어떤 수)÷1'이 중요하다. 즉, 단위비율 결정 맥락은 제수를 1로 만들면 나눗셈을 해결할 수 있음을 지시하고 있다. 제수를 1로 바꾸는 방법을 모색하는 과정에서 제수의 역수가 자연스럽게 등장하며, "피제수에 제수의 역수를 곱한다"는 분수 나눗셈 알고리즘이 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=\left(\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}\right)\div\left(\frac{2}{7}\times\frac{7}{2}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}$$

위 과정은 피제수와 제수에 같은 수를 곱해도 몫에 변함이 없다는 사실을 토대로 한다. 이와 매우 유사하게, 인도의 한 초등학교 수학 교과서(Gupta & Ramachandram, 2003)에서는 분수의 나눗셈을 번분수로 바꾸어, 분모를 1로 만들어 [그림 II-1]과 같이 해결하고 있다.

Let us now divide $\frac{2}{3}$ by $\frac{3}{4}$

$$\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}\times\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}{1}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$$

Thus, $\underbrace{\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}$

Multiplicative inverse of $\frac{3}{4}$

[그림 II-1] 번분수(Gupta. & Ramachandram, 2003 : 57)

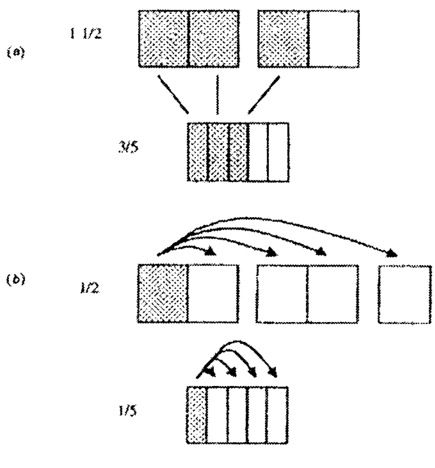
1) 단위비율 결정 맥락은 등분제 맥락과 밀접한 관련이 있다. '등분'이라는 말은 제수의 개수로 똑같이 나눈다는 것으로, 제수가 자연수인 경우는 어울리지만 분수인 경우는 적합하지 않다. 그러나 '사탕 10개를 2명에게 똑같이 나누어 줄 때 몇 개씩 주어야 하는가'와 같은 등분제에서 '자연수'로 등분하는 것에 주목하는 대신, '1인당' 얼마씩 주어야 하는가에 주목하면, 등분제는 단위비율 결정 상황의 한 부분이라 할 수 있다.

이 방법에서는 $a \div b$의 나눗셈이 $\frac{a}{b}$와 같으며, 1이 분모와 분자가 같은 분수 즉, $\frac{c}{c}$꼴로 표현될 수 있음을 알아야 한다. 그런데 우리나라 초등학교 수학에서는 c가 분수인 경우 즉, 번분수는 다루지 않고 있다.

한편, 단위비율 결정 맥락에서 제수의 역수는 '줄이고 늘이는 연산자'로 설명될 수 있다(Siebert, 2002). 예를 들어, $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$은 $\frac{3}{5}$에 해당하는 양이 $1\frac{1}{2}$일 때, 1에 해당하는 양을 구하는 문제이다. 먼저 $\frac{1}{5}$에 해당하는 양이 얼마인지 구한다(줄인다). 그것은 $\frac{1}{2}$이다. 그 다음 1에 해당하는 양을 구한다(늘린다). 결국 3으로 나누고 5를 곱한 것이므로 $\frac{5}{3}$를 곱한 것과 같다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = 1\frac{1}{2} \div 3 \times 5 = 1\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$$

다시 말해, $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$에서 $\frac{3}{5}$의 역수 $\frac{5}{3}$의 의미는 $\frac{3}{5}$을 $\frac{1}{5}$로 줄였다가 1로 늘이는 연산자이다.



[그림 II-2] 연산자(Siebert, 2002: 253)

이와 유사하게 Dewey와 Mclellan(1895: 260)은 제수를 뒤집어 곱하는 분수 나눗셈 규칙을 정당화하는 방법을 다음과 같이 제시하였다.

> $\frac{3}{8} \div \frac{5}{9}$. $\frac{3}{8}$을 5로 나누면 $\frac{3}{40}$이 된다. 그러나 5가 아니라 5의 $\frac{1}{9}$로 나누어야 한다. 그러므로 $\frac{3}{40}$을 9배해야 한다. 그러므로 $\frac{27}{40}$, 즉 $\frac{3 \times 9}{8 \times 5}$.

이 과정 역시 줄이고 늘이는 방식으로 분수의 나눗셈을 해결하는 단위비율 결정 맥락이다. $\frac{3}{8}$을 5로 나누어 $\frac{3}{40}$을 구한 것은 '$\frac{1}{9}$에 해당하는 양'을 구한 것이다. 후에 $\frac{3}{40}$을 9배 한 것은 '1에 해당하는 양'을 구한 것이다.

단위비율 결정 맥락은 제수의 역수의 의미나 제수의 역수를 곱하는 이유를 보여준다. 뿐만 아니라, 제수가 피제수보다 커도 어색하지 않고 나눗셈 계산 결과와 실제 상황의 답이 정확히 일치한다.

3. 비 또는 측정 단위의 세분 맥락

유리수 $\frac{a}{b}$는 두 양 a와 b 사이의 비를 표현하는 것으로 볼 수 있다[2]. 이를 비율분수라고 한다(이용률, 2001). $a \div b$는 $\frac{a}{b}$로 표현되므로, 나눗셈은 두 양 a와 b 사이의 곱셈적 비교 즉, 비의 값을 구하는 것으로 해석될 수 있다.

동분모분수는 같은 크기의 조각들의 집합으로 생각할 수 있다. 따라서 동분모분수의 나눗셈 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$은 $\frac{1}{5}$크기의 조각이 각각 2개, 3개 있는 두 집합을 곱셈적으로 비교하는 상황으로 해석될 수 있다. 곱셈적 비교에서는 두 집합의 조각의 크기가 같으면 크기는 생각하지 않고 개수만 생각하면 된다. 이로부터, $2 \div 3$, $\frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$, $\frac{2}{8} \div \frac{3}{8}$은 모두 같은 답을 가짐을 알 수 있다. 그

러므로 동분모분수의 나눗셈은 분자끼리 나누면 된다(Flores, 2002: 239).

다른 한편, 이분모분수의 나눗셈은 동분모분수의 나눗셈으로 환원하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3\times5}{4\times5} \div \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{3\times5}{2\times4} = \frac{3\times5}{4\times2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

Dewey와 Mclellan(1895: 258-260)은 분수 나눗셈 알고리즘의 핵심을 측정 단위를 같게 만드는 것으로 보고 있다. 예를 들어, 12(달러)÷$\frac{4}{5}$(달러)를 계산하려면, 제수와 피제수가 같은 측정 단위로 표현되어야 한다. 제수 $\frac{4}{5}$달러는 $\frac{1}{5}$달러를 단위로 4번, 피제수 12달러는 $\frac{1}{5}$달러를 단위로 60번(12×5) 측정된다. 결국 이 문제는 자연수 나눗셈(60÷4)으로 환원된다.

마찬가지로, $\frac{12}{13}$(달러)÷$\frac{4}{5}$(달러)에서 제수 $\frac{4}{5}$달러는 $\frac{1}{5}$달러를 단위로 4번, 피제수 $\frac{12}{13}$달러는 $\frac{1}{5}$달러를 단위로 $\frac{60}{13}$($\frac{12}{13}$×5)번 측정된다. 이렇게 해서 $\frac{12}{13}$(달러)÷$\frac{4}{5}$(달러)는 $\frac{60}{13}$÷4와 같게 된다. 이처럼 피제수와 제수를 같은 측정 단위로 표현함으로써 제수가 분수인 나눗셈은 제수가 자연수인 나눗셈으로 환원된다.

이 과정은 분수 나눗셈 알고리즘에서 '제수의 분모인 자연수'를 피제수에 곱하는 이유를 설명해 준다. 제수 $\frac{4}{5}$의 분자 4는 $\frac{1}{5}$로 제수를 측정한 회수를 의미하며, 분모 5는 피제수를 동일 측정 단위로 측정한 결과로 나타내기 위해 피제수에 곱해야 하는 수를 나타낸다. 그러나 이 맥락에서 제수의 역수 $\frac{5}{4}$ 자체의 의미는 분명하지 않다.

지금까지 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 측정 단위로 하였으나, $\frac{1}{\text{피제수와 제수의 분모의 최소공배수}}$과 같이 측정 단위를 세분하면 동분모 분수의 나눗셈으로 환원되어, 결국 자연수의 나눗셈이 된다.

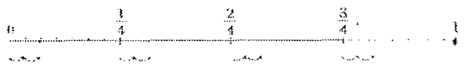
예를 들어, $\frac{12}{13}$(달러)÷$\frac{4}{5}$(달러)에서 $\frac{1}{13\times5}$ $=\frac{1}{65}$(달러)를 측정 단위로 하면, 피제수 $\frac{12}{13}$(달러)는 $\frac{1}{65}$(달러)가 60($\frac{12}{13}$×13×5)번 측정되고, 제수 $\frac{4}{5}$(달러)는 42($\frac{4}{5}$×13×5)번 측정된다. 그러므로 $\frac{12}{13} \div \frac{4}{5} = \frac{12\times5}{4\times13} = \frac{12\times5}{13\times4}$가 된다. 측정 단위의 세분이라는 아이디어는 제수의 분모와 분자의 의미, 피제수에 제수의 분모가 곱해지는 이유를 설명해주지만, 제수의 역수 그 자체의 의미를 분명하게 드러내지는 못한다.

4. 곱셈의 역연산 맥락

나눗셈은 곱셈의 역연산이다. 예를 들어 8÷2는 "2의 몇 배가 8인가?"와 같은 문제로 환원할 수 있는 것과 마찬가지로 분수의 나눗셈 역시 곱셈의 역연산으로 환원하여 문제를 해결할 수 있다. 예를 들어, 나눗셈 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}$을 구하는 방법을 생각해 보자(이용률, 2001). 이 문제는 "$\frac{3}{4}$에 얼마를 곱하면 $\frac{2}{7}$가 되는가?" 혹은 "$\frac{3}{4}$의 몇 배가 $\frac{2}{7}$인가?"를 구하는 것이다. 이를 위해 아래 수직선과 같이 1을 4등분 하여 $\frac{3}{4}$을 표시한 후, 다시 각 부분을 7등분하면 화살표로 표시된 모든 부분이 $\frac{2}{7}$에 해당하는 양이 된다. [그림II-3]에서 화살표 하나는 $\frac{1}{28}$을 나타낸다.

2) 두 양을 곱셈적 구조로 비교하는 경우 '포함', '분리'의 두 측면에서의 비교가 가능하다. '포함'은 '남자가 전체의 $\frac{10}{30}$'과 같이 비교하는 것이고, '분리'는 '여자는 남자의 2배, 남자는 여자의 $\frac{10}{20}$'과 같이 보는 것을 뜻한다.

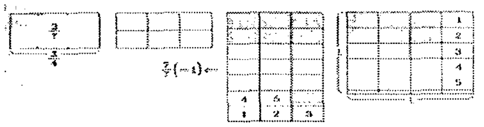
$\frac{3}{4}$은 화살표 하나가 7×3개, $\frac{2}{7}$는 화살표 하나가 2×4개 있다. 따라서 $\frac{2}{7}$는 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2\times4}{7\times3}$이다.



[그림 II-3] 수직선 모델(이용률, 2001: 162)

이 과정에서 "제수의 역수를 곱한다."는 알고리즘을 이끌어낼 수 있지만, 제수의 역수를 곱하는 이유 즉, 제수 $\frac{3}{4}$의 역수 $\frac{4}{3}$의 의미가 분명하게 드러나지 않는다.

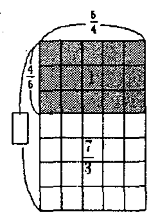
직사각형의 넓이 모델을 이용하여 분수의 나눗셈을 해결할 수도 있다. $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}$은 "넓이가 $\frac{2}{7}$이고 가로의 길이가 $\frac{3}{4}$인 직사각형의 세로의 길이를 구하는 것"으로 해석될 수 있다. [그림 II-4]의 첫째 그림은 가로가 $\frac{3}{4}$이고 넓이가 $\frac{2}{7}$인 직사각형이며, 둘째 그림은 그것을 3(가로)×2(세로)로 분할한 것이다. 셋째 그림은 넓이가 1인 직사각형으로 만들기 위해 3×7의 크기로 확장한 것이다. 넷째 그림은 셋째 그림의 21개 단위사각형을 재배열하여 정사각형으로 만든 것이다. 21개를 우선 4×5(20)로 배열하고 남은 한 개를 4등분하여 하단에 배열하면, 가로와 넓이가 모두 1이므로 결국 세로도 1인 정사각형이 된다. 이 정사각형의 세로는 4등분한 단위사각형의 21배에 해당하므로, 결국 단위사각형의 세로는 $\frac{4}{21}$이며, 우리가 처음에 구하고자 한 직사각형의 세로는 단위사각형이 두개이므로 $\frac{8}{21}$ 이 된다. 이것은 $\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$와 같다.



[그림 II-4] 직사각형 모델(이용률, 2001: 163)

'넓이 모델'은 '카테시안 곱의 역 연산으로서의 나눗셈'이라는 맥락에서 온 것으로 볼 수 있다. 이 모델은 결과적으로 제수를 뒤집어 곱하면 답이 나온다는 알고리즘과 연결되지만, 이 과정에서 제수 $\frac{3}{4}$의 역수 $\frac{4}{3}$의 의미는 분명하게 드러나지 않으며, 역수를 곱해야 하는 이유도 분명하게 드러나지 않는다.

제수의 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 분명히 드러내기 위해서는 [그림II-4]의 셋째 그림에 주목할 필요가 있다. 사실상 위의 모델에서 넓이가 1인 직사각형을 적절히 재구성해 정사각형으로 만드는 마지막 과정은 그다지 중요하지 않다. 중요한 것은 셋째 그림에서 보듯이 넓이가 1인 직사각형을 만들어 생각한다는 것이다. 이 과정을 $\frac{7}{3}\div\frac{5}{4}$를 예로 하여 살펴보자.



[그림 II-5] 넓이 모델

[그림 II-5]는 가로가 $\frac{5}{4}$이고 넓이가 $\frac{7}{3}$ 인 직사각형이며, 그 중 위의 세 줄은 넓이가 1인 직사각형으로 그 세로의 길이는 $\frac{4}{5}$가 된다. 이것이 바로 제수의 역수의 의미이다.

[그림 II-5]에서 넓이에 주목하면, 전체 직사각형의 넓이 $\frac{7}{3}$은 위 세 줄로 이루어진 직사각형의 넓이 1의 $\frac{7}{3}$배이다. 가로가 일정하므로 구하고자 하는 전체 직사각형의 세로의 길이는 위 세 줄로 이루어진 직사각형의 세로의 길이 $\frac{4}{5}$의 $\frac{7}{3}$배이다. 따라서 $\square=\frac{4}{5}\times\frac{7}{3}$이 된다. 즉, (피제수)÷

(제수)는 (제수의 역수)×(피제수)가 된다.

이 모델에서 제수의 역수는 넓이가 1인 직사각형의 세로의 길이를 의미한다. 이 모델은 넓이가 1인 경우, 즉 '1÷제수'가 핵심이 됨을 보여준다. '1÷제수'가 핵심이고 비례 관계를 이용한다는 점에서, 이 모델 사용 맥락은 포함제 맥락과 유사하다. 또, (피제수)÷(제수)가 곧바로 (피제수)×(제수의 역수)가 아니라, (제수의 역수)×(피제수)가 된다는 점에서도 포함제와 유사하다.

5. 분수의 곱셈으로부터의 유추

초등학교수학 지도에서는 새로운 개념이나 원리의 도입을 위해 이전에 학습한 유사한 내용을 상기시키는 방식으로 유추적 사고를 많이 활용한다. 분수의 나눗셈 알고리즘은 분수의 곱셈 알고리즘과 유사하게 전개되는 부분이 있다. 이를 활용하는 방안을 다음과 같은 가상의 수업 상황을 통해 살펴보기로 한다.

교사: $\frac{9}{8}\div\frac{3}{2}$을 어떻게 계산하면 좋을까?

학생: 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 나누어서 다음과 같이 계산하면 될 것 같아요.
$\frac{9}{8}\div\frac{3}{2}=\frac{9\div3}{8\div2}=\frac{3}{4}$

교사: 왜 그러면 될 것 같다고 생각하게 되었니?

학생: 두 분수의 곱셈을 할 때, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2}{4\times5}$와 같이 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱했으니까요. 나눗셈도 그렇게 하면 될 것 같아요.

교사: 그렇지만 분수의 덧셈에서는 $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$ $=\frac{3+2}{4+5}$와 같이 하면 안 된다고 했잖아. 그런데 나눗셈에서 그렇게 해도 될까?

학생: 덧셈은 뺄셈과 친구이고, 나눗셈은 곱셈과 친구이기 때문에, 곱셈에서 그렇게 해도 되었으니까 나눗셈에서도 될 거예요.

교사: $\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$는 어떠니? 분자끼리 나누고 분모끼리 나누면 $\frac{3\div2}{4\div7}$이 되는데 더 이상 계산을 할 수가 없지 않니?

학생: 그렇군요. 분자끼리 나누고 분모끼리 나누면 안 되겠어요.

위에서 학생은 이내 분자끼리 나누고 분모끼리 나누는 방법을 포기하지만, 사실은 이 방법에 약간의 테크닉을 구사하면 곱셈과 유사한 방법을 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$에도 적용할 수 있다. 3÷2, 4÷7을 계산할 수 없는 것이 문제가 되므로, 이것을 계산 가능하도록 미리 피제수에 제수의 분자와 분모를 곱한다. 그러면 다음과 같이 된다.

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=\frac{3\times2\times7}{4\times2\times7}\div\frac{2}{7}=\frac{3\times2\times7\div2}{4\times2\times7\div7}=\frac{3\times7}{4\times2}$$

이 방법은 유추적 사고를 경험하게 할 수 있고, 곱셈과 나눗셈의 '친구 관계'를 인식하게 할 수 있고, 왜 분수 나눗셈을 계산할 때 제수의 역수를 곱하게 되는지도 잘 보여준다. 피제수와 제수의 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 각각 나눗셈이 되도록 하기 위해, 제수의 분자 분모를 피제수에 곱하고, 그것의 분자 분모를 각각 제수의 분자 분모로 각각 나눈다. 그러므로 결과적으로 분자에서는 제수의 분자 2가 사라지고 분모 7이 남고, 분모에는 제수의 분모 7이 사라지고 제수의 분자 2가 남게 된다. 그러나 제수의 역수 그 자체의 의미를 잘 드러내지는 못한다. 또, 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 나눈다고 하는 것이 왜 정당한지를 설명해야 하는 문제가 남아 있다. 유추가 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 나누는 것의 정당성까지는 제공하지 못하기 때문이다.

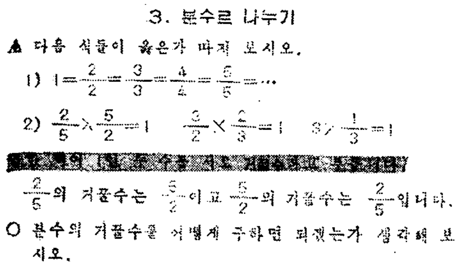
III. 남북한, 중국, 일본 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방식

여기서는 우리나라, 북한, 중국, 일본의 교

과서에서 “제수의 역수를 곱한다.”는 분수 나눗셈 알고리즘이 어떻게 도입되고 있는지 ‘(분수)÷(분수)’ 유형의 나눗셈을 중심으로 살펴본다. 비교에 사용된 북한 교과서는 교육도서출판사에서 2002년에 발행한 《인민학교 수학 4》이다. 중국의 교과서는 人民敎育出版社에서 2002년에 발행한 《九年義務敎育6年制小學校科書 數學 第11冊》 및 연변교육출판사에서 발행한 이 책의 번역본이다. 일본 교과서는 鷄林館과 東京書籍에서 2004년에 각각 출판한 《新しい算數6上》와 《算數6年下》이다.

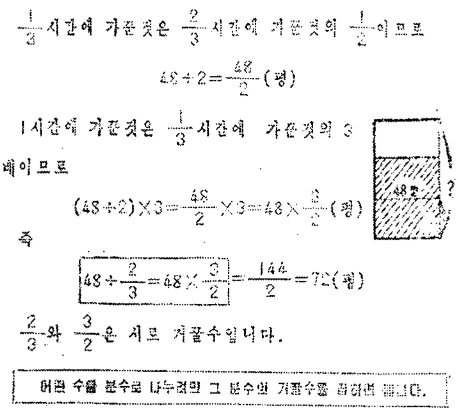
1. 북한 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방식

북한에서 제수가 분수인 분수 나눗셈은 인민학교 4학년에서 취급된다. 북한 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입의 첫째 특징은 [그림 III-1]에서 볼 수 있듯이 분수의 나눗셈 이전에 ‘거꿀수’(역수)를 간단히 다룬다는 것이다.



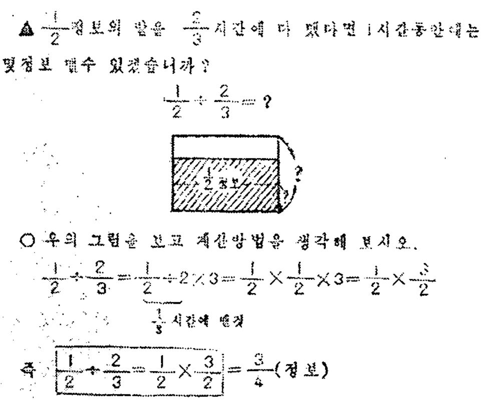
[그림 III-1] 거꿀수(남호석, 박희순, 2002:203)

역수를 다룬 이후, “순철이네는 꽃밭 48평을 $\frac{1}{3}$시간에 가꾸었습니다. 이렇게 하면 1시간 동안에 몇 평을 가꿀 수 있겠습니까?”라는 문제에 뒤이어 “$\frac{2}{3}$시간에 가꾸었다면 1시간에는 몇 평을 가꾸게 되겠습니까?”와 같은 단위비율 결정 맥락의 문장제를 소재로 [그림III-2]와 같이 분수의 나눗셈 알고리즘을 이끌어 내고 있다.



[그림 III-2] 분수나눗셈(남호석, 박희순, 2002:205)

우선 $\frac{1}{3}$시간에 가꾼 것을 구하고 그것을 기초로 1시간에 가꾼 것을 구하는 풀이를 제시하고 있다. 이것은 단위비율의 결정 맥락에서 제수의 역수의 의미 즉, ‘줄이고 늘이는 연산자’의 의미를 다루고 있는 것이다. [그림 III-3]에서도 이러한 의미가 취급되고 있다.



[그림 III-3] 분수나눗셈(남호석,박희순, 2002:207)

이와 같이 북한 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입을 위해 단위비율 결정 맥락에서 ‘줄이고 늘이는 연산자’로서의 제수의 역수의 의미를 먼저 다루고 있다.

2. 중국 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방식

중국 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법은 북한 교과서의 도입 방법과 매우 유사하다. [그림 III-4]에서 알 수 있듯이 분수의 나눗셈이 시작되기 전에 별도의 절을 두어 '倒數'(역수)를 강조해서 다룬다.

目　录

3. 倒数的认识

观察下面的算式。

$\frac{3}{8}\times\frac{8}{3}=1$　　$\frac{7}{15}\times\frac{15}{7}=1$

$3\times\frac{1}{3}=1$　　$\frac{1}{80}\times 80=1$

每个算式中两个数相乘的积是 1。

乘积是 1 的两个数叫做互为倒数。

$\frac{3}{8}$和$\frac{8}{3}$互为倒数，就是$\frac{3}{8}$的倒数是$\frac{8}{3}$，$\frac{8}{3}$的倒数是$\frac{3}{8}$。

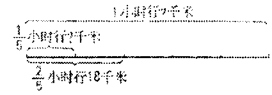
[그림 III-4] 역수(人民教育出版社, 2002: 205)

중국 교과서에서 분수 나눗셈 알고리즘을 이끌어내는 과정은 다음과 같다. 먼저 예비문제로, "한 자동차가 2시간에 90km를 달렸을 때, 1시간에 몇 km씩 달렸겠는가?"라는 문제를 제시하고 뒤이어 본문제인 "한 자동차가 $\frac{2}{5}$시간에 18km를 달렸다. 1시간에 몇 km씩 달렸겠는가?"를 제시한다. 이것은 단위비율 결정 맥락의 문제이다. 풀이 과정은 [그림 III-5]와 같이 두 단계로 나누어져 있다.

2 一辆汽车$\frac{2}{5}$小时行驶 18 千米，1 小时行驶多少千米？

想：(1) 根据"速度＝路程÷时间"，列出算式是：

$18\div\frac{2}{5}$



(2) 分两步进行计算

第一步：求$\frac{1}{5}$小时行多少千米。

因为 2 个$\frac{1}{5}$小时行 18 千米，所以要算 18÷2，

也就是 $18\times\frac{1}{2}$（千米）。

第二步：求 1 小时行多少千米。

因为 1 小时是 5 个$\frac{1}{5}$小时，所以要算 $18\times\frac{1}{2}\times 5$，

也就是 $18\times\frac{5}{2}$（千米）。

[그림 III-5] 분수나눗셈(人民教育出版社, 2002: 28)

단계(1)에서는 '(속도)=(거리)÷(시간)'에 의해 $18\div\frac{2}{5}$라는 식을 구한다. 여기서 주의 깊게 볼 필요가 있는 부분은 단계(2)이다. 단계(2)는 다시 두 개의 하위 절차로 나누어져 있다.

첫째 절차: $\frac{1}{5}$시간에 몇 km를 달렸는지 구한다. 18÷2, 즉 $18\times\frac{1}{2}$

둘째 절차: 1시간에 몇 km씩 달리는지 구한다. $18\times\frac{1}{2}\times 5$, 즉 $18\times\frac{5}{2}$

이렇게 해서 $18\div\frac{2}{5}=18\times\frac{5}{2}$가 됨을 이끌어내고 있다. (×제수의 역수)는 이 두 절차 즉, 줄이고 늘이는 절차를 나타낸다.

뒤이어 [그림III-6]과 같이 동일한 유형의 시간-거리 문제로 '(분수)÷(분수)'의 계산 방법을 설명하고 있다. 풀이 과정 중에 '어째서 $\times\frac{10}{3}$으로 고칠 수 있는지' 생각해 보게 하고 있다.

3 小刚$\frac{3}{10}$小时走了$\frac{14}{15}$千米，他 1 小时走多少千米？

$\frac{14}{15}\div\frac{3}{10}$

$=\frac{14}{\cancel{15}_{3}}\times\frac{\cancel{10}^{2}}{3}$

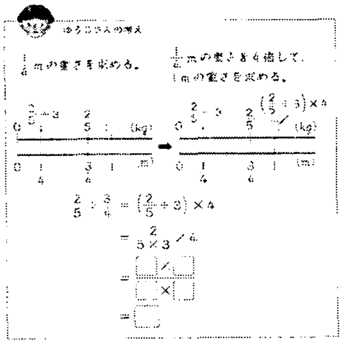
想一想：这里为什么可以变成"$\times\frac{10}{3}$"？

[그림 III-6] 역수곱하기(人民教育出版社, 2002: 29)

이와 같이 중국 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입 이전에 역수의 개념을 정식으로 별도의 절을 두어 취급하고, 분수 나눗셈 알고리즘을 단위비율 결정 맥락에 충실하게 '줄이고 늘이는 연산자'라는 제수의 역수의 의미를 드러내면서 이끌어내고 있다.

3. 일본 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방식

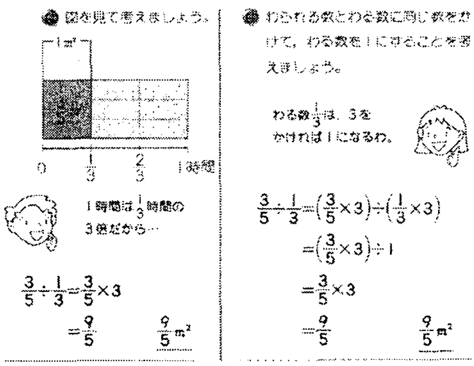
일본 교과서 역시 단위비율 결정 맥락의 문장제를 소재로 하여 분수 나눗셈 알고리즘을 이끌어 내고 있다. 먼저 東京書籍에서 발행한 교과서에서는(69쪽) 예를 들어, "$\frac{3}{4}m$의 무게가 $\frac{2}{5}kg$인 파이프 1 m의 무게는 몇 kg인가?"를 $\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$으로 구할 때 먼저 $\frac{1}{4}m$에 해당하는 무게를 구하고, 이것을 4배해서 1 m의 무게를 구하는 풀이를 제시하고 있다. 이것은 중국이나 북한 교과서에서의 도입 방법과 유사하게 '줄이고 늘이는 연산자'로서의 제수의 역수의 의미에 기초한 도입이라 볼 수 있다. 또한, 東京書籍에서 발행한 교과서에서는, [그림 III-7]에서 볼 수 있듯이, 선분도를 사용하여 두 양 사이의 비례 관계를 드러내는 특징이 있다.



[그림 III-7]분수나눗셈(杉山吉茂 外, 2004:6

鷄林館에서 발행한 교과서에서도(27쪽) 예를 들어, "$\frac{3}{5}$㎡의 천을 $\frac{2}{3}$시간에 짜는 사람은 1시간 당 몇 ㎡의 천을 짤 수 있을까?"와 같은 단위비율 결정 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하지만, 전개 방식에서는 東京書籍에서 발행한 교과서와는 차이가 있다. 鷄林館에서 발행한 교과서에서는 먼저 제수가 자연수 2인 경우를 취급하고(25쪽), 둘째로 제수가 $\frac{1}{3}$과 같은 단위분수인 경우를 다루고(26쪽), 셋째로 제수가 $\frac{2}{3}$와 같이 단위분수가 아닌 경우를 취급한다(27쪽).

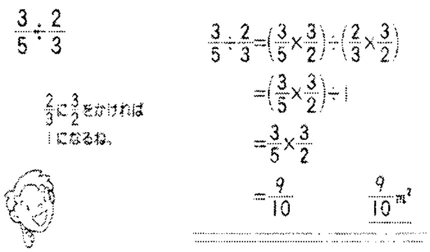
제수가 $\frac{1}{3}$과 같은 단위분수인 경우, [그림 III-8]의 왼쪽에 제시된 풀이에서 볼 수 있듯이, '줄이는' 과정은 나타나지 않으며 '늘이는' 과정만 나타난다. 제수가 이미 단위분수이므로, '줄이는' 과정이 불필요하기 때문이다.



[그림 III-8] 분수 나눗셈(細川藤次 外, 2004: 26)

그런데 [그림 III-8]의 오른쪽 풀이와 관련하여, 鷄林館에서 발행한 교과서에서 단위분수가 제수인 경우를 먼저 사용한 것에는 나름대로의 의도가 있는 것으로 보인다. 오른쪽 풀이는 나눗셈의 제수와 피제수에 같은 자연수를 곱해도 그 값이 변하지 않는다는 것을 이용한 것이다. 이 때 절차는 분수에서 분자, 분모에 각각 3을

곱해도 그 값이 변하지 않는다는 것이고, 이것은 앞에서 통분과 관련하여 학습한 것이다. 그러나 분자, 분모 각각에 곱해지는 수가 분수인 경우를 이전에 정식으로 취급한 적이 없다. 이 때문에 우선 자연수를 곱하면 되는 상황 즉, 제수가 단위분수인 상황에서 시작하여, 유추적으로, [그림 III-9]와 같이 분수를 피제수와 제수에 각각 곱하는 상황으로 옮겨 가려는 의도가 있는 것으로 보인다.



[그림 III-9] 역수곱하기 (細川藤次 外, 2004: 27)

앞에서 이미 논의했듯이 단위비율 결정 맥락은 "제수를 1로 만들면 나눗셈을 해결할 수 있다."는 해결 방향을 지시하고 있다. 비율은 곱셈적 관계이므로 제수를 1로 만들려면 제수의 역수를 곱해야 한다. [그림 III-9]의 풀이는 이와 같은 접근법을 보여 준다. 그런데 통분에서 분자, 분모에 각각 자연수가 아닌 분수를 곱할 때도 값이 변하지 않는다는 것을 명확히 취급한 적이 없기 때문에, 여기서는 다소 비약이 있어 보인다. 또, 제수 $\frac{2}{3}$를 1로 만드는 데는 '$\times\frac{3}{2}$'을 해도 되지만, '$+\frac{1}{3}$'을 해도 된다. 나눗셈이 곱셈적 관계에 기초하고 있다는 것을 알아야 '$+\frac{1}{3}$'이 아니라 '$\times\frac{3}{2}$'을 해야 한다는 것을 알 수 있다. 鷄林館에서 발행한 교과서에서는 이와 같은 것을 드러내어 설명하지 않으나, 제수가 $\frac{1}{3}$과 같은 단위분수인 경우의 풀이를 통해 학생들이 '$\times\frac{3}{2}$'을 해야 한다고 생각하게 이끄는 것으로 보인다. $\frac{3}{5}\div\frac{1}{3}$에서 $(\frac{3}{5}+\frac{2}{3})\div(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})$와 같이 하는 것은 문제의 뜻에 맞지 않다는 것을 교과서에 제시된 그림에서 바로 알 수 있기 때문이다. 이와 같이 일본 교과서에서는 역수라는 용어를 사용하지도, 정식으로 취급하지도 않지만, 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수의 역수가 지니는 의미를 취급하고 있다. 특히, 鷄林館에서 발행한 교과서에서는 '(어떤 수)÷1을 만드는 것'이 중요하며, 그렇게 하려면 제수의 역수를 곱하면 된다는 것을 강조하는 도입 방식을 취하고 있다.

4. 우리나라 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입

우리나라 교과서에서는 <5-나 단계>에서 '(분수)÷(자연수)' 유형의 계산을 다루고, <6-나 단계>에서 '(분수)÷(분수)' 유형의 계산을 다룬다. <5-나 단계>에서는 "1m의 색 테이프를 5등분했을 때 한 도막의 길이를 알아보는" 등분제 맥락을 소재로 하여 먼저 '1÷(자연수)'를 취급한다. "1을 5등분한 한 조각은 $\frac{1}{5}$이며, 이것은 1의 $\frac{1}{5}$배와 같다. 따라서 $1\div5=1\times\frac{1}{5}$이다."와 같은 내용을 간단한 그림을 통해 전개한다. 이후 3÷5는 3의 $\frac{1}{5}$배이며, $\frac{2}{3}\div5$는 $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{5}$배라는 사실이 모두 등분제 맥락을 통해 유도되고 있다.

한편, <6-나 단계>에서는 예를 들어, "길이가 $\frac{5}{6}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 몇 도막이 되는지 알아보자."와 같은 식으로 전반적으로 포함제 문제를 통해 '(분수)÷(분수)'를 도입하고 있다. 앞에서 포함제 맥락에서는 '1÷(어떤 수)' 형태가, 단위비율 결정 맥락에서는 '(어떤 수) ÷1' 형태가 중요한 역할을 한다고 하였다. 이러한 관점에서 보면 <5-나 단계>의 '1÷(어떤 수)'는 <6-나 단계>의 포함제 맥락과 연결되기 위한 것으로 생각할 수도 있으나,

<5-나 단계>에서 사용하는 맥락이 포함제가 아닌 동분제라는 점에서 일관성이 결여되어 있다.

또한, <6-나 단계>에서는 동분모분수의 나눗셈을 통해 이분모분수의 나눗셈으로 나아가고 있다. 예를 들어 "길이가 $\frac{5}{6}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 몇 도막이 되는지 알아보자."와 같은 포함제 맥락을 5m를 2m씩 자른 맥락과 비교하면서 $\frac{5}{6}\div\frac{2}{6}$와 5÷2의 몫이 같다는 점에 주목해 $\frac{5}{6}\div\frac{2}{6}=5\div2$라는 분모가 같은 진분수의 계산 방법을 유도하고 있다.

이와 마찬가지로 이분모분수의 나눗셈은 예를 들어, "$\frac{3}{4}$을 $\frac{2}{5}$씩 자르면 몇 도막이 되고 얼마나 남는가?"라는 포함제 맥락을 통해 도입되고 있다. $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$의 몫과 $\frac{15}{20}\div\frac{8}{20}$의 몫이 같다는 것을 취급한 후, 다음과 같이 이분모 진분수 나눗셈 계산 방법을 유도하고 있다.

3 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 계산하는 방법을 알아보시오.

- $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{5}$를 통분하면 $\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}$입니다. 이것을 이용하여 나눗셈 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 계산하는 방법을 생각해 보시오.

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\times5}{4\times5}\div\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{3\times5}{2\times4}$$

그런데 $\frac{3\times5}{2\times4}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$이므로, $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$입니다.

[그림 III-10] 분수나눗셈(교육인적자원부, 2002b:9)

"제수를 뒤집어 곱한다."는 알고리즘을 이끌어내는 결정적 과정은 "동분모분수의 나눗셈은 분자끼리 나눈 것과 같다."는 것이다. 이와 같은 우리나라 교과서에서의 도입 방식은 '비 또는 측정 단위의 세분 맥락'과 유사하다고 볼 수도 있으나, 피제수와 제수의 분모를 통분하는 이유가 측정 단위를 같게 하기 위한 것이 아니라, 단지 동분모분수를 만들기 위한 것이라는 점에서 동일하다고 볼 수 없다.

또, 우리나라 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘을 다루기 전에 역수 개념을 취급하지 않는다. 물론 <5-나 단계>에서 $1\div5=1\times\frac{1}{5}$이라는 사실이 유도되지만, 이것을 통해 5와 $\frac{1}{5}$이 역수 관계에 있다는 것은 알 수는 없다. 이것은 교육과정 구성과 관련이 있어 보인다. 역수는 교육과정상 <7-가 단계>의 용어이다. <7-가 단계> 교과서에서는 정수의 나눗셈에서 역수를 이용하면 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산할 수 있다는 내용을 소개한다. 그러나 이 때 왜 역수를 곱하는지에 대한 이유나 제수의 역수의 의미에 대한 설명은 찾기 어렵다. 다만, $6\times\frac{4}{3}=8$에서 $6=8\div\frac{4}{3}$이고 $6=8\times\frac{3}{4}$이므로 $8\div\frac{4}{3}=8\times\frac{3}{4}$라는 설명이 제시되어 있을 뿐이다(강옥기, 정순영, 이환철, 2004: 84).

이상의 내용을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 중국, 일본, 북한 교과서에서는 단위비율 결정과 관련된 실생활 문제를 소재로 하여 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 반면, 우리나라 교과서에서는 포함제 상황에서 분수의 나눗셈 알고리즘을 이끌어내고 있다. 둘째, 중국, 일본, 북한 교과서에서는 제수의 역수의 의미를 나름대로 드러내려는 시도를 하고 있으나, 우리나라 교과서에서는 그러한 시도를 찾아보기 어렵다. 셋째, 중국과 북한 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입 직전에 역수를 정식으로 취급하고 있다. 일본 교과서에서는 역수라는 용어를 정식으로 다루지는 않으나, 역수 개념은 분수 나눗셈 알고리즘과 관련하여 중요하게 취급하고 있다. 우리나라 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입과 관련하여 역수 개념을 취급하지 않고 있다.

Ⅳ. 교재 구성 및 학습지도 개선 방향

여기서는 지금까지의 고찰을 기초로 우리나라에서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입을 위한 교재 구성 및 학습 지도의 개선 방향에 대하여 논의한다.

첫째, 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유를 드러내어 취급할 필요가 있다. 중국, 북한, 일본 교과서에서는 '줄이고 늘이는 연산자' 또는 '주어진 나눗셈을 (어떤 수)÷1 꼴로 만드는 수단'이라는 제수의 역수의 의미를 취급하고 있다. 그러나 우리나라 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 설명에서는 제수의 역수의 의미가 드러나지 않고 있다.

우리나라 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입 맥락으로 포함제 맥락을 사용한다. II장에서 논의한 바와 같이, 포함제 맥락에서도 제수의 역수는 나름대로의 의미를 지니고 있으며, 그 의미와 관련하여 "제수의 역수를 곱한다."는 알고리즘을 설명하는 것이 가능하다. 포함제 맥락에서 볼 때, 분수 나눗셈 알고리즘의 의미 이해의 핵심은 '피제수가 1인 나눗셈' 즉, '1÷(어떤 수)' 유형의 나눗셈의 의미를 이해하는 것이며, 제수의 역수는 1 안에 제수가 몇 번 들어가는지를 나타낸다.

우리나라 교과서에서는 포함제 맥락에서 '1÷(어떤 수)' 유형의 나눗셈에 주목하게 하지 않으며, 그 결과 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유가 분명하게 드러나지 않는다.

우리나라 교과서에서는 이분모분수의 나눗셈을 통분을 통해 동분모분수의 나눗셈으로 환원하여 분수 나눗셈 알고리즘을 유도하고 있다. 이 방식은 알고리즘의 수학적 정당화로서는 깨끗하고 타당하다. 통분의 이면에는 측정 단위를 같게 만드는 것, 또 그렇게 하기 위해 '더 세분된 단위로 제수와 피제수를 재측정'하는 아이디어가 들어 있지만, 이러한 아이디어가 우리나라 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 부분에는 드러나 있지 않다.

사실, 측정 단위의 세분이라는 아이디어가 드러나도록 교재를 구성한다고 해도 제수의 역수나 제수의 역수를 곱하는 이유를 제대로 취급했다고 하기는 어렵다. 측정 단위의 세분이라는 아이디어는 제수의 역수 그 자체의 의미를 분명하게 드러내지 못하기 때문이다. 따라서 제수의 역수의 의미와 분수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 이유를 분명하게 드러낼 수 있는 방안을 강구해야 한다.

둘째, 단위비율 결정 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 방안을 적극적으로 고려하여야 한다. 현재 우리나라 교과서에서는 포함제 맥락을 소재로 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하고 있다. 그러나 포함제 맥락에서는 제수가 피제수보다 커지면 어색하다. 또한 나눗셈 계산 결과가 문제 상황의 답과 정확히 일치하지 않는다. 예를 들어, 우리나라 교과서의 분수 나눗셈 도입에 사용된 문제, "$\frac{3}{4}$을 $\frac{2}{5}$씩 자르면 몇 도막이 되고 얼마나 남는가?"에서 분수 나눗셈 알고리즘에 의한 계산 결과는 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$이지만, "1도막과 $\frac{7}{8}$이 남는다"고 해서는 안 된다. 말을 바꾸어 "$\frac{3}{4}$에 $\frac{2}{5}$가 $1\frac{7}{8}$번 들어간다."고 하여도 어색하다. 분수는 '몇 번'이라는 우리말 표현과 잘 어울리지 않기 때문이다.

이와 달리 단위비율의 결정 맥락은 제수가 피제수보다 커도 전혀 어색하지 않다. 또 나눗셈 계산 결과와 실제 상황의 답이 정확히 일치한다. 예를 들어, "쇠 파이프 $\frac{7}{4}$m가 $\frac{2}{5}$kg일 때, 쇠 파이프 1m의 무게는 얼마이겠는가?"라는 문

제에서는 $\frac{2}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{35}(kg)$이라는 나눗셈의 계산 결과는 그대로 실제 상황에 일치한다. 따라서 분수 나눗셈 알고리즘 도입 문제로는 계산 결과와 실제 상황이 완전히 일치하고 제수의 역수의 의미를 설명하는데 어색함이 없는 '단위비율 결정' 맥락을 사용하는 것이 적절하다.

도입 부분뿐만 아니라 적용 부분에서도 우리나라 교과서에서는 포함제 맥락이 우세하다. <6-나 단계> 교과서에 제시된 실생활 문제를 분석해 보면 대부분이 포함제에 해당 된다[3]. 분수 나눗셈의 다양한 측면을 반영해야 한다는 점에서 볼 때, 우리나라 교과서의 개선이 요망된다.

셋째, 분수 나눗셈 알고리즘 도입에서 역수 개념을 드러내어 다룰 필요가 있다. 중국과 북한 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입 직전에 역수를 정식 내용으로 취급하고, 역수에 해당하는 용어도 사용한다. 일본교과서에서는 역수에 해당하는 용어를 사용하지 않고 있으나, 알고리즘 도입 과정에서 역수 개념을 실질적으로 중요하게 사용하고 있다. 예를 들어, 일본 교과서의

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = (\frac{3}{5} \times \frac{3}{2}) \div (\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}) = (\frac{3}{5} \times \frac{3}{2}) \div 1$$

과 같은 내용 속에는 사실상 역수 개념이 사용되고 있는 것이다.

우리나라 교과서에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입 직전에 역수를 별도의 내용으로 취급하지도, 분수나눗셈 도입 과정에서 드러내지도 않고 있다. 역수 개념이 어떤 방식으로든 분수 나눗셈 알고리즘과 관련지어 다루어지지 않으면, 분수 나눗셈 알고리즘에 도입되는 제수의 역수는 그저 '분자와 분모를 뒤집은 수'로 취급될 수밖에 없다. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2}$에서 $\frac{7}{2}$를 $\frac{2}{7}$의 역수 즉, '$\frac{2}{7}$와 곱해서 1이 되는 수'로 인식하는 것과 '$\frac{2}{7}$의 분자 분모를 뒤집은 수'로 인식하는 것은 천양지차다. 앞의 것은 수학적 이해이지만, 뒤의 것은 그저 시각적 특징을 인식한 것일 뿐이다. 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수의 역수는 '제수와 곱해서 1이 되게 하는 수'로 인식되어야 하며, 단순히 제수의 분자, 분모를 뒤바꾼 수로 다루어져서는 안 된다. 또, 제수와 곱해서 1이 되는 수로 인식된다고 하더라도, "결과적으로 나중에 제수와 곱해 보니 1이 되더라."와 같이 인식되는 것으로는 불충분하다. 분수 나눗셈 알고리즘의 유도 과정에서 그것이 역수라는 것이 인식될 수 있어야 한다.

역수는 현재 교육과정상 <7-가 단계> 용어이다. 역수가 중학교 내용이기에 초등 교과서에서 역수와 관련 내용을 드러내어 다루지 못한 것일 수 있다. 역수가 7단계의 용어로 제시되어 있는 것은 약하게는 역수라는 용어를 초등학교에서 사용하면 안 된다는 것을 의미할 수도 있고, 강하게는 역수 개념 자체를 초등에서 취급해서는 안 된다는 것으로 해석될 수도 있다. 약하게 해석한다면 일본과 같이 역수라는 용어는 사용하지 않으면서 내용상 개념을 다루는 방식이 허용될 수 있다. 그러나 이 같은 방식이 교육과정에 위배되는 것이라면, 차기 교육과정 개정에서는 역수를 <6-나 단계>에서 일찍 도입하는 방안을 고려할 필요가 있다.

넷째, 곱셈의 역연산 맥락 및 분수의 곱셈으로부터의 유추 맥락은 분수 나눗셈 알고리즘을 발견하도록 하는 데 긍정적으로 기여할 수 있

---

3) 포함제(6쪽 색 테이프 자르기, 8쪽 도막 자르기, 11쪽 돼지고기 자르기, 16쪽 $3m$를 $\frac{1}{2}m$씩 자르기, 22쪽 물통 채우기), 단위비율 결정(19쪽 철근 $1m$의 무게), 카테시안 곱(21쪽: 직사각형 모양의 꽃밭 세로 길이 구하기)

으므로, 이들 맥락을 활용하는 방안을 강구하여야 한다. 직사각형 모델을 이용해 넓이가 1인 직사각형을 고려하고, 비례 관계에 의해 분수 나눗셈 알고리즘을 이끌어내는 방식은 카테시안 곱의 맥락에서 제수의 역수의 의미, '1÷(어떤 수)'가 중요하다는 것, 나눗셈과 비례적 관계 등에 대해 반성적으로 생각해 볼 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

분수의 곱셈 알고리즘에서 분수의 나눗셈 알고리즘을 유추하는 과정도 긍정적으로 활용할 필요가 있다. 유추적 사고에 의해 피제수와 제수의 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 각각 나눈다는 생각으로부터 분수 나눗셈 알고리즘을 이끌어내는 과정은 수학적인 정당화는 아니지만, 왜 분수 나눗셈을 계산할 때 제수의 역수를 곱하게 되는지를 보여줄 수 있을 뿐 아니라, 분수의 곱셈과 나눗셈을 통합적으로 이해할 수 있는 기회를 제공하며, 아울러 알고리즘 발견의 기회도 제공할 수 있다.

물론 제한된 지면의 교과서에 이러한 내용을 모두 제시하기 어려울 수 있다. 그러나 교사용 지도서에라도 이러한 내용을 할애 한다면 교사의 학습지도에 의해 보완될 수 있을 것이다. 특히, 직사각형 모양의 꽃밭의 세로의 길이 구하기와 같이 현재 교과서에 제시된 문제를 카테시안 곱의 맥락에서 다룸으로써 학생들에게 반성적 사고의 기회를 제공할 수 있다.

끝으로, 현재 우리나라 교과서의 분수 나눗셈 단원 구성에서 지나친 세분이 적절한 것인지 재검토해야 할 필요가 있다. 우리나라 교과서에서는 <5-나 단계>에서 '(분수)÷(자연수)'를, <6-나 단계>에서 '(분수)÷(분수)'를 취급하고 있다. 또한, 각 단계의 구성도 다음과 같이 매우 작은 내용 요소로 분할해 단계적으로 학습하도록 하고 있다.

【5-나 수학 교과서】

- 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 봅시다. (24-25쪽)
- (분수)÷(자연수)를 알아봅시다. (26-27쪽)
- (대분수)÷(자연수)의 계산을 알아봅시다. (28-29쪽)
- 분수와 자연수의 혼합 계산을 알아봅시다. (30-32쪽)[4)]

【6-나 수학 교과서】

- 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 알아봅시다. (6-7쪽)
- 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 알아봅시다. (8-9쪽)
- (자연수)÷(진분수)를 알아봅시다. (10-11쪽)
- 가분수의 나눗셈을 알아봅시다. (12-13쪽)
- 대분수의 나눗셈을 알아봅시다. (14-15쪽)
- (자연수)÷(단위분수)를 알아봅시다. (16-17쪽)
- 분수 나눗셈의 간편한 방법을 알아봅시다. (18-19쪽)

일본 6학년 수학 교과서에서는, 약 6쪽 정도의 분량으로 분수 나눗셈의 계산을 취급하고 있다. 東京書籍에서 발행한 교과서에서는 61-62쪽에서 '분수 나누기 자연수'($\frac{4}{5}\div3$)를 다루고, 69-72쪽에서는 일반적인 분수의 나눗셈($\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$, $\frac{9}{10}\div\frac{3}{4}$, $5\div\frac{2}{3}$ 등)을 다룬다. 鷄林館에서 발행한 교과서에서는 25-28쪽에서 $\frac{3}{5}\div2$, $\frac{3}{5}\div\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}$의 순으로 일반적인 분수의 나눗셈을 다룬다. 본질상 우리나라 교과서 <5-나 단계>와 <6-나 단계> 교과서에서 취급하는 내용을 단지 6쪽의 분량에서 취급하고 있다.

중국 교과서에서는 분수의 나눗셈과 관련하여, 분수의 나누기의 의미(25쪽), 분수 나누기 자연수($\frac{6}{7}\div2$, 26쪽), 한 수를 분수로 나누기

4) $\frac{4}{5}\times3\div6$과 같은 계산을 다룸.

($18 \div \frac{2}{5}$, $\frac{14}{15} \div \frac{3}{10}$, 28-29쪽)를 약 4쪽 분량으로 다루고 있다. 즉, 중국이나 일본 교과서에서는 상대적으로 적은 교재 분량으로 분수 나눗셈을 취급하고 있다.

우리나라 교과서에서 (대분수)÷(자연수), (자연수)÷(진분수), 가분수의 나눗셈, 대분수의 나눗셈, (자연수)÷(단위분수)는 본질상 그 앞에서 취급된 계산 원리를 확대 적용하여 해결되는 것이다. 이와 관련하여 교과서에서도 새로운 계산 원리나 계산 방법이 별도로 제시되는 것은 아니다. 이렇게 볼 때, (자연수)÷(진분수)의 특수한 경우인 (자연수)÷(단위분수)를 별도로 뒤에서 두 페이지를 할애해서 다시 취급할 필요는 없다. 더 나아가 분수의 나눗셈을 현재와 같이 소항목으로 나누어 단계별로 취급하는 것이 좋은지 아니면, 응용문제 형태로 축소해 다루는 것이 나은지 반성할 필요가 있다. 또, 소항목으로 나누어 취급할 경우 각각의 항목을 현재와 같은 내용으로 구성하는 것이 좋은지 아니면 그 앞에 제시된 것과 다른 맥락에서 계산 방법을 새롭게 탐구해 보는 내용을 삽입하는 것이 좋은지에 대해서도 반성적 검토가 필요하다.

Ⅴ. 결 론

분수의 나눗셈은 일상생활에서의 활용 빈도가 매우 낮기 때문에 알고리즘 절차만을 강조할 경우 맹목적이고 기계적인 암기식 학습으로 변질되기 쉽다. 이 연구에서는 이러한 문제 의식을 가지고 남북한, 중국, 일본 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 부분을 비교하여 살펴보았다. 이것을 바탕으로 분수 나눗셈 알고리즘을 여러 가지 다양한 맥락에서 의미 있게 전달하기 위한 가능성을 탐색하였다.

이 연구의 결과, 우리나라 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 및 전개 방식은 일맥락적이며 형식적 측면이 강한 것으로 드러났다. 이런 점에서 우리나라 학생들이 알고리즘이 유도되는 과정을 개념적으로 이해하리라 기대하는 것은 어려워 보인다. 이어 이 연구에서는 분수 나눗셈 알고리즘 도입과 관련된 교육과정 및 교수 학습 과정에 대해 다음과 같은 몇 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, 분수 나눗셈 알고리즘 지도에서 제수의 역수를 곱하는 이유가 학생들의 마음에 설득력 있게 다가가기 위해서는 기존의 도입 방식이 재고되어야 한다. 학생들은 분수의 나눗셈을 하는 경우 왜 제수의 역수를 곱하는지 맥락적으로 이해해야 하며, 이를 위해서는 분수의 역수가 지니는 의미가 보다 명확하게 드러나도록 다루어져야 한다. 현재 <7-가 단계> 용어인 ‘역수’를 <6-나 단계> 분수의 나눗셈 지도 장면에서 제시하거나, 일본 교과서와 같이 적어도 역수의 의미가 드러나도록 지도하는 방안이 고려되어야 한다. 둘째, 분수 나눗셈 도입은 가급적 다양한 맥락에서 풍부한 의미로 전달되는 것이 바람직하나, 도입 초기에는 단위비율 결정 맥락을 활용하는 것이 바람직하다. 단위비율 결정 맥락은 자연수 나눗셈의 등분제와 맥을 같이 하는 것으로, 제수를 1로 바꾸는 방법을 모색하는 과정에서 제수의 역수가 피제수를 ‘줄이고 늘이는’ 연산자로 깨끗하게 설명될 수 있기 때문이다. 마지막으로, <5-나 단계>, <6-나 단계>의 두 단계에 걸쳐 여러 주제로 세분되어 있는 분수 나눗셈 단원 구성을 한 학년 혹은 한 단계에 안에서 통합적으로 다루는 방안이 고려되어야 한다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2004). **중학교 수학 7-가**. 서울: (주)두산.

교육부(1997). **수학과 교육과정**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002a). **수학 5-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 6-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

김삼태 · 이식(1999). 남 · 북한 중등학교 수학 교과서의 영역별 내용 비교 분석: 대수, 통계, 해석, 기하 영역을 중심으로. **수학교육, 38**(1), 1-14.

남호석 · 박희순(2002). **수학(인민학교 4)**. 교육도서출판사.

박경미(1995). 남 · 북한 수학 교과서 비교 · 분석. **대한수학교육학회논문집, 5**(2), 101-109.

박교식 · 이경화 · 임재훈(2004). 남북한 초등학교 교과서의 분수 도입 방식 비교. **수학교육학연구, 14**(4), 367-385.

박문환(2002a). 교과서에 나타난 '수학적 귀납법'에 대한 남 · 북한 비교. **수학교육학연구, 12**(2), 181-191.

박문환(2002b). 피타고라스 정리의 지도에 대한 남북한 비교. **학교수학, 4**(2), 223-235.

박혜경(2003). **분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

백선수(2004). **비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

송정화(2005). **분수의 곱셈, 나눗셈 문제 해결 과정에서 나타난 장애 요인 분석**. 전주교육대학교 대학원 석사학위논문.

신성균 · 황혜정 · 박경미 · 강문봉 · 박문환(1997). 남북한 초등학교 수학과 교육과정 및 교과서 분석 연구. **대한수학교육학회논문집, 7**(1), 159-170.

우정호 · 박문환(2002). 남북한 중등학교 수학교육의 통합 방안 모색. **수학교육학연구, 12**(1), 49-70.

이용률(2001). **지도내용의 핵심과제 99**. 서울: 경문사.

임재훈(2003). 중학교 근사값 단원 학습 지도 방향 탐색: 남북한 교과서 비교를 중심으로. **수학교육학연구 13**(1). 77-94.

임재훈 · 이경화 · 박경미(2002). 남북한 수학 교과서 영역별 분석 및 표준 수학 교육과정안 개발 연구 (I): 남북한 학교수학 용어 통합 방안 연구. **수학교육학연구, 12**(4), 493-508.

임재훈 · 이경화 · 박경미(2003a). 북한 고등중학교 수학 교과서 구성 방식의 변화 고찰. **수학교육학연구, 13**(1), 95-106.

임재훈 · 이경화 · 박경미(2003b). 남북한 수학 교과서 영역별 분석 및 표준 수학 교육과정안 개발 연구(II): 남북한 초등학교 수학 교과서의 구성과 전개 방법 비교. **학교수학, 5**(1), 43-58.

최택영 · 김인영(1998). 남북한 수학 교과서의 비교: 북한의 고등중학교(중등반) 기하를 중심으로. **수학교육, 37**(1), 35-54.

현진오 · 강태석(1999). 남 · 북한 수학 교과서의 내용 체계 및 용어에 대한 비교 분석: 북한의 중학교 교과서를 중심으로. **수학교육, 38**(2), 105-128.

人民教育出版社小學數學室 編著 (2002). **九年義務教育6年制小學教校科書 (數學 第11冊)**. 北京: 人民教育出版社.

人民教育出版社小學數學室 編著 (2003). **9년의무교육6년제소학교교과서 (수학 제11권)**. (엄금석, 역). 연변교육출판사. (원작은 2002

년 출판).

杉山吉茂 外(2004). **新しい算数6上**. 東京: 東京書籍.

細川藤次 外(2004). 算数6年下. 大阪: 啓林館.

Dewey, J., & Mclellan, J. A. (1895). *The psychology of number and its application to methods of teaching arithmetic*. New York: D. Appleton and company.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). Reston, VA: NCTM.

Gupta, V. P., & Ramachandram, K. (2003). *Let's learn mathematics: a textbook for class V*. 4th ed. New Delhi: National Council of Educational Research and Training.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Different Approaches of Introducing the Division Algorithm of Fractions: Comparison of Mathematics Textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan

Yim, Jae Hoon (Gyeong-In National University of Education)
Kim, Soo Mi (Gyeong-In National University of Education)
Park, Kyo Sik (Gyeong-In National University of Education)

This article compares and analyzes mathematics textbooks of North Korea, South Korea, China and Japan and draws meaningful ways for introducing the division algorithm of fractions. The analysis is based on the five contexts: 'measurement division', 'determination of a unit rate', 'reduction of the quantities in the same measure', 'division as the inverse of multiplication or Cartesian product', 'analogy with multiplication algorithm of fractions'

The main focus of the analysis is what context is used to introduce the algorithm and how much it can appeal to students. This analysis supports that there is a few differences of introducing metho ds the division algorithm of fractions among those countries and more meaningful way can be considered than ours. It finally suggests that we teach the algorithm in a way which can have students easily see the reason of multiplying the reciprocal of a divisor when they divide with fractions. For this, we need to teach the meaning of a reciprocal of fraction and consider to use the context of determination of a unit rate.

* key words : fraction(분수), division(나눗셈), algorithm(알고리즘), divisor(제수), reciprocal (역수)

논문접수 : 2005. 4. 30.
심사완료 : 2005. 6. 8.